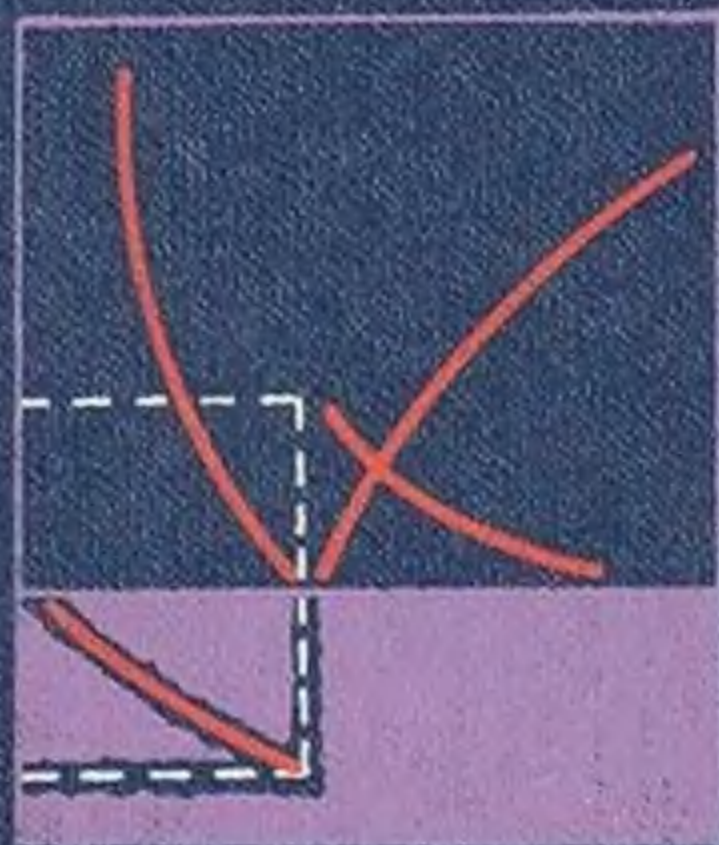


А. К. ЛОСЕВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



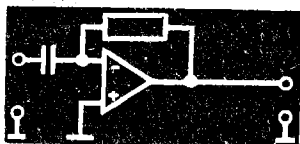
*учебник
для вузов*



А. К. ЛОСЕВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

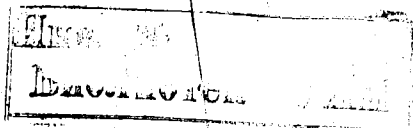
Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальностям
«Автоматическая электросвязь»,
«Радиосвязь и радиовещание»,
«Многоканальная электросвязь»



Москва
Высшая школа 1987

ББК 31.211
Л 79
УДК 621.3

Рецензенты:
кафедра теоретических основ электротехники Ленинградского электротехнического института им. В. И. Ульянова (Ленина) (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. П. Н. Матханов); кафедра основ радиотехники Харьковского института радиоэлектроники им. акад. М. К. Янгеля (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Б. Л. Кашеев); кафедра теории линейных электрических цепей Московского электротехнического института связи (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. К. К. Товара).



Лосев А. К.

Л 79 Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1987. — 512 с.: ил.

В книге изложены основы общей теории цепей и основные методы расчета линейных цепей, рассмотрены свойства цепей, сигналов и их спектров, а также преобразования сигналов в линейных цепях.

Л 2302010000—198—120—86
001(01)—87

ББК 31.211
6П2.1.

© Издательство «Высшая школа», 1987

Предисловие

Предлагаемый учебник написан по материалам лекций автора в Рижском ордена Трудового Красного Знамени политехническом институте им. А. Я. Пельше и соответствует типовой учебной программе от 1983 г.

В начальных главах материал преподносится подробнее, чем в заключительных, изложение которых является более академичным. При таком построении автор исходил из подготовленности читателя, навыки которого в работе над книгой должны возрастать по мере изучения курса. В частности, первые главы книги проиллюстрированы в тексте примерами расчета цепей, данными в общем виде. Читатель, однако, должен иметь в виду, что твердое усвоение курса невозможно без решения многих численных задач, приводимых в соответствующих учебных пособиях.

Автор благодарит коллег, рекомендациями которых он воспользовался при подготовке рукописи учебника. Особую признательность автор выражает проф. П. Н. Матханову, проф. Л. В. Данилову, доц. А. И. Гою (ЛЭТИ), проф. К. К. Товара, доц. И. Н. Добротворскому (МЭИС).

Автор будет признателен всем читателям, высказавшим замечания и пожелания по книге, и просит присылать их по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

Введение

Человеческое общество не может существовать и развиваться без общения между людьми. Такое общение на больших расстояниях может осуществляться достаточно эффективно только с помощью технических средств связи. С развитием человеческого общества совершенствуются и эти средства. Достижения науки и техники неизменно служат стимулом развития средств связи, а потребности и успехи этого развития являются одной из движущих сил научно-технического прогресса.

Идеи электросвязи предшествовали зарождению электротехники — отрасли науки и техники, использующей электрические и магнитные явления для практических целей. Одним из первых практических применений электрической энергии стал электрический телеграф. Среди первых его проектов жизнеспособным оказался электромагнитный телеграф, изобретенный в 1832 г. П. Л. Шиллингом. Электрическая связь неуклонно совершенствовалась. Вслед за телеграфом конструкции Морзе (1837) завоевала признание буквопечатающая телеграфия (Б. С. Якоби, 1850). В арсенал технических средств электросвязи вошли телефон (А. Г. Белл, 1876) и фототелеграф, прообразом которого явился электрохимический телеграф Дж. Казелли (1855).

Изобретение радиоприемника (А. С. Попов, 1895) положило начало беспроводной электрической связи, или радиосвязи. Вслед за радиотелеграфией стала бурно развиваться радиотелефония. Это, в частности, сделало возможным массовое внедрение радиовещания. Вместе с радиовещанием в современный быт прочно вошло телевидение, основы которого были за-

ложены Б. Л. Розингом, предложившим в 1907 г. систему телевидения с электронно-лучевой трубкой.

Все виды электрической связи взаимно дополняют друг друга. Сейчас в нашей стране происходит интенсивное развитие всех видов электросвязи с объединением их в Единую автоматизированную сеть (систему) связи (ЕАСС). Сюда входят средства телеграфии и телефонии, фототелеграфии и других видов факсимильной связи, радиовещания и телевидения. ЕАСС включает в себя как проводные линии связи, так и радиоканалы, в том числе радиорелейные линии и космические каналы связи. ЕАСС предназначена для удовлетворения нужд населения в средствах информации, а также для передачи данных, используемых при координации и управлении народным хозяйством страны.

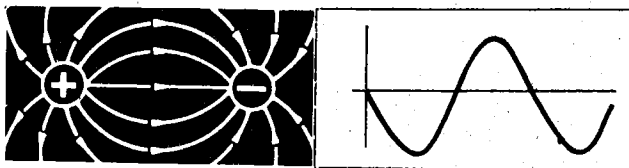
Учитывая роль средств массовой информации в жизни общества, программные партийные документы неизменно обращают внимание на развитие электросвязи, в том числе телефонной связи, радиовещания и телевидения. «Основные направления экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года» и «Комплексная программа развития производства товаров народного потребления и сферы услуг на 1986—2000 годы» предусматривают, в частности, ускоренное развитие на новой технической основе и повышение качества услуг связи и технических средств информации, опережающие темпы развития услуг телефонной связи, обеспечение практически повсеместного приема программ цветного телевидения, завершение в основном внедрения трехпрограммного проводного вещания, продолжение развития и повышение надежности работы единой автоматизированной сети связи страны на базе новейших достижений науки и техники, совершенствование бытовой радиоэлектронной аппаратуры на основе использования новейших достижений микроэлектроники, создание новых типов телевизоров, радиоприемников, видеомагнитофонов и другой бытовой радиоэлектронной аппаратуры с цифровой обработкой сигнала.

Развитие средств связи, повышение их качества и надежности расширяют эксплуатационно-технические возможности связанного оборудования. Например, еще в 1936 г. начались пробные фототелеграфные передачи газет «Правда» и «Известия» на линии Москва—Свердловск, а затем на линии Москва—Новосибирск. В 1964 г. был задействован комплекс факсимильного оборудования «Газета-1» (ФТАГ) с радиусом действия свыше 9000 км. Он позволял передавать одну стандартную газетную полосу за 15—25 мин, что являлось недостаточно оперативным. Новый комплекс оборудования «Газета-2» обеспечил передачу стандартной газетной полосы в среднем за 3 мин. И это, разумеется, не предел. Передача же полос центральных газет по космическим каналам связи снимает проблему расстояний и привязки системы к дорогостоящим и дефицитным проводным линиям связи.

Развитие средств электрической связи невозможно без совершенствования и усложнения принципов работы связанных устройств, их конструкции и элементной базы. Усложнение технических средств связи неизмеримо повышает роль теории при изучении, конструировании и технической эксплуатации связанного оборудования. В XIX в. вся теория работы телеграфных устройств и их конструкции описывались в одном из разделов курса физики. В начале XX в. описания телеграфа и телефона стали переключиваться из курса физики в специализированные учебные пособия. Сейчас только для изучения принципов работы и конструкций различных видов связанного оборудования служат многочисленные специальные курсы. Усвоение же этих курсов возможно только при наличии фундаментальной теоретической подготовки, которую студенты получают при изучении общенаучных и общинженерных дисциплин.

Одной из основных общинженерных дисциплин для инженеров-связистов любой специальности является «Теория линейных электрических цепей» (ТЛЭЦ). Не вдаваясь пока в смысл этого понятия, отметим, что линейные электрические цепи составляют обширный класс электрических систем, в том числе и систем электросвязи. Как и любая общинженерная дисциплина, курс ТЛЭЦ дает знания, необходимые для изучения специальных курсов, в которых рассматриваются конкретные виды связанных устройств. Кроме того, без овладения ТЛЭЦ невозможно изучение не только любых специальных курсов, но и других общинженерных дисциплин. Это обусловлено четырьмя причинами. Во-первых, линейные электрические цепи являются электрическими системами, которые входят в состав любых устройств электросвязи и радиотехники. Во-вторых, составные части связанного оборудования, которые не относятся к классу линейных электрических цепей, сами содержат эти цепи в качестве компонентов. В-третьих, некоторые устройства, содержащие, например, электронные приборы, не являются линейными электрическими цепями, но в определенном режиме работы обладают свойствами таких цепей и их анализ производится на основе ТЛЭЦ. В-четвертых, в курсе ТЛЭЦ изучаются, в частности, такие теоретические положения и методы расчета электрических устройств, которые являются общими как для линейных цепей, так и для любых других электрических систем.

Указанные причины обуславливают важность курса ТЛЭЦ не только для изучения последующих дисциплин в стенах вуза, но и для инженерной деятельности специалиста в области электросвязи и радиотехники. Без глубоких и прочных знаний теории линейных электрических цепей невозможно совершенствовать связанное оборудование и разрабатывать новые системы электросвязи и радиотехники. Не опираясь на эту теорию, нельзя обеспечить и грамотное техническое обслуживание оборудования, находящегося в эксплуатации. Отличное владение этой теорией является залогом творческих успехов инженера-связиста.



Основные понятия теории электрических цепей

В устройствах электросвязи протекают те или иные электрические процессы, многие из которых имеют специфический характер, обусловленный целевым назначением этих устройств. Для понимания указанной специфики при изучении теории электрических цепей следует предварительно ознакомиться с основными понятиями, имеющими отношение к работе систем связи. Такие понятия рассматриваются в настоящей главе.

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Электрические процессы в любых электрических устройствах характеризуются значениями некоторых электрических величин. Основными из них являются электрический заряд q , электрический ток i , электрический потенциал v , электрическое напряжение u , а также энергетические величины. Необходимо вспомнить и углубить смысл этих понятий, известных из курса физики.

1. Электрический заряд. *Электрическим зарядом называют источник электрического поля, через которое заряды взаимодействуют друг с другом.*

Заряды бывают двух знаков. Зарядам на наэлектризованном стеклянном теле присвоен положительный знак, а зарядам на наэлектризованном янтаре — отрицательный. Заряды разных знаков (разноименные заряды) притягиваются, а заряды одинаковых знаков (одноименные заряды) отталкиваются.

Значение заряда q может быть определено через силу взаимодействия двух зарядов в соответствии с законом Кулона. Однако в системе МКСА, входящей в Международную систему единиц (СИ), единица заряда определяется через единицу тока. Для электрических цепей такое определение более удобно, но для него надо ввести сначала единицу тока.

2. **Электрический ток.** *Электрическим током называют направленное перемещение зарядов в электрической цепи**. Под направлением тока понимают направление перемещения положительных зарядов.

Значение тока определяется количеством зарядов, перемещающихся через поперечное сечение проводника в единицу времени. Однако такое определение пригодно только для постоянного тока $i = I = \text{const}$, значение и направление которого не изменяются с течением времени t :

$$I = q/t. \quad (1.1)$$

Значение переменного тока $i(t)$, изменяющегося во времени, определяют в дифференциальной форме:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.2)$$

Значение величины (1.2) в различные моменты времени называют мгновенным током, а значение величин $q(t)$ — мгновенным зарядом.

В основу определения единицы тока можно положить закон Ампера, устанавливающий силу взаимодействия между проводниками, по которым проходит ток. Именно так сделано в системе МКСА, где механическая сила измеряется в *ньютонгах* (Н), а за единицу тока (силы тока) принят *ампер* (А), дополняющий совокупность основных единиц: единицу расстояния *метр* (м), единицу массы *килограмм* (кг) и единицу времени *секунду* (с). Ампером называют значение постоянного тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызывает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на 1 м их длины.

В соответствии с этим определением и соотношением (1.1) в системе МКСА определяют единицу заряда *кулон* (Кл). Кулоном называют заряд, переносимый через поперечное сечение проводника в 1 с при значении постоянного тока, равном 1 А. Размерность заряда $[Tl]$, где T — время, l — ток.

3. **Электрический потенциал.** *Потенциалом v некоторой точки электрической цепи называют величину, равную отношению потенциальной энергии ω , которой обладает заряд q , находящийся в данной точке, к этому заряду:*

$$v = \omega/q. \quad (1.3)$$

Потенциальная энергия ω равна энергии, расходуемой зарядом при его перемещении из данной точки электрической цепи в другую точку, имеющую нулевой потенциал. В электрической цепи за точку с нулевым потенциалом принимают заземленную точку — точку, соединенную проводником с металлическим листом, закопанным в землю, куда стекают все заряды, притекающие к этой заземленной точке. Существенно отметить, что расходуемая энергия не зависит от пути, по которому заряд перемещается из данной точки в заземленную точку.

* В общем случае можно рассматривать электрический ток в вакууме, газовой среде, жидкости и твердом теле, обладающем свойствами проводника или полупроводника.

Единица электрического потенциала может быть установлена из соотношения (1.3) при выбранных единицах энергии — джоуль (Дж) и заряда. В системе МКСА единицей потенциала является вольт (В). Вольтом называют потенциал точки электрической цепи, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией в 1 Дж. Размерность потенциала $[L^2MT^{-3}I^{-1}]$, где L — длина, M — масса, а остальные обозначения прежние.

4. Электрическое напряжение. *Электрическим напряжением и между двумя точками цепи называют разность потенциалов v_1 и v_2 этих точек:*

$$u = v_1 - v_2. \quad (1.4)$$

Если это напряжение создается под воздействием тока, проходящего между указанными точками, то его называют также падением напряжения.

Из определения (1.4) следует, что напряжение, так же как и потенциал, измеряется в вольтах. Поэтому вольт можно называть такую разность потенциалов между двумя точками электрической цепи, при которой положительный заряд в 1 К расходует энергию в 1 Дж, перемещаясь из точки с большим потенциалом в точку с меньшим потенциалом.

Электрическое напряжение, как и ток, может быть постоянным и переменным. В первом случае напряжение не изменяется во времени: $u = U = \text{const}$. *Переменное напряжение, изменяющееся во времени, характеризуется своим мгновенным значением $u(t)$.*

5. Направления отсчета токов и напряжений. Значения токов и напряжений определяются также их направлением (знаком). Пусть в некоторой электрической цепи (ЭЦ) выделены точки 1 и 2 с потенциалами v_1 и v_2 (рис. 1.1, а). Тогда по соотношению (1.4) напряжение u между точками 1 и 2 является положительным, если $v_1 > v_2$. Однако такой знак напряжения u является условным, поскольку произвольна нумерация точек цепи. Если при тех же потенциалах в цепи рис. 1.1 поменять нумерацию точек, то по соотношению (1.4) то же напряжение u будет отрицательным. Во избежание подобной неопределенности на схемах цепей показывают стрелкой положительное направление отсчета напряжения, как это сделано на рис. 1.1. При этом фактическое напряжение u является положительным, если в направлении стрелки потенциал убывает, и отрицательным, если в том же направлении происходит возрастание потенциала. Другими сло-

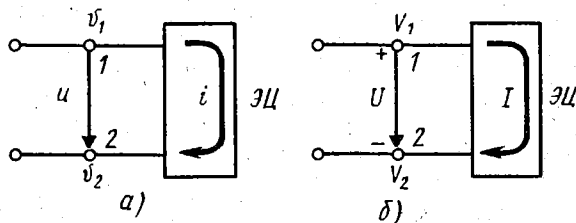


Рис. 1.1. Потенциалы, напряжение и ток в электрической цепи

вами, в случае положительного напряжения между двумя точками стрелка получается направленной от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом.

При постоянных напряжениях их направление обозначают иногда не стрелкой, а знаками «+» и «-», проставляемыми у соответствующих точек, как на рис. 1.1, б. Эти знаки не означают положительности или отрицательности потенциалов V_1 и V_2 , а показывают, что точка со знаком «+» имеет больший потенциал, чем точка со знаком «-». При этом говорят о положительной или отрицательной полярности напряжения по отношению к одной из точек. Например, на рис. 1.1, б напряжение U имеет положительную полярность относительно точки 2 и отрицательную полярность относительно точки 1.

Аналогично напряжению *положительное направление отсчета тока также показывают стрелкой*, как на рис. 1.1. Здесь токи i и I считают положительными, если они проходят через цепь от точки 1 к точке 2. Токи же, проходящие через цепь от точки 2 к точке 1, считают отрицательными.

Положительные направления отсчета напряжения и тока между какими-либо точками выбирают произвольно. Однако обычно между одними и теми же точками предпочитают выбирать одинаковые положительные направления отсчета для напряжения и тока, как на рис. 1.1. При таком выборе положительному напряжению соответствует положительный ток, проходящий от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом, что соответствует физическому определению тока.

При выбранных положительных направлениях отсчета переменные напряжения и токи $u(t)$ и $i(t)$, изменяясь по значению, могут либо изменять знак, как на рис. 1.2, а, либо не изменять знака, как на рис. 1.2, б. Здесь U_m — амплитуда импульсов, τ — их длительность. Перемена знака означает изменение направления тока или полярности напряжения. Применительно к напряжению в этих случаях говорят о его биполярности (рис. 1.2, а) или униполярности (рис. 1.2, б).

6. Основные энергетические величины. Электрические процессы в цепи характеризуются также энергетическими величинами. Пусть, например, между точками 1 и 2 (см. рис. 1.1, а) действует напряжение $u = u(t)$. Тогда при перемещении от точки 1 к точке 2 элементарного (бесконечно малого) заряда dq расходуется некоторая энергия dW , которая определяется из соотноше-

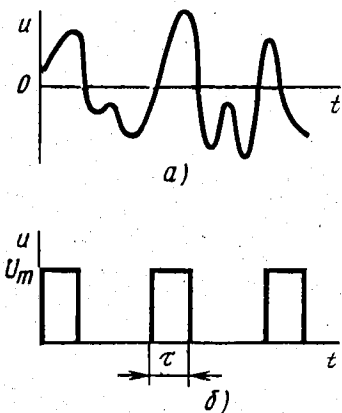


Рис. 1.2. Биполярное и униполярное напряжения

ний (1.4) и (1.3):

$$d\omega = u dq.$$

Из этого равенства и определения (1.2) находим *полную энергию*, израсходованную в цепи к моменту времени t при прохождении тока $i = i(t)$ под воздействием напряжения $u = u(t)$:

$$\omega = \omega(t) = \int_{-\infty}^t u dq = \int_{-\infty}^t u i dt = \int_{-\infty}^t p dt. \quad (1.5)$$

Здесь

$$p = p(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = u(t) i(t) \quad (1.6)$$

— *мгновенная мощность*, затрачиваемая в электрической цепи при прохождении в ней тока i под воздействием напряжения u . При постоянных значениях напряжения и тока (см. рис. 1.1, б) мгновенная мощность (1.6) не изменяется:

$$p = P = UI. \quad (1.7)$$

Такую *постоянно расходуемую неизменную по значению мощность P* называют *активной мощностью*.

Энергию и мощность в электрической цепи измеряют в тех же единицах, что и соответствующие механических величины, т. е. в *джоулях* (Дж) и *ваттах* (Вт).

1 Дж — работа, которую совершает постоянная сила в 1 Н на пути в 1 м, пройденном телом под воздействием этой силы в направлении ее действия. 1 Вт — мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж. Размерность работы $[L^2MT^{-2}]$, размерность мощности $[L^2MT^{-3}]$.

В электрической цепи постоянный ток в 1 А, проходящий между точками с разностью потенциалов в 1 В, обладает мощностью в 1 Вт. Такой ток расходует в 1 с электрическую энергию в 1 Дж.

В некоторых случаях вместо ватта используют единицу электрической мощности *вольт-ампер* (В·А), а вместо джоуля — *ватт-секунду* (Вт·с).

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ

Любые устройства связи служат для передачи и приема информации. В наиболее общем смысле под информацией понимают любые сведения об окружающем нас мире. Информация может не только передаваться, но и храниться, например, в книге или на магнитной ленте. Во всех случаях *носителями информации являются сигналы*. Необходимо вспомнить их основные свойства, известные из курса «Введение в специальность».

1. *Электрические сигналы. Сигналами могут служить любые физические процессы или различные состояния физических объектов, отображающие информацию.* Сигналом, например, является физический процесс изменения магнитного поля в записывающей или считывающей головке магнитофона. Сигналом является также различная намагниченность магнитной ленты на разных ее участках. К сигналам относятся, в частности, различные символы, например буквы в книге, точки и тире в азбуке Морзе на телеграфной ленте и т. д.

В устройствах электросвязи для передачи и хранения информации используются *электрические сигналы*, которые *представляют собой электрические процессы или различные электрические состояния тех или иных электрических систем*. Эти процессы и состояния характеризуются обычно мгновенными значениями напряжения и тока. Далее для определенности рассматривается напряжение.

2. **Отображение (кодирование) информации.** Информация может отображаться в сигнале различным образом. В общем случае ее отображает сам характер, закон изменения во времени мгновенного значения сигнала $u(t)$, или форма сигнала. При этом форма сигнала является непредсказуемой, поскольку $u(t)$ изменяется случайным образом в соответствии с отображаемой информацией, как, например, на рис. 1.2, а. Такие сигналы называются случайными.

В частном случае сигнал имеет заданную форму и называется детерминированным. Примером детерминированного сигнала является заданная последовательность униполярных прямоугольных импульсов, показанная на рис. 1.2, б. При этом информация может отображаться значением какого-либо параметра сигнала, например высотой (амплитудой) импульсов U_m или их длительностью t . Можно также отобразить информацию путем фиксации временного положения импульсов, как при передаче сигналов точного времени, и т. д.

3. **Гармонический сигнал.** Рассмотрим напряжение, заданное в тригонометрической форме:

$$u = U_m \cos \Phi, \quad (1.8)$$

где Φ — некоторый угол, измеряемый в *радианах* (рад), а $U_m = u_{\max}$ — максимальное значение напряжения u (В) при $\Phi = 0$.

Разным фиксированным значениям Φ и U_m соответствуют различные значения напряжения (1.8), которым могут быть приписаны некоторые смысловые значения. Таким образом, напряжение (1.8) является сигналом, отображающим различную информацию при разных значениях u .

Сигнал (1.8) будет непременно изменяться, если угол Φ начнет изменяться во времени:

$$u(t) = U_m \cos \Phi(t), \quad (1.9)$$

где U_m — *амплитуда сигнала* (1.9); $\Phi(t)$ — переменный угол, называемый *фазовым углом* или *фазой сигнала* (1.9).

Простейшим законом изменения фазы $\Phi(t)$ является линейный закон (рис. 1.3, а):

$$\Phi(t) = \omega t + \psi. \quad (1.10)$$

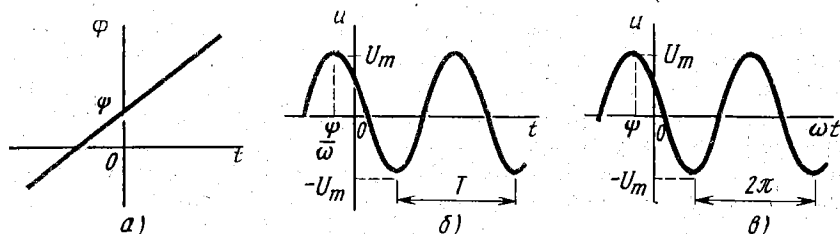


Рис. 1.3. Изменение фазы и мгновенного значения гармонического сигнала

Здесь $\psi = \Phi|_{t=0}$ — значение фазы Φ в нулевой момент времени (рис. 1.3, а), называемое *начальной фазой сигнала* (1.9), а параметр ω определяет скорость изменения во времени фазы $\Phi(t)$:

$$\omega = \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (1.11)$$

Эта величина измеряется в *радианах в секунду* (рад/с).

Нетрудно видеть, что сигнал (1.9) представляет собой периодические колебания, значения которых повторяются через некоторый *период* T (рис. 1.3, б). Значение этого периода связано со скоростью изменения фазы (1.11). Действительно, за один период T фаза $\Phi(t)$ изменяется на величину $\omega T = 2\pi$, как видно из рис. 1.3, в. Отсюда получаем

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f, \quad (1.12)$$

где $f = 1/T$ — количество периодов, или число колебаний в 1 с. Эта величина называется *частотой* колебаний и измеряется в *герцах* (Гц). 1 Гц — частота периодических колебаний с периодом $T = 1$ с. Размерность частоты $[T^{-1}]$, т. е. 1/с.

Согласно формуле (1.12) параметр (1.11) пропорционален частоте колебаний f . Поэтому величину ω называют также *угловой частотой*.

Таким образом, параметрами сигнала (1.9) являются амплитуда колебаний U_m , их угловая частота ω (частота f) и начальная фаза ψ . Последние два из этих параметров также могут отображать информацию. Задав, например, частоту $f = 1$ МГц, можно использовать сигнал (1.9) в качестве эталона времени, несущего информацию о микросекундных временных интервалах $\Delta t = T = 1/f = 1$ мкс*. Отображение информации значением начальной фазы ψ возможно только при наличии опорной метки, от которой отсчитывается фаза $\Phi(t)$.

Ранее предполагалось, что три параметра колебания (1.9) являются фиксированными величинами:

$$U_m = U_{m0} = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 = \text{const}, \quad \psi = \psi_0 = \text{const}. \quad (1.13)$$

Перепишем сигнал (1.9) с учетом формулы (1.10) и обозначений (1.13):

$$u(t) = U_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.14)$$

Этот *косинусоидальный сигнал с фиксированными параметрами называется гармоническими колебаниями, или гармоническим сигналом*. Существенно отметить, что сигнал (1.14) является бесконечно протяженным во времени, т. е. существует в интервале $[-\infty, \infty]$, поскольку $U_m = U_{m0} \neq 0$ во всем этом интервале. Отмеченная особенность гармонических колебаний условно показывается на графике их изображением как при $t > 0$, так

* Значения кратных и дольных единиц приведены в табл. П. 1 Приложений.

и при $t < 0$ (рис. 1.3, б). При описании гармонического сигнала можно опускать нулевые индексы в соотношении (1.14) и пользоваться соотношениями (1.9), (1.10).

Рассмотренные понятия периода T и частоты $f = 1/T$ относятся к периодическим сигналам произвольной формы, для которых $u(t + T) = u(t)$ при любых t . Понятие же угловой частоты $\omega = 2\pi f$ применяется только в случае гармонических колебаний.

4. Модулированные сигналы. Существует еще один способ отображения (кодирования) информации. Если в сигнале зафиксировать все параметры, кроме одного, то незафиксированный параметр можно использовать для отображения информации, изменяя его во времени по соответствующему закону. Такое изменение параметра сигнала по заданному закону называют *модуляцией сигнала по этому параметру*. Полученный в результате модуляции сигнал называют *модулированным*. Исходный же сигнал, использованный для переноса информации с помощью модуляции, называют *несущим* сигналом.

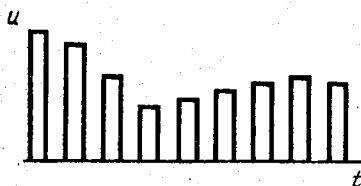


Рис. 1.4. Модулированный импульсный сигнал

В качестве несущего сигнала может быть использован сигнал любой заданной формы. Например, несущим сигналом может являться последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 1.2, б). Модуляцию импульсных сигналов называют *импульсной модуляцией (ИМ)*. В этом случае модулируемым параметром может быть, например, высота (амплитуда) импульсов, изменяемая по закону, отображающему некоторую информацию. Получающийся при такой модуляции ИМ-сигнал показан на рис. 1.4.

При использовании гармонических колебаний (1.14) в качестве несущего сигнала (несущих колебаний) их можно модулировать по амплитуде, частоте и фазе (начальной фазе), т. е. осуществлять *амплитудную, частотную или фазовую модуляцию*. Соответственно модулируемому параметру получаются разные модулированные колебания (сигналы): амплитудно-модулированный, или АМ-сигнал (рис. 1.5, а), частотно-модулированный, или ЧМ-сигнал (рис. 1.5, б), и фазо-модулированный, или ФМ-сигнал (рис. 1.5, в). Существенно отметить, что в АМ-сигнале амплитуда согласованно увеличивается или уменьшается сверху и снизу, как показано пунктирными линиями $U_m(t)$ и $-U_m(t)$ на рис. 1.5, а. Эти линии называют *огibaющими* (огibaющими амплитуд) АМ-сигнала. Огibaющие повторяют форму модулирующего сигнала, в котором заложена передаваемая информация. Восстановление этой информации при приеме АМ-сигнала сводится к получению колебаний, повторяющих форму огibaющей. Этот процесс, называемый детектированием, обратен процессу модуляции и осуществляется в специальных устройствах — детекторах.

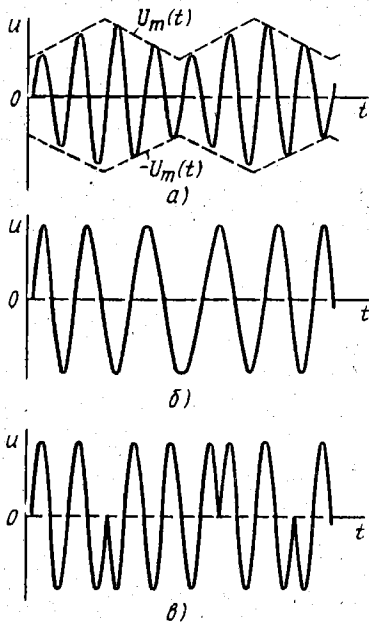


Рис. 1.5. Модулированные гармонические колебания

Чтобы огибающие АМ-сигнала достаточно точно повторяли форму модулирующего сигнала, частота несущих колебаний должна значительно превышать частоту модуляции. В частности, поэтому в радиотехнике используют частоты от сотен килогерц до единиц терагерц (см. табл. П.2 Приложений). Например, в телевидении применяют очень высокие и ультравысокие частоты, соответствующие метровым и дециметровым волнам. В системах многоканальной связи используют частотные каналы в диапазоне от десятков килогерц до единиц мегагерц. Это существенно отличает системы электросвязи от электроэнергетических систем, где используется преимущественно стандартная частота в 50 Гц.

Рассмотрим математическое описание модулированных сигналов на примере АМ-сигнала, который в общем случае может быть представлен в виде

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.15)$$

Закон изменения амплитуды $U_m(t)$ определяется передаваемой информацией. Первоначально она отображается в другом сигнале $u_w(t)$. Этот сигнал называется модулирующим, поскольку с его помощью осуществляется модуляция. При этом изменение модулируемого параметра происходит пропорционально модулирующему сигналу:

$$U_m(t) = U_{m0} + a u_w(t). \quad (1.16)$$

Здесь a — коэффициент пропорциональности, который является параметром соответствующего модуляционного устройства — модулятора.

Пусть, например, модуляция осуществляется по гармоническому закону с частотой модуляции $F = \Omega/2\pi$. При этом модулирующий сигнал

$$u_w(t) = U_{m\Omega} \cos(\Omega t + \psi_w). \quad (1.17)$$

Из соотношений (1.16) и (1.17) находим закон изменения амплитуды АМ-сигнала при гармонической модуляции:

$$U_m(t) = U_{m0} + a U_{m\Omega} \cos(\Omega t + \psi_w),$$

или

$$U_m(t) = U_{m0} + \Delta U_m \cos(\Omega t + \psi_w) = U_{m0} [1 + m \cos(\Omega t + \psi_w)], \quad (1.18)$$

где $\Delta U_m = a U_{m\Omega}$ — максимальное приращение амплитуды АМ-сигнала; $m = \Delta U_m / U_{m0}$ — коэффициент, или глубина модуляции.

Из соотношений (1.15) и (1.18) определяем АМ-сигнал:

$$u(t) = U_{m0} [1 + m \cos(\Omega t + \psi_w)] \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.19)$$

Читателю предоставляется возможность начертить самостоятельно несущий сигнал (1.14), модулирующий сигнал (1.17), график изменения амплитуды (1.18) и АМ-сигнал (1.19). При построении графика АМ-сигнала рекомендуется предварительно изобразить пунктирными линиями значения амплитуд U_{m0} , $-U_{m0}$ и огибающие $U_m(t)$, $-U_m(t)$.

Кроме рассмотренных видов модуляции возможна также одновременная модуляция по нескольким параметрам. Сигналы, модулированным по амплитуде и частоте (рис. 1.6), называют АЧМ-сигналами.

5. Сигнал в виде волны. Выше рассматривались сигналы $u(t)$, изменяющиеся только во времени. Существуют также сигналы, которые представляют собой физический процесс изменения некоторой величины как во времени, так и в пространстве. Такие процессы называются волновыми, а сигнал с подобными свойствами — волновой. К волновым процессам отно-

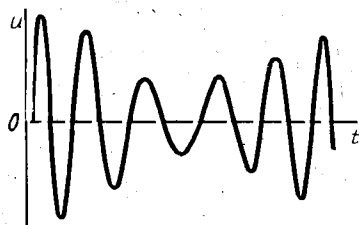


Рис. 1.6. АЧМ-сигнал

ются, например, электромагнитные волны, или радиоволны (процесс распространения в пространстве электромагнитных колебаний), акустические волны (процесс распространения в атмосфере акустических колебаний, например речевых сигналов) и др.

В электрических цепях тоже возможны волновые процессы. Например, сигнал $u(t)$ может распространяться по проводной линии связи. В этом случае напряжение u в проводной линии зависит не только от времени t , но и от пространственной координаты l , которая отсчитывается вдоль проводов линии связи. При этом вместо сигнала $u(t)$ рассматривается волна напряжения $u(t, l)$, являющаяся функцией двух переменных величин. Аналогично в рассмотренной линии существует волна тока $i(t, l)$.

§ 1.3. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СПЕКТРАХ СИГНАЛОВ

Процессы в электрических цепях получаются тем сложнее, чем более сложной является форма сигналов. Иногда эта сложность затрудняет не только расчеты, но и понимание характера протекающих процессов. В этих случаях часто оказывается полезным использование понятия спектра сигнала.

1. Понятие спектра сигнала. Любой сигнал может быть представлен в виде суммы каких-либо сигналов другой формы, которые являются составляющими заданного сигнала. Например, последовательность биполярных импульсов u (рис. 1.7, а) может быть представлена как сумма двух составляющих — прямоугольных колебаний u_1 и u_2 (рис. 1.7, б, в). Аналогично, сигнал сложной формы $u(t)$ (рис. 1.8) представляется суммой двух гармонических колебаний u_1 и u_2 разных частот $f_1 = 1/T_1$ и $f_2 = 1/T_2$. В справедливости такого представления легко убедиться, складывая по точкам колебания u_1 и u_2 .

Совокупность составляющих заданной формы, образующих в сумме некоторый сигнал, называют спектром этого сигнала, а составляющие сигнала — его спектральными составляющими. Количество спектральных составляющих сигнала может быть как конечным, так и бесконечным.

2. Спектр из гармонических составляющих. В технике связи важное значение имеют спектры сигналов в виде совокупности гармонических колебаний разных частот. Эти спектральные составляющие описываются соотношениями (1.9), и характеризуются частотами $\omega = \omega_k$, амплитудами U_{mk} и начальными фазами ψ_k :

$$u_k(t) = U_{mk} \cos(\omega_k t + \psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \leq \infty. \quad (1.20)$$

Одной из спектральных составляющих сигнала при таком спектре является также постоянная составляющая U_0 , которую можно рассматривать как вырожденные гармонические колебания при нулевых частоте и фазе: $\omega_k = \omega_0 = 0$, $\psi_k = \psi_0 = 0$, $U_0 = U_{m0} \cos 0 = U_{m0}$.

Далее рассматриваются только спектры из гармонических

спектральных составляющих. Для их определения существуют специальные математические способы. В простейших случаях спектры сигналов могут быть найдены путем элементарных математических преобразований. Рассмотрение вместо самих сигналов их спектров, состоящих из гармонических колебаний (1.20), в ряде случаев упрощает анализ процессов в цепях.

3. Спектр АМ-сигнала. Рассмотрим для примера АМ-сигнал (1.19) при гармонической модуляции. Для нахождения его спектральных составляющих (1.20) раскроем квадратные скобки в соотношении (1.19) и произведение косинусов заменим полусуммой косинусов по известной тригонометрической формуле. Тогда получим представление АМ-сигнала в виде суммы трех спектральных составляющих:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + \psi_0) + \\
 &+ \frac{m}{2} U_m \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi_0 - \psi_m] + \\
 &+ \frac{m}{2} U_m \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi_0 + \psi_m].
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Таким образом, частоты спектральных составляющих АМ-сигнала имеют значения f_0 (несущая частота), $f_0 - F$ (нижняя боковая частота) и $f_0 + F$ (верхняя боковая частота). Название боковых частот обусловлено их симметричным расположением по бокам от несущей частоты (рис. 1.9).

Спектральные составляющие с боковыми частотами называют боковыми составляющими. В спектре АМ-сигнала именно боковые спектральные составляющие являются носителями информации. Действительно, спектральная составляющая с несущей частотой f_0 представляет собой несущий сигнал (1.14), или несущую составляющую. Однако до модуляции этот сигнал не заключает в себе информации, отображаемой модулирующим сигналом (1.17).

Важным свойством спектра АМ-сигнала является его симметрия относительно несущей спектральной составляющей. Она проявляется прежде всего в симметричном расположении боковых спектральных составляющих. Кроме того, четная симметрия спектра заключается в равенстве амплитуд его боковых составляющих: как видно из (1.21), обе боковые составляющие имеют одинаковую амплитуду $mU_m/2$. Из этого же соотношения видно, что начальные фазы боковых составляющих $\psi_0 - \psi_m$ и $\psi_0 + \psi_m$ отличаются от начальной фазы ψ_0 несущей составляющей на одинаковую величину ψ_m , но в меньшую и в большую стороны. В этом заключается нечетная симметрия боковых составляющих спектра.

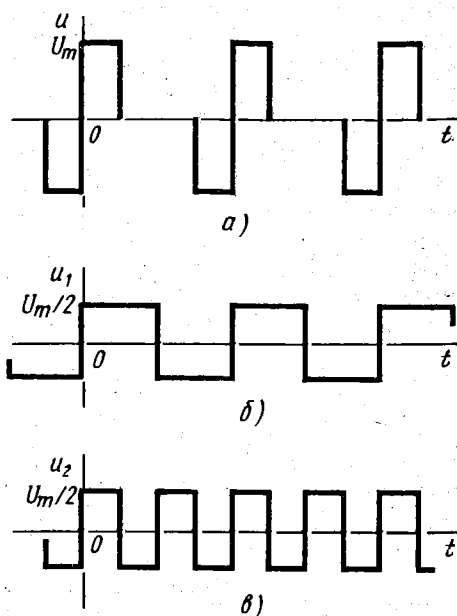


Рис. 1.7. Разложение сложного сигнала на сумму прямоугольных колебаний

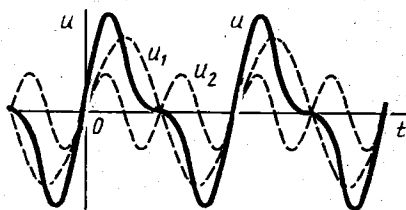


Рис. 1.8. Разложение сложного сигнала на сумму гармонических колебаний

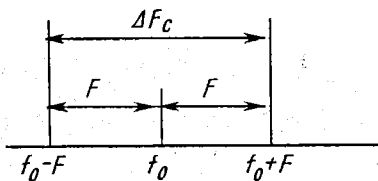


Рис. 1.9. Частоты спектральных составляющих АМ-сигнала

4. Понятие ширины спектра. Спектр сигнала может занимать полосу частот от некоторого минимального значения f_{\min} до максимального значения f_{\max} . Ширина этой полосы называется шириной спектра сигнала:

$$\Delta F_c = f_{\max} - f_{\min}. \quad (1.22)$$

Например, спектр сигнала (1.21) занимает полосу частот от $f_{\min} = f_0 - F$ до $f_{\max} = f_0 + F$. Поэтому согласно определению (1.22) АМ-сигнал при гармонической модуляции имеет ширину спектра, равную удвоенной частоте модуляции (см. рис. 1.9):

$$\Delta F_c = 2F. \quad (1.23)$$

Поскольку несущая частота f_0 АМ-сигнала должна значительно превышать частоту модуляции (см. § 1.2.4), при этом $f_0 \gg F$ и согласно формуле (1.23) должно выполняться условие

$$f_0 \gg \Delta F_c. \quad (1.24)$$

Это условие выполняется при использовании в технике связи высоких частот.

5. Реальность спектра. Существенно отметить, что спектр сигнала не является абстрактным математическим понятием. В системах связи спектр надо учитывать как физическую реальность. Если, например, по каналу связи проходит АМ-сигнал (1.19), то канал должен пропускать весь спектр сигнала (1.21) в полосе частот (1.23). При нарушении этого условия могут быть потери информации. Пусть, например, канал связи пропускает гармонические колебания только с частотой f_0 . Тогда без боковых составляющих от АМ-сигнала (1.21) останется только несущий сигнал (1.14), который, как отмечалось, не отображает информации.

Реальность спектра проявляется именно при взаимодействии сигнала с физической системой, в том числе с электрической цепью. Об этом свидетельствует и то обстоятельство, что спектральные составляющие любого сигнала могут быть обнаружены и измерены с помощью специальных приборов — спектральных анализаторов, которые реагируют на гармонические колебания.

Такие измерения, например, в случае речевых АЧМ-сигналов показывают, что спектр мужской речи занимает полосу частот от $F_{\min} \approx 100$ Гц до $F_{\max} \approx 1,5$ кГц, а спектр женской речи — от $F_{\min} \approx 150$ Гц до $F_{\max} \approx 3,5$ кГц. При этом максимальные спектральные составляющие получаются на частотах около 300 Гц. Весь этот спектр должен пропускаться соответствующим каналом связи.

§ 1.4. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Электрической цепью называется совокупность соединенных между собой источников, потребителей и преобразователей электрической энергии. Под это определение подходят, очевидно, и любые электрические устройства связи. Отличие таких устройств от других электрических систем заключается в их целевом назначении. Например, в электроэнергетических системах электрические цепи предназначены для передачи и преобразования электрической энергии. Электрические же цепи в электросвязи и радиотехнике служат для передачи, приема и обработки информации. Это не означает, однако, что в устройствах связи энергетические соотношения не представляют интереса, поскольку дальность связи зависит от мощности сигналов, которая уменьшается за счет потерь энергии в каналах связи.

Эти потери энергии могут компенсироваться с помощью так называемых усилителей, которые увеличивают мощность сигнала без изменения его формы. Учитывая возможность такой компенсации, для электрических цепей, используемых в устройствах связи, следует признать наиболее существенными не потери энергии, а потери информации. Последние могут оказаться невосполнимыми.

Потери и любые другие нарушения информации обусловлены изменением сигналов в каналах связи, в частности в электрических цепях.

1. Изменения сигналов в цепях. Существует два вида изменений сигналов в электрических цепях. *Изменения сигналов, приводящие к нарушению заключенной в них информации, называют искажениями сигналов.*

Возможны также изменения сигналов, не приводящие к нарушению информации. Их называют преобразованиями сигналов. Примерами преобразования сигналов являются модуляция и усиление сигналов.

При изменении сигналов соответственно изменяются и их спектры. Характер искажений и преобразований сигналов зависит от особенностей изменения спектра сигнала. Главной особенностью этого изменения является возникновение в спектре сигнала гармонических составляющих с новыми частотами или отсутствие новых спектральных составляющих.

Если при изменениях сигнала в его спектре появляются гармонические составляющие с новыми частотами, то соответствующие преобразования и искажения сигнала называют нелинейными. Если же при изменениях сигнала в его спектре не возникают гармонические составляющие с новыми частотами, то такие изменения называют линейными.

Нелинейные искажения по своему характеру аналогичны изменениям сигнала при воздействии на него помех. *Помехами называют любые посторонние колебания в канале связи.* Если частоты помех не совпадают с частотой сигнала, то проявление этих помех получается таким же, как и при нелинейных искажениях сигнала. Колебания же с новыми частотами, появляющиеся при нелинейных искажениях, могут рассматриваться как помехи, возникающие в канале связи.

Рассмотрим, в каких цепях наблюдаются указанные виды искажений и преобразований сигналов. Изменения сигналов в цепях зависят от свойств их параметров. Параметрами цепи являются различные коэффициенты пропорциональности между какими-либо напряжениями в цепи, напряжениями и токами, напряжениями и производными токов и т. д. Все эти многочисленные параметры изучаются в настоящем курсе. Здесь в качестве примера укажем лишь на коэффициент передачи K , являющийся коэффициентом пропорциональности между выходным и входным напряжениями некоторой цепи:

$$u_{\text{вых}} = K u_{\text{вх}}, \quad K = u_{\text{вых}} / u_{\text{вх}}. \quad (1.25)$$

Для ответа на поставленный вопрос следует указать на три возможные свойства коэффициента передачи K :

$$K = K_0 = \text{const}, \quad K = K(t), \quad K = K(u_{\text{вх}}). \quad (1.26)$$

Здесь первое равенство означает, что коэффициент передачи является постоянной величиной, не зависящей от внешних факторов. Второе равенство означает, что коэффициент передачи

цепи является функцией времени t , изменяясь с течением времени по заданному закону $K(t)$. Таким свойством обладает, например, цепь, содержащая угольный микрофон, сопротивление которого изменяется под воздействием колеблющейся мембраны. Третье равенство означает, что коэффициент передачи является функцией приложенного к цепи входного напряжения. Таким свойством обладают, например, цепи, содержащие различные электронные приборы (диод и др.).

Примем, что входное напряжение изменяется по гармоническому закону, и зададимся законами изменения коэффициента передачи (1.26):

$$u_{вх} = U_{мвх} \cos \omega_0 t, \quad K(t) = K_0 + \Delta K \cos \omega_1 t, \quad K(u_{вх}) = K_0 + a u_{вх}, \quad (1.27)$$

где $\Delta K < K_0$ — максимальное приращение коэффициента K ; a — размерный коэффициент пропорциональности.

Подставив в соотношение (1.25) значение напряжения (1.27) и постоянный коэффициент (1.26), получим выходное напряжение

$$u_{вых} = K_0 U_{мвх} \cos \omega_0 t = U_{мвых} \cos \omega_0 t, \quad U_{мвых} = K_0 U_{мвх}. \quad (1.28)$$

Это напряжение изменяется по гармоническому закону с амплитудой $U_{мвых}$. Частота ω_0 гармонических колебаний (1.28) и (1.27) одинакова. Следовательно, в цепи не возникли гармонические колебания с новыми частотами и изменение сигнала в такой цепи является линейным.

Подставим теперь в (1.25) первые два соотношения (1.27):

$$u_{вых} = K_0 U_{мвх} \cos \omega_0 t + \Delta K U_{мвх} \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t.$$

Заменяв здесь произведение косинусов полусуммой косинусов соответствующих аргументов, получим

$$u_{вых} = U_{m0} \cos \omega_0 t + U_m \cos(\omega_0 - \omega_1)t + U_m \cos(\omega_0 + \omega_1)t, \quad (1.29)$$

где $U_{m0} = K_0 U_{мвх}$, $U_m = \Delta K U_{мвх} / 2$ — амплитуды соответствующих гармонических колебаний.

В спектре выходного сигнала (1.29) появились гармонические составляющие с новыми частотами $\omega_0 \pm \omega_1$, которые отсутствовали в сигнале (1.27). Таким образом, в цепи с переменным коэффициентом передачи сигнал претерпевает нелинейные изменения. Если изменение $K(t)$ обусловлено какими-либо нежелательными (паразитными) воздействиями на цепь, то указанные изменения сигнала являются нелинейными искажениями.

Однако эти изменения могут производиться целенаправленно, относясь в этом случае к нелинейным преобразованиям сигнала. Например, при радиоприеме возникает необходимость в преобразовании частоты ω_0 принятого сигнала. Это можно осуществить с помощью вспомогательных колебаний, получаемых в радиоприемнике от специального генератора (гетеродина), что и

делается в так называемых супергетеродинных приемниках. Вспомогательные колебания с частотой ω_r можно использовать для соответствующего управления коэффициентом передачи специального электронного блока в преобразователе частоты радиоприемника. Тогда согласно соотношению (1.29) при $\omega_1 = \omega_r$ в преобразователе частоты будут получены колебания с так называемой промежуточной частотой $\omega_{пр} = \omega_0 - \omega_r$. Получение этой преобразованной частоты является целью рассмотренного нелинейного преобразования сигнала. При этом не только колебания с частотой $\omega_0 + \omega_r$, но и сам сигнал с частотой ω_0 , которые входят в спектр сигнала (1.29), являются помехами. Эти помехи должны быть подавлены, что можно сделать, например, с помощью так называемых резонансных цепей, изучаемых в настоящем курсе. Получение новой частоты $\omega_{пр}$ с помощью переменного параметра $K(t)$ называется параметрическим преобразованием частоты.

Возможно и другое применение рассмотренного параметрического преобразования сигнала. Если коэффициент передачи изменяется с частотой $\omega_1 = \Omega$, то выражение (1.29) описывает в новых обозначениях АМ-сигнал (1.21). Таким образом, в рассматриваемой цепи с переменным параметром $K(t)$ при воздействии гармонического напряжения (1.27) образуется АМ-сигнал. Это указывает на один из возможных способов осуществления амплитудной модуляции, которая называется при этом параметрической модуляцией.

Рассмотрим теперь последний случай, когда коэффициент передачи цепи зависит от значения проходящего через него тока. Подставив в (1.25) значения $u_{вх}$ и $K(u_{вх})$ из соотношений (1.27), получим

$$u_{вых} = K_0 U_{mвх} \cos \omega_0 t + a U_{mвх}^2 \cos^2 \omega_0 t. \quad (1.30)$$

Воспользовавшись формулой для косинуса половинного угла, перепишем это выражение в виде

$$u_{вых} = U + U_{m0} \cos \omega_0 t + U_m \cos 2\omega_0 t, \quad (1.31)$$

где $U = a U_{mвх}^2 / 2$ — постоянное напряжение; $U_{m0} = K_0 U_{mвх}$, $U_m = a U_{mвх}^2 / 2$ — амплитуды соответствующих гармонических колебаний.

Таким образом, выражение (1.31) описывает в спектральной форме сигнал (1.30), содержащий постоянную составляющую с нулевой частотой $\omega = 0$ и два гармонических колебания с частотами ω_0 , $2\omega_0$. Следовательно, при рассмотренном изменении сигнала появились спектральные составляющие с новыми частотами $\omega = 0$ и $\omega = 2\omega_0$. По определению это изменение является нелинейным. Если оно возникло из-за нежелательного воздействия напряжения $u_{вх}$ на коэффициент передачи, то такое изменение следует считать нелинейным искажением сигнала.

Рассмотренный эффект может быть использован и для целенаправленного нелинейного преобразования сигнала. Во-первых,

появление постоянной составляющей сигнала может быть использовано для преобразования переменного напряжения в постоянное, которое применяется, например, в выпрямителях, используемых в цепях питания связанных устройств. Во-вторых, возникновение спектральной составляющей с частотой $2\omega_0$ может быть использовано для удвоения частоты ω_0 исходного сигнала.

В общем случае зависимость $K(u_{вх})$ может отличаться от функциональной зависимости, заданной соотношением (1.27). Однако эффект выпрямления при этом сохраняется.

Что касается возникновения новых гармонических спектральных составляющих, то в общем случае существование функциональной зависимости $K(u_{вх})$ приводит к появлению таких составляющих не только с удвоенной частотой $2\omega_0$, но и с частотами $3\omega_0$, $4\omega_0$ и т. д. Спектральные составляющие сигнала, имеющие кратные частоты $k\omega_0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), называют гармониками этого сигнала — первой, второй, третьей и т. д. Возможность получения высших гармоник сигнала при $k = 2, 3, 4, \dots$ используется в так называемых умножителях частоты.

2. **Линейные и нелинейные цепи.** По своим свойствам все электрические цепи подразделяют на два класса — линейные и нелинейные. *Линейными называют цепи, параметры которых не зависят от значений напряжения и тока.* Параметры же нелинейных цепей зависят от значений напряжений и (или) токов в цепи. Например, цепи, характеризуемые первыми двумя параметрами (1.26), являются по определению линейными. Цепь же с коэффициентом передачи $K(u_{вх})$ нелинейная.

Указанное свойство линейных цепей означает, что в них может происходить линейное сложение, или суперпозиция нескольких сигналов без изменения свойств цепи. Поэтому *линейные цепи можно определить как цепи, для которых справедлив принцип суперпозиции.* Этот принцип означает, в частности, что в линейных цепях любой сигнал можно рассматривать как результат суперпозиции его спектральных составляющих, поскольку такой суперпозиции подчиняются все напряжения и токи в линейной цепи.

Действительно, пусть в линейной цепи входное напряжение состоит из спектральных составляющих u_1 и u_2 , так что $u_{вх} = u_1 + u_2$. При этом в соответствии с определением (1.25) спектральным составляющим входного напряжения $u_{вх}$ соответствуют спектральные составляющие выходного напряжения $u_{вых1} = Ku_1$ и $u_{вых2} = Ku_2$, которые при их суперпозиции дают напряжение (1.25): $u_{вых} = u_{вых1} + u_{вых2} = Ku_1 + Ku_2 = K(u_1 + u_2) = Ku_{вх}$. Этот вывод справедлив как при $K = K_0$, так и при $K = K(t)$, что и подтверждает справедливость принципа суперпозиции для любых линейных цепей.

Рассмотренные напряжения u_1 и u_2 могут представлять собой не только спектральные составляющие сигнала, но и любые сигналы, которые будем называть входными воздействиями. При этом напряжения $u_{вых1}$ и $u_{вых2}$ можно рассматривать как реакции

цепи на входные воздействия. В общем случае входными воздействиями и реакциями на них могут быть любые напряжения и токи в цепи. Тогда *принцип суперпозиции можно сформулировать в виде закона суперпозиции для линейных цепей: реакция цепи на сумму входных воздействий равна сумме реакций цепи на каждое отдельное входное воздействие.*

К нелинейным цепям закон суперпозиции неприменим. Это означает, в частности, что в таких цепях сигнал не может представляться линейной суммой его спектральных составляющих.

3. Линейные и параметрические цепи. Определение линейных и нелинейных цепей не соответствует определению линейных и нелинейных изменений сигналов. Действительно, как было показано, в линейной цепи с переменным коэффициентом передачи $K(t)$, не зависящим от ее входного напряжения, наблюдаются нелинейные изменения сигналов.

В соответствии с различными свойствами линейных цепей их подразделяют на два подкласса: 1) линейные цепи с постоянными параметрами; 2) линейные цепи с переменными параметрами. Последние называют также параметрическими цепями. В этом случае для цепей первого подкласса можно не оговаривать постоянство их параметров. Поэтому в дальнейшем *линейные цепи с постоянными параметрами будем называть сокращенно линейными цепями.*

Линейным цепям можно дать два определения, отличающих их от параметрических цепей. Во-первых, *линейными цепями можно называть цепи, в которых сигналы претерпевают линейные изменения.* Во-вторых, *линейные цепи можно определить как цепи, не изменяющие формы и частоты гармонических колебаний.* Оба эти адекватные определения являются перефразировкой результатов, полученных в § 1.4.1 при рассмотрении изменений сигналов в различных цепях.

Как отмечалось, возможно существование спектров, состоящих не из гармонических колебаний, а из спектральных составляющих другой заданной формы, например из прямоугольных колебаний. Из последнего определения линейных цепей вытекает особая важность спектров в виде совокупности гармонических спектральных составляющих. Неизменность их формы и частоты в линейных цепях можно рассматривать как своеобразное проявление физической реальности таких спектров.

4. Искажения сигналов в линейных цепях. Гармонические спектральные составляющие (1.20) любого сигнала не изменяются по форме и частоте в линейных цепях. Однако эти составляющие могут изменяться в линейных цепях по амплитуде и начальной фазе. Именно эти изменения обуславливают линейные искажения сложных сигналов в линейных цепях. Если, например, в сигнале, показанном на рис. 1.8, изменить амплитуды спектральных составляющих u_1 и u_2 , как показано на рис. 1.10, то получится искаженный сигнал u . Аналогично изменение начальной

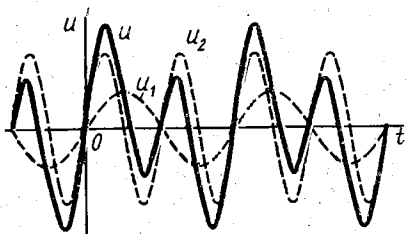


Рис. 1.10. Частотные искажения сигнала, показанного на рис. 1.8

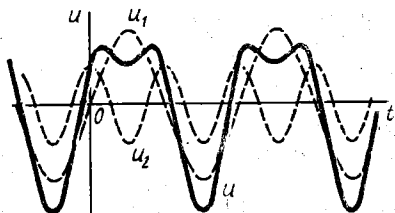


Рис. 1.11. Фазовые искажения сигнала, показанного на рис. 1.8

от частоты. Величина искажений зависит от частотных свойств цепи, т. е. от степени изменения ее параметров на разных частотах. Поэтому изучение частотных свойств цепей, отображаемых специальными характеристиками, является важной задачей курса ТЛЭЦ.

5. Полоса пропускания цепи. Частотные и фазовые искажения могут иметь такую величину, что получающиеся при этом нарушения информации не сказываются существенно на ее восприятии. Например, частотные искажения речевых сигналов в телефонном канале связи могут быть настолько малы, что это приведет лишь к незначительному изменению тембра голоса, не препятствующему распознаванию абонента по голосу. Поэтому для любых систем связи определены нормы допустимых искажений сигналов, при которых качество воспроизведения информации получается достаточно высоким.

Степень частотных и фазовых искажений практически тем больше, чем шире спектр сигнала, поскольку в большем диапазоне частот параметры цепей изменяются сильнее. Поэтому существует предельно допустимая полоса частот, в которой должна находиться спектр сигнала, чтобы искажения сигнала в цепи не превышали допустимую норму. Эта полоса частот называется полосой пропускания электрической цепи или канала связи:

Полоса пропускания устанавливается с учетом ширины спектра сигнала, определяемой по формуле (1.22) или (1.23). Например, для стандартного телефонного канала связи установлена полоса пропускания от 300 Гц до 3,4 кГц.

фазы хотя бы одной спектральной составляющей (см. рис. 1.8) приводит к искажению сигнала u , показанному на рис. 1.11.

Искажения сигналов, обусловленные изменением амплитуд спектральных составляющих разных частот, называются амплитудно-частотными, или частотными, искажениями. Искажения сигналов, обусловленные изменением начальных фаз спектральных составляющих разных частот, называются фазо-частотными, или фазовыми, искажениями.

Частотные и фазовые искажения сигналов в линейных цепях являются практически неизбежными. Они происходят потому, что некоторые параметры линейных цепей зависят

6. Цепи с распределенными и сосредоточенными параметрами.

Существует разделение цепей на два класса еще по одному признаку. Если в цепи происходят волновые процессы $u(t, l)$, то она называется волновой цепью или цепью с распределенными параметрами. Такое название обусловлено тем, что в этом случае надо учитывать параметры цепи, как бы распределенные вдоль пространственной координаты l . Остальные же цепи, в которых сигналы $u(t)$ изменяются только во времени, называются цепями с сосредоточенными параметрами. Такое название имеет не только формальный, но и определенный физический смысл. Переменные напряжения и токи в цепях взаимобусловлены и взаимосвязаны с электрическими и магнитными полями, окружающими электрическую цепь (вспомните, например, явление электромагнитной индукции). Эти переменные поля образуют электромагнитную волну. При этом напряжения и токи в цепях с распределенными параметрами изменяются вдоль цепи согласованно с изменением электромагнитной волны в пространстве. Цепи же с сосредоточенными параметрами имеют столь малые относительные размеры, что они как бы сосредоточены в одной точке электромагнитного поля, в которой это поле изменяется практически только во времени. В теории цепей сначала изучают цепи с сосредоточенными параметрами. Полученные при этом результаты используют и при изучении цепей с распределенными параметрами.

Вопросы для самоконтроля

1.1. Какие природные явления связаны с прохождением электрических токов и возникновением электрических потенциалов?

1.2. В каких технических устройствах может наблюдаться электрический ток, проходящий через вакуум, газовую среду, жидкость, твердотельный полупроводник и твердотельный проводник?

1.3. Как изменяются потенциалы различных точек электрической цепи, если заземление цепи перенести в точку, где первоначально потенциал был равен -5 В?

1.4. Как изменяются напряжения между различными точками электрической цепи, если заземление цепи перенести в точку, где первоначально потенциал был равен 10 В?

1.5. В каких двух случаях мгновенные значения напряжения и тока между двумя заданными точками электрической цепи имеют разные знаки?

1.6. Какой физический смысл имеют положительный и отрицательный знаки мгновенной мощности?

1.7. Какие неэлектрические сигналы существуют в природе?

1.8. Какие электрические сигналы существуют в природе?

1.9. Какую информацию заключали в себе сигналы первого искусственного спутника Земли?

1.10. Какие природные процессы можно считать практически гармоническими колебаниями?

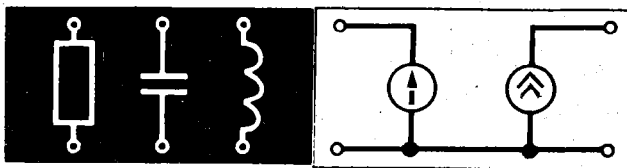
1.11. На какую величину изменяется фаза гармонических колебаний за один период и за одну секунду?

1.12. Какие модулированные сигналы существуют в природе?

1.13. Являются ли модулированными речевые сигналы?

1.14. Почему частота модуляции не может превышать частоту несущего сигнала?

- 1.15. Как можно получить ФМ-сигнал, показанный на рис. 1.5, а?
- 1.16. В каких природных явлениях проявляется спектральный состав сложных сигналов?
- 1.17. Какими свойствами спектрального анализатора обладают маятник и стеклянная призма?
- 1.18. Сколько гармонических спектральных составляющих содержат сигналы $u(t) = 10\cos 10^6\pi t + 20\sin 10^6\pi t$ и $u(t) = 4\cos^3(100\pi t + \pi/4)$?
- 1.19. Какие волновые процессы существуют в природе и какие сигналы в электросвязи являются волновыми процессами?
- 1.20. По каким двум свойствам различаются линейные и нелинейные электрические цепи?
- 1.21. По каким трем свойствам различаются линейные и параметрические цепи?
- 1.22. Какие линейные цепи и почему не изучаются в курсе ТЛЭЦ?
- 1.23. Может ли при частотных искажениях сигнала измениться частота гармонических колебаний?
- 1.24. В каких случаях может измениться частота сигнала в линейной цепи с постоянными параметрами?
- 1.25. Почему возможно применение телефонных каналов связи с полосой пропускания, начинающейся с 300 Гц, хотя речевые сигналы содержат спектральные составляющие и с меньшими частотами?
-



Основы общей теории электрических цепей

В общей теории электрических цепей изучаются такие их свойства, которые являются общими для любых цепей — линейных, параметрических и нелинейных. Все положения общей теории рассматриваются применительно к цепям с сосредоточенными параметрами. Однако эти положения могут быть использованы и при изучении цепей с распределенными параметрами.

В общей теории цепей не рассматривается физическая природа и конструкция источников, потребителей и преобразователей электрической энергии, т. е. реальных элементов, из которых составляется электрическая цепь. Все они заменяются абстрактными элементами с определенными свойствами.

На эти свойства накладываются те или иные ограничения, т. е. свойства абстрактных элементов идеализируются. Такие элементы называются идеальными. При этом любой реальный элемент может быть отображен его эквивалентной схемой, которая представляет собой электрическую цепь, составленную из идеальных элементов и обладающую свойствами этого реального элемента. Соответственно любое сколь угодно сложное устройство связи, составленное из некоторых реальных элементов, может описываться его эквивалентной схемой, состоящей из идеальных элементов. Если же схема описывает соединения реальных элементов в некотором устройстве связи, то она называется принципиальной схемой этого устройства. Отдельные части (блоки) сложного устройства связи могут выполнять некоторые стандартные функции — усиление, модуляцию, подавление помех и т. д. Такие функциональные блоки могут отображаться на принципиальной схеме, а некоторым условным знаком, например квадратом. Если схема описывает соединения функциональных блоков в некотором устройстве связи, то она называется функциональной или структурной схемой этого устройства (блок-схемой).

§ 2.1. ИДЕАЛЬНЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Элементы, не являющиеся источниками электрической энергии, удовлетворяют условию неотрицательности полной энергии (1.5) ($w \geq 0$) и называются пассивными

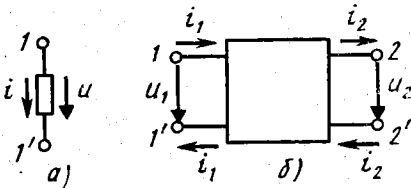


Рис. 2.1. Обозначения пассивных элементов цепи

элементами. Их общее обозначение показано на рис. 2.1. Элемент называется двухполюсником, если он подключается к электрической цепи двумя зажимами 1, 1' (рис. 2.1, а). Элемент четырехполюсник подключается к цепи двумя входными зажимами 1, 1' и двумя выходными зажимами 2, 2' (рис. 2.1, б). Понятия двухполюсника и четырехполюсника распространяются на произвольные цепи с любым количеством элементов. При этом для

них сохраняются общие обозначения (рис. 2.1).

Соответственно классификации цепей пассивные элементы также делятся на линейные, параметрические и нелинейные. По своим энергетическим свойствам идеальные пассивные элементы подразделяются на три вида — диссипативные, реактивные и трансформирующие.

1. Диссипативный элемент. Идеальным диссипативным элементом (от лат. *dissipatio* — рассеяние) называется элемент, полностью рассеивающий энергию. В нем электрическая энергия расходуется необратимо, переходя в другие виды энергии.

Такому определению удовлетворяет элемент, свойства которого описываются законом Ома. Этот закон может быть записан в двух формах:

$$u = Ri, \quad i = Gu. \quad (2.1)$$

Здесь R — сопротивление диссипативного элемента, G — его проводимость. Эти параметры диссипативного элемента измеряются соответственно в омах и сименсах.

1 Ом (1 См) — это сопротивление (проводимость) такого диссипативного элемента, на котором получается напряжение в 1 В при прохождении через него постоянного тока в 1 А. Размерность сопротивления [$L^2MT^{-3}I^{-2}$], размерность проводимости [$L^{-2}M^{-1}I^2$].

Соответственно наименованию параметров диссипативный элемент называют еще сопротивлением или проводимостью, а также резистивным элементом (от лат. *resisto* — сопротивляюсь). В ряде случаев для него используют названия «активное сопротивление» и «активная проводимость», хотя он не относится к активным элементам, которые рассматриваются в § 2.2. Так же называют параметры R , G , но лучше называть их диссипативным сопротивлением и диссипативной проводимостью.

Если сопротивление является линейным, то $R = \text{const}$ и закон Ома (2.1) справедлив при постоянных и переменных напряжениях и токах, когда $u = U$, $i = I$ или $u = u(t)$, $i = i(t)$. Обозначения линейного диссипативного элемента показаны на рис. 2.2. Такой элемент имеет линейную вольт-амперную характеристику $u(i)$, показанную на рис. 2.3, а, почему он и назван линейным. Параметры этого элемента определяются углом наклона указанной характеристики:

$$R = 1/G = \text{tg} \alpha. \quad (2.2)$$

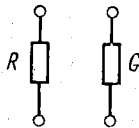


Рис. 2.2. Обозначения линейного диссипативного элемента

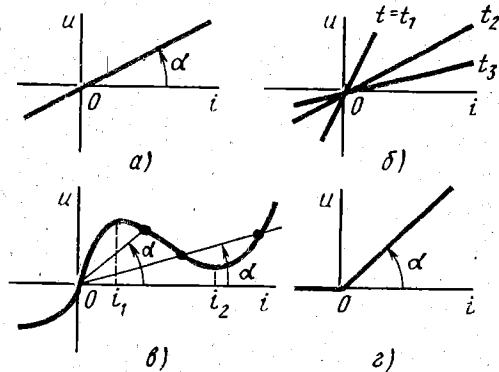


Рис. 2.3. Вольт-амперные характеристики диссипативных элементов

В устройствах связи применяют физические элементы, близкие по своим свойствам к линейным диссипативным элементам. Такие реальные элементы называются резисторами.

Параметрический диссипативный элемент характеризуется переменными параметрами $R = R(t)$, $G = G(t)$. Являясь линейным элементом с переменными параметрами, он тоже имеет линейную вольт-амперную характеристику. Однако наклон такой параметрической характеристики меняется с течением времени (рис. 2.3, б). Для параметрического сопротивления в соотношениях (2.1) постоянным может быть либо ток $i = I$, либо напряжение $u = U$. В общем случае напряжение и ток в таком элементе являются переменными.

Для нелинейных диссипативных элементов $R = R(i)$ или $G = G(u)$. Эти элементы характеризуются нелинейными вольт-амперными характеристиками, примеры которых приведены на рис. 2.3, в, г. Для нелинейных сопротивлений закон Ома (2.1) справедлив только в случае постоянных напряжений и токов: $u = U$, $i = I$. При этом формула (2.2) определяет так называемые статические параметры элемента — статическое сопротивление и статическую проводимость, которые различны в разных точках вольт-амперной характеристики (рис. 2.3, в). В случае переменных напряжений и токов закон Ома (2.1) для нелинейных сопротивлений должен быть переписан в дифференциальной форме, которая определяет динамическое сопротивление и динамическую проводимость:

$$R_d = \frac{du}{di}, \quad G_d = \frac{di}{du}. \quad (2.3)$$

Эти же величины называются соответственно дифференциальным сопротивлением и дифференциальной проводимостью, если они измеряются при бесконечно медленном изменении напряжения и тока.

Динамические параметры (2.3) также являются функциями тока или напряжения: $R_d = R_d(i)$, $G_d = G_d(u)$. Эти параметры определяют крутизну вольт-амперной характеристики в ее различных точках. Нелинейное сопротивление может работать в линейном режиме. Например, при вольт-амперной характеристике, показанной на рис. 2.3, г, линейный режим получается в случае униполярного напряжения $u(t) > 0$. При этом сопротивление $R_d = R$ определяется из соотношения (2.2).

Из соотношений (1.6) и (2.1) может быть определена мощность, затрачиваемая в диссипативном элементе:

$$p = p_a = Ri^2 = Gu^2. \quad (2.4)$$

При постоянных напряжениях и токах эта мощность является активной мощностью (1.7). При переменных напряжениях и токах мощность (2.4) называется мгновенной активной мощностью. Эта мощность не может быть отрицательной при $R > 0$ ($G > 0$). Другими словами, в рассматриваемом элементе электрическая энергия рассеивается в любой момент времени, когда $i \neq 0$ ($u \neq 0$). Мгновенная активная мощность, так же как и мощность (1.7), измеряется в ваттах.

Определяя мгновенную активную мощность, расходуемую при прохождении переменного тока через нелинейный элемент, в равенствах (2.4) необходимо использовать динамические параметры $R = R_d$, $G = G_d$. Однако эти параметры могут быть отрицательными, как, например, в случае вольт-амперной характеристики, показанной на рис. 2.3, в, при $i_1 < i < i_2$. При этом мгновенная мощность (2.4) получается отрицательной, т. е. нелинейное сопротивление перестает быть пассивным элементом и становится источником электрической энергии.

2. Емкостный элемент. В отличие от диссипативных элементов идеальные реактивные элементы не рассеивают, а запасают, накапливают электрическую энергию и могут возвращать ее обратно в цепь. Мощность (1.6) для таких элементов называется мгновенной реактивной мощностью. В отличие от активной мощности, которая измеряется в ваттах, реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных (ВАр).

Реактивные элементы бывают двух видов — емкостные и индуктивные. Обозначение идеального линейного емкостного элемента показано на рис. 2.4, а.

Идеальный емкостный элемент, или емкость, накапливает энергию в электрическом поле. Поэтому такой элемент называют также электрическим или емкостным накопителем энергии. Реальным элементом, близким по своим свойствам к емкостному элементу, является, например, конденсатор.

Свойства емкостного элемента обусловлены возможностью накопления в нем электрического заряда q , пропорционального напряжению u на элементе:

$$q = Cu. \quad (2.5)$$

Коэффициент пропорциональности C называется емкостью и измеряется в фарадах (Φ).

Один фарад (1 Φ) — емкость элемента, на котором при заряде в 1 Кл получается напряжение, равное 1 В. Размерность емкости [$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$].

Из соотношений (1.2) и (2.5) определяется связь между током и напряжением для линейной емкости $C = q/u = \text{const}$:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt. \quad (2.6)$$

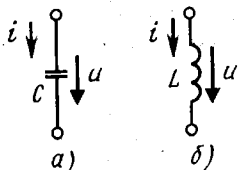


Рис. 2.4. Обозначения линейных реактивных элементов

Для параметрической емкости $C = C(t)$ и нелинейной емкости $C = C(u)$ соответствующая связь получается более сложной. При этом

для величины $C(u)$, аналогично динамическим параметрам (2.3), используют понятие динамической емкости $C_d = \frac{dq}{du}$, не равной в общем случае статической емкости $C = q/u$. Динамическая емкость определяет крутизну кулон-вольтной характеристики $q(u)$ и при бесконечно медленном изменении напряжения называется дифференциальной емкостью.

Из (2.6) видно, что ток через емкость равен нулю при $u = \text{const}$ и отличен от нуля только при изменяющемся напряжении. Такое свойство емкостного элемента легко понять, вспомнив, как проходит ток через конденсатор. Когда заряды натекают на одну из пластин конденсатора, в силу электростатической индукции столько же зарядов оттекает от другой его пластины. Это и означает прохождение тока через конденсатор. Если же заряды на пластинах конденсатора не меняются, то потенциалы пластин $v_1 = \text{const}$ и $v_2 = \text{const}$, т. е. напряжение на конденсаторе $u = v_1 - v_2$ также не меняется. Неизменность же зарядов означает отсутствие тока (1.2).

Описанное свойство конденсатора как раз и отображается соотношениями (2.6) применительно к идеальному емкостному элементу. Из этих соотношений видно также, что в зависимости от знака производной положительному напряжению на емкости может соответствовать как положительный, так и отрицательный ток. Наоборот, при отрицательном напряжении ток через емкость может быть и отрицательным и положительным. Описанные положения проиллюстрированы на рис. 2.5.

Накопленная в емкости энергия определяется первым интегралом в равенствах (1.5). Подставив сюда значение $dq = Cdu$ из соотношения (2.5), для линейной емкости, получаем

$$w = Cu^2/2. \quad (2.7)$$

Энергия электрического поля (2.7) возрастает, т. е. происходит зарядка емкостного накопителя, при увеличении напряжения по модулю. При этом мгновенная реактивная мощность (1.6) получается положительной, как видно из рис. 2.5. При разрядке емкостного накопителя энергия (2.7) убывает, напряжение уменьшается по модулю, а мгновенная реактивная мощность (1.6) получается отрицательной (рис. 2.5).

3. Индуктивный элемент. Индуктивным элементом или индуктивностью называется идеальный реактивный элемент, накапливающий электрическую энергию в магнитном поле. Этот элемент называется также магнитным или индуктивным накопите-

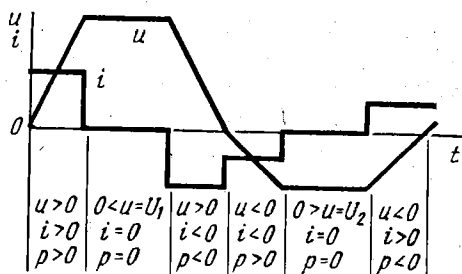


Рис. 2.5. Изменения напряжения и тока в емкостном элементе

лем энергии. Реальным элементом, свойства которого близки к такому накопителю, является, например, катушка индуктивности. Обозначение идеального линейного индуктивного элемента показано на рис. 2.4, б.

Свойства индуктивного элемента определяются возможностью образования в нем магнитного потока Φ при прохождении через него тока. Напомним, что магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

1 Вб — магнитный поток, создаваемый однородным магнитным полем с единичной магнитной индукцией через площадку в 1 м^2 , нормальную к направлению поля. Размерность магнитного потока $[L^2MT^{-2}I^{-1}]$.

В свою очередь, единицей магнитной индукции является тесла (Тл).

1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток в 1 А. Размерность магнитной индукции $[MT^{-2}I^{-1}]$.

Представим индуктивный элемент в виде одного витка провода, пронизываемого переменным магнитным потоком $\Phi(t)$. Тогда по закону электромагнитной индукции в этом витке возникнет электродвижущая сила (э. д. с.) самоиндукции $e_s(t)$, которая уравновесит приложенное к витку напряжение $u_b(t)$:

$$-e_s(t) = u_b(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (2.8)$$

Согласно этому равенству можно дать другое определение единиц магнитного потока и магнитной индукции.

1 Вб — магнитный поток, который, пронизывая один виток провода, индуцирует в нем э. д. с. в 1 В при равномерном убывании до нуля за 1 с. 1 Тл — магнитная индукция однородного магнитного поля, в котором магнитный поток в 1 Вб пронизывает площадку в 1 м^2 , нормальную к направлению поля.

Если представить индуктивный элемент в виде катушки из N витков, то полная э. д. с. самоиндукции $e_L(t)$ изменится в N раз. При этом из соотношения (2.8) находим напряжение $u(t)$ на катушке:

$$u(t) = -e_L(t) = N \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (2.9)$$

Здесь величина

$$\Psi(t) = N\Phi(t) = Li(t), \quad (2.10)$$

пропорциональная магнитному потоку, называется потокоцеплением и измеряется также в веберах. Поскольку магнитный поток $\Phi(t)$ возбуждается током $i(t)$, потокоцепление $\Psi(t)$ пропорционально этому току, что отображено последним равенством (2.10).

Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью и измеряется в генри (Гн).

1 Гн — индуктивность элемента, который создает магнитный поток в 1 Вб при прохождении через него тока в 1 А. Размерность индуктивности $[L^2MT^{-2}I^{-2}]$.

Аналогично рассмотренному определяют напряжение и на произвольном индуктивном элементе. Для линейной индуктивности $L = \Psi/i = \text{const}$ из соотношений (2.10), (2.9) получаем

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt. \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.9), (2.10) определяют также функциональную зависимость $u(t)$ для параметрической индуктивности $L(t)$ и нелинейной индуктивности $L(i)$. При этом для величины $L(i)$ наряду с понятием статической индуктивности $L = \Psi/i$ пользуются также понятием динамической индуктивности $L_d = \frac{d\Psi}{di} \neq L$.

Эта индуктивность определяет крутизну вебер-амперной характеристики $\Psi(i)$ и называется дифференциальной индуктивностью, если ток изменяется бесконечно медленно.

Энергию, накапливаемую в линейном индуктивном элементе, можно определить, подставив значение напряжения (2.11) во второй интеграл (1.5):

$$w = Lt^2/2. \quad (2.12)$$

Как следует из соотношений (2.12), (2.11) и (1.6), эта энергия магнитного поля возрастает при увеличении модуля тока, когда мгновенная реактивная мощность положительна. При отрицательной мгновенной реактивной мощности (1.6) модуль тока уменьшается и энергия (2.12) убывает. При возрастании и убывании энергии (2.12) говорят соответственно о зарядке и разрядке индуктивного накопителя энергии.

Соотношения (2.7) и (2.12) получены для линейных реактивных элементов. В параметрических реактивных элементах, когда $C = C(t)$ и $L = L(t)$, накапливаемая и отдаваемая в цепь электрическая энергия зависит также от приращений параметров. При этом в электрическую цепь может отдаваться больше энергии, чем ее запасается от электрических источников питания. Параметрические элементы с такими свойствами сами становятся источниками электрической энергии, т. е. не являются пассивными элементами.

4. Элемент взаимной индукции. Если две катушки индуктивности расположены рядом или намотаны на общем сердечнике, то магнитный поток одной катушки будет частично или полностью пронизывать витки другой катушки. Такие катушки индуктивности с общим (взаимным) магнитным полем называются *связанными (индуктивно связанными)*. При отсутствии потерь связанные катушки образуют идеальный реактивный элемент, называемый элементом взаимной индукции или взаимной индуктивностью. Этот элемент, в отличие от рассмотренных двухполюсных элементов, является четырехполюсником.

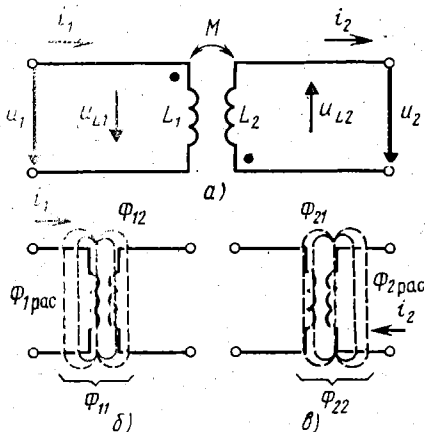


Рис. 2.6. Обозначение элемента взаимной индукции и распределение его магнитных потоков

бранному направлению токов следует выбрать и направления отсчета напряжений u_{L1} , u_{L2} на индуктивностях L_1 , L_2 . При этом $u_1 = u_{L1}$, $u_2 = -u_{L2}$.

На рис. 2.6, б, в показаны схематически магнитные потоки, образуемые током i_1 при $i_2 = 0$ и током i_2 при $i_1 = 0$. Токи каждой катушки образуют магнитные потоки, которые состоят из двух частей:

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{1рас}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2рас}. \quad (2.13)$$

За счет магнитных потоков Φ_{12} и Φ_{21} , являющихся общими для обеих катушек, как раз и образуется связь между ними. Магнитные потоки $\Phi_{1рас}$ и $\Phi_{2рас}$, не являющиеся общими для связанных катушек, называются потоками рассеяния.

Указанные магнитные потоки образуют потокосцепления, пропорциональные числу витков катушки, с которой они сцепляются. С другой стороны, эти потокосцепления пропорциональны вызвавшим их токам:

$$\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11} = L_1 i_1, \quad \Psi_{1рас} = N_1 \Phi_{1рас} = L_{1рас} i_1, \quad \Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = M_{12} i_1, \quad (2.14)$$

$$\Psi_{22} = N_2 \Phi_{22} = L_2 i_2, \quad \Psi_{2рас} = N_2 \Phi_{2рас} = L_{2рас} i_2, \quad \Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = M_{21} i_2. \quad (2.15)$$

Здесь $L_{1рас}$, $L_{2рас}$ — коэффициенты пропорциональности, которые называются *индуктивностями рассеяния*. Коэффициенты пропорциональности M_{12} и M_{21} равны друг другу в линейной системе и являются *коэффициентом взаимной индукции* (взаимной индуктивностью) M :

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (2.16)$$

Действительно, магнитные потоки прямо пропорциональны магнитодвижущей силе (числу ампер-витков) и обратно пропор-

Обозначение линейного элемента взаимной индукции показано на рис. 2.6, а, где L_1 , L_2 — индуктивности связанных катушек, имеющих в общем случае разное число витков N_1 и N_2 ; M — параметр элемента, который называется коэффициентом взаимной индукции или взаимной индуктивностью. Этот параметр характеризует величину связи между катушками индуктивности.

На рис. 2.6, а положительные направления отсчета входных и выходных напряжений и токов u_1 , u_2 и i_1 , i_2 выбраны в соответствии с общими обозначениями для четырехполюсника (см. рис. 2.1, б). Согласно вы-

циональны магнитному сопротивлению R_{μ} магнитной цепи. Поэтому справедлив закон Ома для магнитной цепи:

$$\Phi_{12} = N_1 i_1 / R_{\mu 12}, \quad \Phi_{21} = N_2 i_2 / R_{\mu 21}.$$

Поскольку для взаимных магнитных потоков магнитная цепь является общей, для линейной магнитной цепи $R_{\mu 12} = R_{\mu 21}$. Поэтому из закона Ома для магнитной цепи и последних равенств (2.14), (2.15) следуют соотношения (2.16).

Подставив значения магнитных потоков из соотношений (2.14), (2.15) в формулы (2.13), с учетом равенств (2.16) найдем связь между параметрами элемента взаимной индукции:

$$L_1 = L_{1\text{рас}} + M/n, \quad L_2 = L_{2\text{рас}} + nM, \quad (2.17)$$

где

$$n = N_2 / N_1. \quad (2.18)$$

Параметр (2.18) называется коэффициентом трансформации. Он является конструктивным параметром элемента взаимной индукции и не отражает трансформирующих свойств этого элемента, которые рассматриваются ниже.

Значения полных магнитных потоков, сцепленных с каждой из катушек, зависят от направления отдельных потоков:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{21}, \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{12}. \quad (2.19)$$

Сложение или вычитание потоков зависит как от направления катушки (обмоток), так и от направления токов в них. Если потоки складываются при втекании токов в некоторые концы обмоток, то эти концы называют одноименными. Если же при этом потоки вычитаются, то соответствующие концы обмоток называют разноименными. При необходимости одноименные концы катушек обозначают на схемах каким-либо одинаковым значком, например точкой, как на рис. 2.6, а.

Если токи, проходящие в заданном положительном направлении, втекают в одноименные концы обмоток, то такое их включение называют согласным, и в равенствах (2.19) берут положительный знак. Если же токи, проходящие в положительном направлении, втекают в разноименные концы обмоток, то такое их включение называют встречным, и в равенствах (2.19) берут отрицательный знак. Например, на рис. 2.6, а показано согласное включение катушек.

Полным магнитным потокам (2.19) соответствуют потоко-сцепления

$$\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21}, \quad \Psi_2 = N_2 \Phi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}. \quad (2.20)$$

Этими потоко-сцеплениями определяются э. д. с. индукции e_{L1} и e_{L2} , которые уравнивают напряжения на индуктивностях L_1, L_2 :

$$-e_{L1}(t) = u_{L1}(t) = \frac{d\Psi_1(t)}{dt}, \quad -e_{L2}(t) = u_{L2}(t) = \frac{d\Psi_2(t)}{dt}. \quad (2.21)$$

Для линейного элемента взаимоиנדукции ($L_1 = \text{const}$, $L_2 = \text{const}$, $M = \text{const}$) из соотношений (2.21), (2.20) и (2.14), (2.15) находим уравнения связи между напряжениями и токами в элементе:

$$u_{L1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}, \quad u_{L2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}. \quad (2.22)$$

Эти уравнения свидетельствуют, в частности, о взаимосвязи между напряжениями и токами на входе и выходе элемента взаимоиנדукции. Будучи взаимосвязанными, напряжения $u_1 = u_{L1}$ и $u_2 = -u_{L2}$ в общем случае отличаются друг от друга. *Изменение напряжений при прохождении сигнала со входа на выход элемента-четырёхполюсника или в обратном направлении называют трансформацией напряжений* (от лат. transformo — преобразую). Аналогично, происходящее при этом изменение токов называют их трансформацией.

Характер и степень трансформации напряжений и токов в элементе взаимоиנדукции зависят не только от параметров этого элемента, но и от многих других факторов. В частности, из уравнений (2.22) видно, что значения напряжений в линейном элементе взаимоиנדукции, а следовательно, и степень их трансформации зависят от скорости изменения токов, т. е. от параметров сигнала.

Нелинейность элемента взаимоиנדукции может проявляться, как отмечалось, в различии параметров M_{12} и M_{21} . Однако и при соблюдении равенств (2.16) элемент взаимоиנדукции является нелинейным, если $M = M(i_1, i_2)$, так же как и $L_1 = L_1(i_1)$, $L_2 = L_2(i_2)$. Если же $L_1 = L_1(t)$, $L_2 = L_2(t)$, $M = M(t)$, то элемент взаимоиנדукции является параметрическим элементом.

Для нелинейных и параметрических элементов взаимоиנדукции уравнения (2.22) являются недействительными. Для таких элементов связь между напряжениями и токами устанавливается из общих соотношений (2.21) с учетом непостоянства параметров L_1 , L_2 , M (или M_{12} , M_{21}).

5. Реактивные сопротивления и проводимости. Реактивные элементы, как и диссипативный элемент, оказывают противодействие проходящему через них току, т. е. обладают некоторым сопротивлением или проводимостью. Однако природа этого сопротивления (проводимости) иная. В отличие от диссипативного сопротивления (диссипативной проводимости) его (e_e) называют *реактивным сопротивлением (реактивной проводимостью)*.

Реактивное сопротивление емкости (*емкостное сопротивление*) обусловлено противодействием (отглаткиванием), которое испытывают притекающие заряды со стороны одноименных зарядов, скопившихся в элементе. Из первой формулы (2.6) видно, что с ростом C и $\left| \frac{du(t)}{dt} \right|$ ток i увеличивается по абсолютному значению. Это означает, что емкостное сопротивление уменьшается, а емкостная проводимость увеличивается с ростом емкости

и скорости изменения напряжения. Такое, свойство емкостных сопротивлений и проводимостей обусловлено тем, что при заданном напряжении u и оговоренных условиях через емкостный элемент должно пройти больше зарядов (2.5) в единицу времени.

Реактивное сопротивление индуктивности (*индуктивное сопротивление*) обусловлено противодействием э. д. с. самоиндукции e_L изменению тока в элементе. Чем быстрее изменяется ток i и чем больше индуктивность L , тем больше по абсолютному значению получается эта противодействующая э. д. с. при заданном токе $i(t)$, как это видно из формул (2.9), (2.10). Другими словами, при оговоренных условиях индуктивное сопротивление возрастает, а индуктивная проводимость уменьшается. Это приводит к соответствующему увеличению падения напряжения на индуктивном элементе (по абсолютному значению), как следует из первой формулы (2.11).

Реактивное сопротивление взаимоиנדуктивности, называемое *сопротивлением взаимоиנדукции*, имеет ту же физическую природу, что и сопротивление индуктивности. При этом необходимо учитывать, что согласно соотношениям (2.21) элемент взаимоиנדукции оказывает сопротивление как входному, так и выходному току. Кроме того, особенностью этого реактивного сопротивления является противодействие току как вследствие его собственного изменения, так и вследствие изменения тока другой катушки. Изменение этого другого тока и создает через взаимное поле противодействующую э. д. с. взаимоиנדукции.

6. Идеальный трансформатор. Как и элемент взаимоиנדукции, идеальный трансформирующий элемент, или идеальный трансформатор (ИТ), является четырехполюсником. Его обозначение показано на рис. 2.7, где n — параметр элемента, называемый коэффициентом трансформации.

В отличие от элемента взаимоиנדукции идеальный трансформатор не накапливает электрическую энергию, а передает ее без потерь от входных к выходным зажимам, трансформируя напряжение в n раз:

$$u_2 = nu_1. \quad (2.23)$$

Энергия на входе и выходе идеального трансформатора получается одинаковой в любой момент времени, если равны соответствующие мгновенные мощности:

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) = u_2(t)i_2(t). \quad (2.24)$$

Из соотношений (2.23), (2.24) следует, что *идеальный трансформатор трансформирует не только напряжения, но и токи:*

$$i_2 = i_1/n. \quad (2.25)$$

Для устройств связи *существенным свойством трансформатора является его*

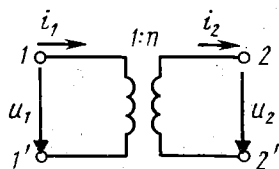


Рис. 2.7. Обозначение идеального трансформатора

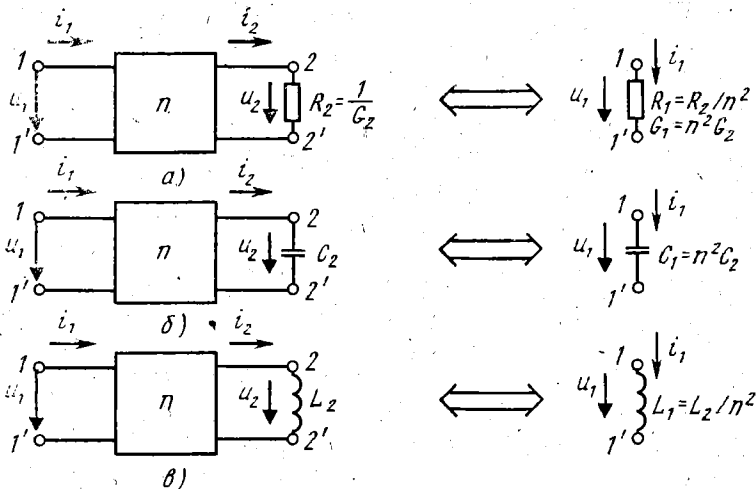


Рис. 2.8. Трансформация элементов идеальным трансформатором

способность изменять (трансформировать) параметры элементов. Пусть на выходе идеального трансформатора подключен один из элементов $R_2 = 1/G_2$, C_2 или L_2 . Это показано на левых схемах рис. 2.8, а—в, где для идеального трансформатора использовано общее обозначение четырехполюсника (см. рис. 2.1, б). Для выходных напряжений и токов указанных схем формулы (2.1), (2.6), (2.11) принимают соответственно вид:

$$u_2 = R_2 i_2 = \frac{1}{G_2} i_2, \quad i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (2.26)$$

Подставив сюда равенства (2.23), (2.25), получаем соотношения между напряжениями и токами на входе идеального трансформатора:

$$n u_1 = \frac{R_2}{n} i_1 = \frac{1}{n G_2} i_1, \quad \frac{1}{n} i_1 = n C_2 \frac{d u_1}{dt}, \quad n u_1 = \frac{L_2}{n} \frac{d i_1}{dt}.$$

Эти соотношения можно переписать в форме равенств (2.26):

$$u_1 = R_1 i_1 = \frac{1}{G_1} i_1, \quad i_1 = C_1 \frac{d u_1}{dt}, \quad u_1 = L_1 \frac{d i_1}{dt},$$

где

$$R_1 = R_2/n^2, \quad G_1 = n^2 G_2, \quad C_1 = n^2 C_2, \quad L_1 = L_2/n^2. \quad (2.27)$$

Таким образом, идеальный трансформатор изменяет, или трансформирует, параметры пассивных элементов в $1/n^2$ или n^2 раз в соответствии с равенствами (2.27). Это означает, что схемы, показанные на рис. 2.8 слева и справа, являются взаимозаменяемыми.

Взаимозаменяемые схемы (цепи) называют эквивалентными. Таким образом, рассмотренные цепи с параметрами (2.27) являются эквивалентными двухполюсниками, при подключении которых к зажимам $1, 1'$ напряжение u и ток i сохраняют свои значения.

Существование этих эквивалентных схем означает, что подобно двухполюснику рассмотренный четырехполюсник обладает со стороны входных зажимов $1, 1'$ некоторым диссипативным или реактивным сопротивлением (проводимостью). Сопротивление (проводимость) четырехполюсника со стороны входных зажимов называют его входным сопротивлением (входной проводимостью).

Таким образом, идеальный трансформатор является также трансформатором диссипативных и реактивных сопротивлений и проводимостей. Согласно формулам (2.27) идеальный трансформатор уменьшает сопротивление и увеличивает проводимость в n^2 раз. При передаче сигнала справа налево происходит обратная трансформация сопротивлений и проводимостей, поскольку параметры элементов R_1, G_1, C_1, L_1 , подключенных к зажимам $1, 1'$, преобразуются в параметры R_2, G_2, C_2, L_2 в соответствии с формулами (2.27).

7. Классификация цепей по видам элементов. Классификация электрических цепей возможна в соответствии с названиями рассмотренных элементов цепи. Если цепь или часть цепи содержит только пассивные элементы, то ее называют *пассивной цепью*. Если пассивная цепь содержит хотя бы один диссипативный элемент, то ее называют *диссипативной цепью* или цепью с потерями. В противном случае цепь называется *реактивной цепью* или цепью без потерь. Цепи, не содержащие реактивных элементов, называют *резистивными цепями*. *Линейная цепь* содержит только линейные элементы. Цепь, содержащая хотя бы один параметрический или нелинейный элемент, является соответственно *параметрической* или *нелинейной цепью*.

§ 2.2. ИДЕАЛЬНЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Активными элементами цепи называют источники электрической энергии, для которых полная энергия (1.5) отрицательна ($w < 0$). *Активная цепь* содержит хотя бы один активный элемент. Именно активные элементы являются источниками сигналов и электрических процессов в цепи. Однако это не означает, что нельзя отдельно рассматривать процессы в пассивных цепях, не содержащих активных элементов. Можно изучать такие процессы и исследовать свойства пассивных цепей, задаваясь напряжением и токами в их элементах, когда несущественно, откуда появился сигнал в цепи.

Как и в случае пассивных элементов, при идеализации активных элементов на них накладывают энергетические ограничения. Первое ограничение заключается в том, что в идеальных активных элементах не происходит ни рассеяния, ни накопления электрической энергии. Второе ограничение состоит в том, что идеальные активные элементы обладают неограниченной мощностью, которую они могут отдавать в электрическую цепь.

Общее обозначение идеальных активных элементов показано на рис. 2.9. На рис. 2.9, а изображен двухполюсный активный элемент, на рис. 2.9, б — трехполюсный, а на рис. 2.9, в — четырехполюсный. Если в четырехполюсном

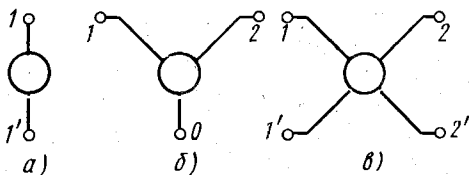


Рис. 2.9. Обозначения активных элементов

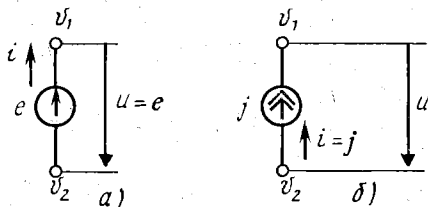


Рис. 2.10. Обозначения идеальных источников напряжения и тока

(э. д. с.) или задающим напряжением и обозначают буквой e . При переменной э. д. с. $e = e(t)$, а при постоянной $e = E = \text{const}$.

Положительное направление отсчета задающего напряжения e обозначают стрелкой, которая показывает направление возрастания потенциала (рис. 2.10, а). Таким образом, на рис. 2.10, а э. д. с. e и напряжение u на зажимах элемента положительные, если $v_1 > v_2$. Поэтому стрелки e и u всегда направлены в противоположные стороны. При этом $u = e$, поскольку и напряжение u и задающее напряжение e отсчитывают между одними и теми же точками.

Для источника напряжения мгновенная мощность (1.6) отрицательна, поскольку напряжение u на его зажимах и ток i имеет разные знаки. Это свидетельствует об отдаче энергии во внешнюю цепь. Если же цепь содержит другие источники энергии, под воздействием которых ток i проходит навстречу э. д. с. e (против стрелки i на рис. 2.10, а), то знаки u и i получаются одинаковыми. В этой ситуации мгновенная мощность (1.6) становится положительной, т. е. источник напряжения теряет свойства активного элемента.

Рассмотрим для примера источник э. д. с. e , к которому подключено нагрузочное сопротивление R (рис. 2.11, а). По определению, напряжение $u = e$ не зависит от сопротивления R . При этом согласно закону Ома (2.1) ток i , проходящий через сопротивление и источник напряжения, получается различным при разных значениях R . Таким образом, задающее напряжение e оказывается не зависимым от тока, проходящего через активный элемент. В этом и проявляется линейность идеального источника напряжения.

Рассмотрим энергетические соотношения в активном элементе

элементе зажимы $1'$ и $2'$ соединены накоротко между собой, то он эквивалентен трехполюсному элементу.

В двухполюсных элементах энергетические ограничения выполняются в двух случаях, соответственно которым различают идеальные источники напряжения и тока. Условное обозначение первых показано на рис. 2.10, а, а вторых — на рис. 2.10, б.

1. Источник напряжения. Идеальным источником напряжения называют активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от параметров цепи, подключенной к элементу. Это напряжение называют электродвижущей силой

на примере той же цепи рис. 2.11, а. В сопротивлении R рассеивается мгновенная активная мощность (2.4). Она равна отдаваемой источником мощности, поскольку напряжения на элементах e и R одинаковы и через них проходит один и тот же ток. Это свидетельствует об отсутствии потерь и накопления энергии в активном элементе. Тем самым удовлетворяется первое ограничение на идеальные активные элементы.

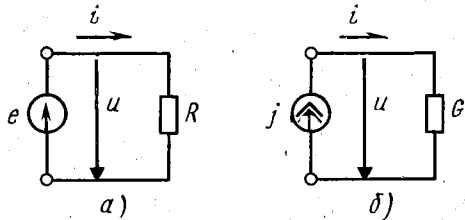


Рис. 2.11. Подключение нагрузки к идеальным источникам напряжения и тока

С другой стороны, мощность, отдаваемая источником в нагрузку, может принимать любые значения при разных R и i . В частности, как следует из закона Ома (2.1), в режиме короткого замыкания, когда $R = 0$ ($G = \infty$), но $u = e \neq 0$, ток i и мощность (1.6) становятся бесконечно большими. Это свидетельствует об удовлетворении второго энергетического требования, предъявляемого к идеальным активным элементам.

Из предыдущего рассуждения вытекает еще одно важное свойство идеальных источников напряжения. При $R = 0$ в цепи, изображенной на рис. 2.11, а, остается один активный элемент. Протекание через него бесконечно большого тока означает, что сам идеальный источник напряжения имеет сопротивление, равное нулю. Это сопротивление источника называют его внутренним сопротивлением и обозначают буквой R_i . Если бы такой источник оказывал сопротивление проходящему току ($R_i \neq 0$), то в цепи рис. 2.11, а не мог появиться бесконечно большой ток даже при $R = 0$.

2. Источник тока. Идеальным источником тока называют активный элемент, ток которого не зависит от параметров цепи, подключенной к его зажимам. Этот ток называют задающим током источника. Будем обозначать его буквой j . Переменный задающий ток $j = j(t)$, а постоянный ток $j = J = \text{const}$.

Независимость задающего тока j от параметров цепи означает, в частности, что токи от других источников, содержащихся в цепи, не могут пройти через идеальный источник тока. В противном случае эти сторонние токи, накладываясь на задающий ток j , изменили бы его значение. Таким образом, внутреннее сопротивление идеального источника тока для любых сторонних токов равно бесконечности ($R_i = \infty$).

Положительное направление отсчета задающего тока обозначают двойной стрелкой, направленной в сторону зажима с большим потенциалом $v_1 > v_2$ (см. рис. 2.10, б). Следовательно, положительный задающий ток повышает потенциал того зажима элемента, к которому он течет. При этом ток $i = j$, проходящий через источник, и напряжение u на его зажимах противоположны по знакам, т. е. мгновенная мощность (1.6) отрицательна,

как это и должно быть в активном элементе. Если под воздействием других источников энергии в цепи напряжение u изменит полярность, то источник тока потеряет свойства активного элемента.

Пусть к идеальному источнику тока подключена нагрузочная проводимость G (рис. 2.11, б). Тогда согласно закону Ома (2.1) при неизменном токе $i = j$ разным проводимостям G будут соответствовать различные значения напряжения u . Таким образом, идеальный источник тока является линейным элементом, поскольку $j \neq j(u)$. При этом в нем не рассеивается и не накапливается энергия. Режиму же холостого хода, когда $G = 0$ и $R = 1/G = \infty$, соответствует напряжение $u = \infty$, т. е. идеальный источник тока отдает бесконечно большую мощность (1.6). Следовательно, оба энергетических требования удовлетворяются в случае идеального источника тока.

Рассмотренные *двухполюсные активные элементы являются независимыми источниками электрической энергии. В них задающие напряжения и токи не зависят от других напряжений и токов в цепи.* Такие элементы используют для построения эквивалентных схем источников сигналов и источников энергетического питания устройств связи. К первым относятся, например, микрофоны, приемные антенны, различные электронные генераторы колебаний и т. д., ко вторым — аккумуляторы, батареи, машинные генераторы постоянного и переменного токов и т. д.

3. Преобразователи мощности. В отличие от двухполюсных элементов (см. рис. 2.9, а) в трех- и четырехполюсных активных элементах (см. рис. 2.9, б, в) выходные напряжения и токи зависят от входных напряжений или токов. Такие активные элементы содержат зависимые источники электрической энергии и называются преобразователями мощности. Преобразом подобных элементов являются электронные усилители.

В идеальных преобразователях мощности, называемых также идеальными активными преобразователями (ИАП), к выходным зажимам $2, 2'$ (см. рис. 2.9, в) или $2, 0$ (см. рис. 2.9, б) подключен зависимый идеальный источник напряжения или тока. На входе же данного идеального преобразователя потребляемая мощность должна равняться нулю. С этой целью входные зажимы $1, 1'$ (или $1, 0$) идеального преобразователя мощности размыкают (режим холостого хода) или замыкают накоротко (режим короткого замыкания).

При указанных ограничениях получается четыре разновидности идеальных преобразователей мощности, показанные на рис. 2.12. Соответственно различают четыре типа зависимых источников: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН, рис. 2.12, а), источник напряжения, управляемый током (ИНУТ, рис. 2.12, б), источник тока, управляемый напряжением (ИТУН, рис. 2.12, в), и источник тока, управляемый током (ИТУТ, рис. 2.12, г). Все эти схемы допускают короткое замыка-

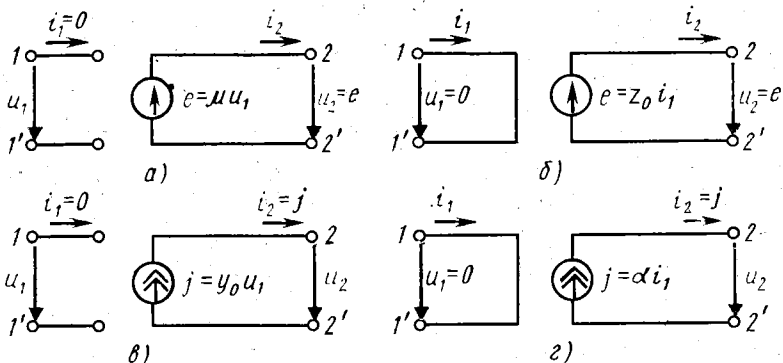


Рис. 2.12. Схемы идеальных преобразователей мощности

ние зажимов 1', 2', при котором они превращаются в трехполюсные схемы (см. рис. 2.9, б).

Здесь μ — безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом усиления по напряжению, α — безразмерный коэффициент усиления по току, а коэффициенты пропорциональности y_0 и z_0 имеют размерности соответственно проводимости и сопротивления. Все эти параметры в линейных преобразователях мощности являются константами. Знаки их могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательное значение параметра означает соответствующее изменение полярности задающего напряжения или направления задающего тока зависимых источников на рис. 2.12. Вместо изменения знака параметров можно изменить направление стрелки, обозначающей положительное направление отсчета задающего напряжения или тока.

ИНУН при $\mu = \mu_0 \rightarrow \infty$ называется операционным усилителем. Реальный операционный усилитель, близкий по своим свойствам к идеальному операционному усилителю, может быть выполнен в виде интегрального блока (от лат. integer — целый). Такой блок представляет собой электронное устройство, все части которого объединены как единое целое в одном полупроводниковом кристалле.

4. Конверторы сопротивлений. Рассмотренные преобразователи мощности являются односторонними, поскольку на их входе мощность равна нулю. Возможны также ИАП в виде двусторонних преобразователей мощности, которые содержат два зависимых источника как на выходе, так и на входе (рис. 2.13). Их можно рассматривать как один идеальный активный элемент цепи, тем более, что они могут быть выполнены в виде одного интегрального блока.

Рассмотрим две разновидности таких преобразователей: ИНУН — ИТУТ (рис. 2.13, а) и ИТУТ — ИНУН (рис. 2.13, б). Они обладают сходными свойствами, пропорционально изменяя

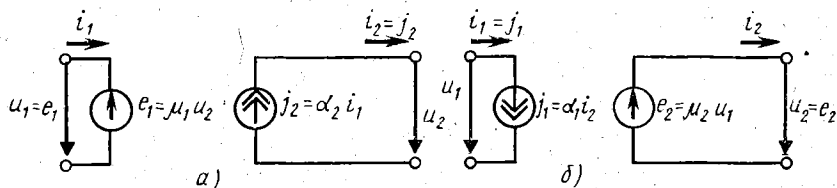


Рис. 2.13. Схемы конверторов сопротивлений

как напряжения, так и токи. Учитывая, что для первой схемы (рис. 2.13, а) $u_1 = e_1$, $i_2 = j_2$, а для второй (рис. 2.13, б) $i_1 = j_1$, $u_2 = e_2$, получаем

$$u_1 = \mu_1 u_2 = u_2 / \mu_2, \quad i_1 = i_2 / \alpha_2 = \alpha_1 i_2. \quad (2.28)$$

Отсюда в соответствии с определением (1.6) находим преобразование мгновенной мощности при передаче сигнала слева направо и справа налево:

$$p_2(t) = \frac{\alpha_2}{\mu_1} p_1(t) = \frac{\mu_2}{\alpha_1} p_1(t), \quad p_1(t) = \frac{\mu_1}{\alpha_2} p_2(t) = \frac{\alpha_1}{\mu_2} p_2(t). \quad (2.29)$$

Такие двусторонние преобразователи мощности называют конверторами сопротивлений (от лат. *converto* — изменяю, превращаю), поскольку они изменяют также значения сопротивлений (*проводимостей*), преобразуя параметры подключенных элементов подобно идеальному трансформатору. Повторяя рассуждения, которые привели к равенствам (2.27), из формул (2.28) и (2.1), (2.6), (2.11) находим соотношения между входными параметрами конверторов сопротивлений и параметрами элементов R_2 , G_2 , C_2 , L_2 , подключенных к их выходным зажимам:

$$R_1 = k_k^2 R_2, \quad G_1 = G_2 / k_k^2, \quad C_1 = C_2 / k_k^2, \quad L_1 = k_k^2 L_2, \quad k_k^2 = \mu_1 \alpha_2 = 1 / \alpha_1 \mu_2, \quad (2.30)$$

где k_k — коэффициент конверсии.

Эти соотношения свидетельствуют об изменении (конверсии) диссипативных и реактивных сопротивлений (проводимостей). При $k_k^2 > 0$ положительные сопротивления преобразуются также в положительные сопротивления. Такие преобразователи мощности называют конверторами положительных сопротивлений (КПС). Для них справедливы схемы эквивалентного перехода, показанные на рис. 2.8, в которых коэффициент трансформации $n = 1/k_k$.

При $k_k^2 < 0$ получаются конверторы отрицательных сопротивлений (КОС). Они преобразуют положительные параметры элементов в отрицательные параметры — в отрицательные сопротивления $R_1 < 0$, проводимости $G_1 < 0$, емкости $C_1 < 0$ и индуктивности $L_1 < 0$.

Если $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_0 < 0$, то КОС не изменяют напряжений, но преобразуют токи, изменяя при этом их знаки. Такое преобразование токов называют их инверсией (от лат.

inverso — переворачиваю, обращаю). При этом КОС называют конверторами по току (КОСТ). Если же $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $\mu_1 = \mu_2 = -\mu_0 < 0$, то получается конвертор отрицательных сопротивлений по напряжению (КОСН), который изменяет сопротивления за счет инверсии напряжений.

Аналогично конверторы положительных сопротивлений могут изменять либо только напряжения (КПСН), либо только токи (КПСТ). При этом знаки измененных напряжений или токов сохраняются. В таких конверторах возможно также одновременное изменение знаков и напряжений и токов при неизменном значении либо токов (в КПСН), либо напряжений (в КПСТ).

Если $\mu_1 = \alpha_2$ и $\alpha_1 = \mu_2$, то согласно формулам (2.29) в конверторах сопротивлений не происходит преобразования мощности, т.е. они обладают свойством (2.24) пассивного идеального трансформатора. Поэтому будем называть их пассивными конверторами сопротивлений (ПКС) или активными идеальными трансформаторами положительных сопротивлений (АИТПС). Из соотношений (2.27) и (2.30) следует, что АИТПС эквивалентен пассивному идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации $n = 1/\mu_1 = 1/\alpha_2$ или $n = \alpha_1 = \mu_2$. При $\alpha_2/\mu_1 = \mu_2/\alpha_1 = -1$ в отличие от АИТПС получается активный идеальный трансформатор отрицательных сопротивлений (АИТОС), у которых $p_2(t) = -p_1(t)$ и $R_1 = -\mu_1^2 R_2 = -R_2/\mu_2^2$. В частности, при $\mu_1 \alpha_2 = \alpha_1 \mu_2 = -1$ АИТОС изменяет сопротивление только по знаку ($R_1 = -R_2$).

5. Инверторы сопротивлений. Возможны ИАП в виде двусторонних преобразователей мощности с одноименными зависимыми источниками либо напряжения, либо тока: ИНУТ — ИНУТ (рис. 2.14, а) и ИТУН — ИТУН (рис. 2.14, б). Они обладают сходными свойствами, как это следует из значений задающих напряжений и токов:

$$u_1 = z_1 i_2 = i_2 / y_2, \quad i_1 = u_2 / z_2 = y_2 u_2. \quad (2.31)$$

Из формул (2.31) и (1.6) определяют соотношение, между

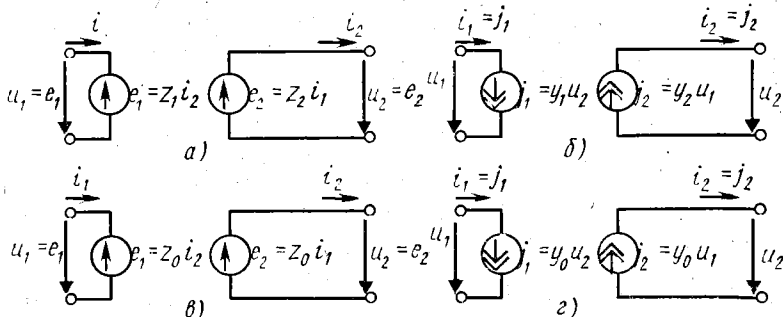


Рис. 2.14. Схемы инверторов сопротивлений

мгновенными мощностями на входе и выходе таких преобразователей:

$$p_2(t) = \frac{z_2}{z_1} p_1(t) = \frac{y_2}{y_1} p_1(t), \quad p_1(t) = \frac{z_1}{z_2} p_2(t) = \frac{y_1}{y_2} p_2(t). \quad (2.32)$$

Указанные двусторонние преобразователи мощности называют инверторами сопротивлений, поскольку они преобразуют сопротивление в пропорциональную ему проводимость, и наоборот. Действительно, аналогично предыдущему, из формул (2.31) и (2.1), (2.6), (2.11) находим соотношения между входными параметрами инверторов сопротивлений и параметрами элементов R_2 , G_2 , C_2 , L_2 , подключенных к их выходным зажимам (рис. 2.15):

$$R_1 = k_n^2 G_2, \quad G_1 = R_2 / k_n^2, \quad C_1 = L_2 / k_n^2, \quad L_1 = k_n^2 C_2, \quad k_n^2 = z_1 z_2 = 1 / y_1 y_2, \quad (2.33)$$

где k_n — коэффициент инверсии.

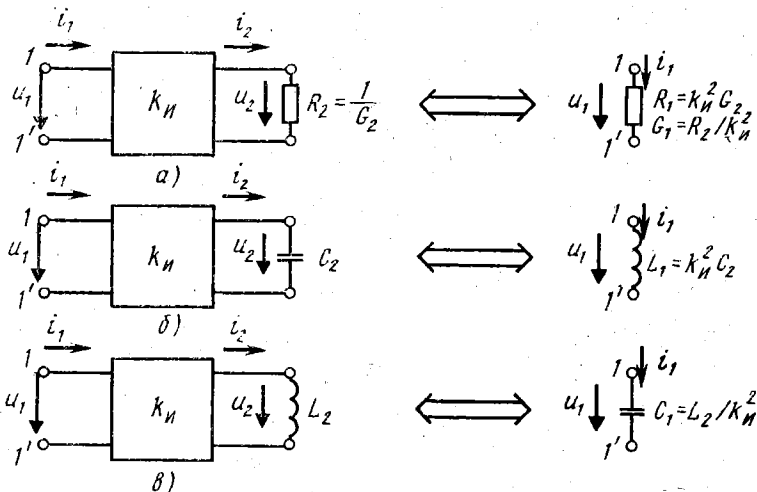


Рис. 2.15. Инверсия элементов идеальным инвертором

Такое преобразование элементов называют их инверсией. Сами же равноименные элементы, связанные соотношениями (2.33), называются инверсными элементами. При $k_n^2 > 0$ преобразователи называют инверторами положительных сопротивлений (ИПС), а при $k_n^2 < 0$ — инверторами отрицательных сопротивлений (ИОС).

Если $z_1 = z_2 = z_0$ (см. рис. 2.14, в), $y_1 = y_2 = y_0$ (см. рис. 2.14, г), то ИПС не преобразует мощности, как это следует из соотношений (2.32), т. е. этот ИПС обладает свойствами пассивного элемента. Такой элемент называют гиратором (от греч. *gýgos* — круг, англ. *gyrate* — вращаться по кругу). Эти преобразователи инвертируют положительные сопротивления в положительные

проводимости и наоборот. Поэтому их называют положительными гиристорами (ПГ) или гиристорами положительных сопротивлений (ГПС). Параметр $y_0 = 1/k_r$ называют проводимостью гириации, а параметр $z_0 = k_r$ — сопротивлением или коэффициентом гириации. Для них справедливы формулы (2.33) и схемы эквивалентного перехода, показанные на рис. 2.15, в которых коэффициент инверсии k_n следует заменить коэффициентом гириации k_r .

Если $z_1 = -z_2 = z_0$, $y_1 = -y_2 = y_0$, то получаются разновидности ИОС, которые называют отрицательными гиристорами (ОГ) или гиристорами отрицательных сопротивлений (ГОС). Преобразуя положительные сопротивления (проводимости) в отрицательные проводимости (сопротивления), ОГ изменяют мощность только по знаку, как следует из равенств (2.32).

При $1/z_0 = y_0 = 1$ инверсия элементов в положительном гиригоре приводит к численно равным параметрам $R \leftrightarrow G$, $L \leftrightarrow C$, как видно из соотношений (2.33). Такую инверсию элементов называют их дуализацией, а сами равноименные элементы с численно равными параметрами — дуальными элементами (от лат. dualis — двойственность).

Для идеальных источников напряжения и тока соответственно $e = u$, $R_i = 0$ и $j = i$, $G_i = 1/R_i = 0$. Поэтому согласно соотношениям (2.31) и первым двум равенствам (2.33) идеальные источники напряжения и тока также являются дуальными элементами при численно равных задающих напряжениях и токах.

§ 2.3. СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Элементы цепи, как пассивные, так и активные, могут соединяться друг с другом различным образом. Для элементов-двухполюсников, как и любых двухполюсников, существует четыре основных вида соединений — последовательное, параллельное, звездой и многоугольником.

1. Последовательное соединение. *Последовательным называют такое соединение элементов, при котором через них проходит один и тот же ток.* Например, элементы на рис. 2.11 соединены последовательно. Соединяться последовательно может любое количество элементов, как показано на рис. 2.16.

В частности, можно последовательно соединять несколько идеальных источников напряжения, как на рис. 2.16, а. Однако нельзя соединять последовательно идеальные источники тока, поскольку это противоречит их определению. Например, физически бессмысленно подключать последовательно второй источник тока j_0 в цепи, изображенной на

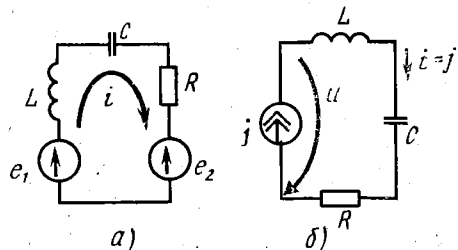


Рис. 2.16. Последовательное соединение элементов

рис. 2.16, б, поскольку для тока j_0 источник тока j представляет бесконечно большое сопротивление. С другой стороны, при таком включении должны выполняться одновременно два равенства: $i = j$ и $i = j_0$, что невозможно. Если же $j_0 = j$, то это эквивалентно присутствию в цепи одного идеального источника тока j , так что включение двух таких источников опять-таки лишено смысла.

Бессмысленно также включать идеальный источник напряжения последовательно с идеальным источником тока. Такой источник напряжения, включенный, например, в цепь рис. 2.16, б, не может повлиять на задающий ток j и, следовательно, на ток i . Поэтому и напряжения на пассивных элементах L , C , R не могут зависеть от э.д.с. указанного источника напряжения, так что он не может повлиять на процессы в цепи.

На схемах электрических цепей последовательное соединение элементов проводниками отображают отрезками линии без обозначения зажимов элементов, как на рис. 2.16.

2. Узлы цепи. Непосредственный электрический контакт возможен не только между двумя элементами, как при их последовательном соединении. Место электрического соединения (контакта) трех и более элементов называют *узлом цепи* и обозначают на схемах точкой. Например, в узле, отмеченном точкой на рис. 2.17, а, электрически соединены четыре элемента — три пассивных и один активный.

Следует, однако, твердо усвоить, что для удобства изображения и чтения схем цепей узел часто отображают на схеме несколькими точками (в любом количестве!), соединенными между собой накоротко. Например, та же цепь рис. 2.17, а может быть изображена в другом виде, как на рис. 2.17, б. Здесь тот же один узел отображен двумя точками электрического соединения (контакта).

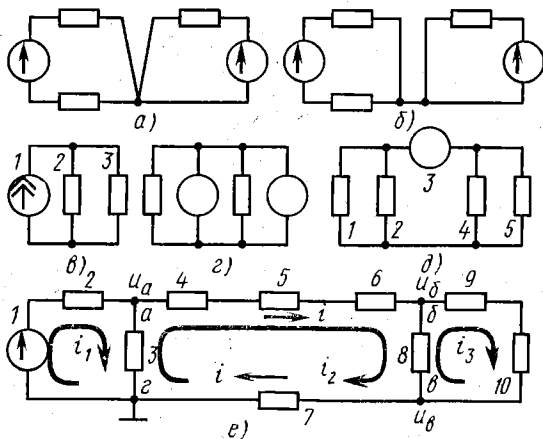


Рис. 2.17. Схемы цепей с одним, двумя, тремя и четырьмя узлами

3. Ветви цепи. Если цепь имеет больше одного узла, то элемент или группа последовательно соединенных элементов, которые включены между двумя любыми узлами, называют ветвью цепи. Например, в цепях с двумя узлами (рис. 2.17, в, г) и в цепи с тремя узлами (рис. 2.17, д) все элементы являются ветвями. Первая из этих цепей имеет три ветви, вторая — четыре ветви, а третья — пять ветвей. В цепи с четырьмя узлами и шестью ветвями, показанной на рис. 2.17, е, ветвями являются не только элементы 3, 7 и 8, но и группы последовательно соединенных элементов 1—2, 4—5—6 и 9—10.

4. Напряжения и токи ветвей, узловые напряжения. Ток, протекающий через ветвь от одного узла к другому, называют током ветви, а напряжение между двумя узлами, соединенными ветвью, — напряжением этой ветви.

Напряжение между двумя узлами существует и в том случае, если они не соединены ветвью. Например, в цепи с четырьмя узлами (рис. 2.17, е) существуют некоторые напряжения между узлами а и в, а также между узлами б и г. В цепи принято отсчитывать напряжения всех узлов относительно некоторого узла, который называют базисным. Базисный узел выбирают произвольно, но обычно им служит заземленный узел с нулевым потенциалом, например узел г на рис. 2.17, е, потенциал которого $v_g = 0$.

Напряжения между любыми узлами и базисным узлом называют узловыми напряжениями этих узлов. Очевидно, узловое напряжение базисного узла равно нулю, если даже он не заземлен. Подобно потенциалам узлов на рис. 1.1, узловые напряжения обозначают буквой u с соответствующими индексами, как показано на рис. 2.17, е. При этом направление отсчета узловых напряжений не отмечают стрелкой, поскольку все они отсчитываются относительно базисного узла. Нетрудно видеть, что напряжение ветви равно разности узловых напряжений тех узлов, которые соединены этой ветвью. Например, если в цепи на рис. 2.17, е отключить заземление, то потенциал узла г станет отличным от нуля ($v_g \neq 0$), а его узловое напряжение $u_g = v_g - v_g = 0$. Тогда узлы а, б, в с потенциалами v_a, v_b, v_c будут иметь узловые напряжения $u_a = v_a - v_g, u_b = v_b - v_g$ и $u_c = v_c - v_g$. При этом напряжение ветви 4—5—6 равно $v_a - v_b = u_a - u_b$, а напряжение ветви 7, например, равно узловому напряжению u_a .

5. Параллельное соединение. Если две и более ветвей имеют одно и то же напряжение, будучи подключенными к одной паре узлов, то соединение этих ветвей называют параллельным. Применительно к ветвям, состоящим из одного элемента, говорят о параллельном соединении элементов. Например, на рис. 2.17, в параллельно соединены три элемента, на рис. 2.17, г — четыре элемента, а на рис. 2.17, д — два элемента 1 и 2, а также два элемента 4 и 5. На рис. 2.17, е параллельно соединены ветви 1—2 и 3, а также ветви 8 и 9—10.

Можно параллельно соединять и несколько идеальных источ-

ников тока. Например, оба активных элемента на рис. 2.17, *г* могут быть источниками тока. Однако физически бессмысленно включать параллельно идеальные источники напряжения, а также идеальные источники напряжения и тока. В последнем случае идеальный источник тока не может влиять на процессы в цепи и должен быть устранен. Поэтому на рис. 2.17, *г* ни один из активных элементов не может являться источником напряжения.

6. Смешанное соединение. Последовательно соединяться могут не только отдельные элементы, но также ветви с любым количеством элементов, как это видно из рис. 2.17, *е*. Здесь ветви 4—5—6 и 7 соединены последовательно, поскольку через них проходит один и тот же ток i . Этот ток, пройдя через элемент 6, разветвляется по ветвям 8 и 9—10. Затем разветвившиеся токи соединяются вместе в элементе 7, вновь образуя ток i .

Последовательно соединяться друг с другом могут не только ветви, но и группы из параллельно соединенных ветвей. Например, из предыдущего описания цепи, изображенной на рис. 2.17, *е*, следует, что через группу параллельно соединенных ветвей 8 и 9—10 проходит ток i , который проходит по ветвям 4—5—6 и 7. Поэтому группа из параллельно соединенных ветвей 8 и 9—10 соединена последовательно с ветвями 4—5—6 и 7.

Если цепь содержит последовательно и параллельно соединенные ветви и группы ветвей, то ее называют цепью со смешанным соединением элементов (например, цепи на рис. 2.17, *д*, *е*).

7. Сложноразветвленные цепи. *Если цепь с четырьмя и более узлами не может быть отображена схемой со смешанным соединением элементов, то ее называют сложноразветвленной цепью.* Сложноразветвленные цепи содержат ветви, входящие в состав так называемых звезд и многоугольников.

Если ветви имеют только один общий узел, то их соединение называют звездой. Сами же ветви при этом называют лучами звезды. Например, цепь, изображенная на рис. 2.18, является четырехлучевой звездой с общим узлом 0, если никакие из узлов 1, 2, 3, 4 не соединены накоротко между собой. Эти узлы могут соединяться друг с другом только через другие ветви, подключения которых к узлам 1, 2, 3, 4 показано отрезками пунктирных линий.

Минимальное число лучей в звезде равно трем. Цепь с четырьмя трехлучевыми звездами показана на рис. 2.19. Такую цепь называют мостовой, или мостом.

Понятие звезды можно применять к соединению не ветвей, а элементов. Например, в цепи со смешанным соединением элементов, изображенной на рис. 2.17, *е*, никакие ветви не образуют соединения звездой. Однако элементы 2, 3, 4, элементы 6, 8, 9 и ряд других образуют трехлучевые звезды.

Если в цепи, содержащей больше двух узлов, каждые из двух узлов во всех их возможных сочетаниях соединены друг с другом одной ветвью, то такую цепь называют многоугольником. Многоугольник с n узлами называют n -угольником. Например, мосто-

вая цепь рис. 2.19 является четырехугольником, в котором каждые два узла из четырех соединены ветвью. На рис. 2.20 показана схема пятиугольника. Обе эти схемы являются примерами сложноразветвленных цепей.

Минимальное количество узлов и ветвей в многоугольнике равно трем. При этом образуются цепи-треугольники. Мостовая схема рис. 2.19 содержит четыре треугольника.

8. Контур цепи. С различными соединениями элементов связано также понятие контуров цепи. *Контуром называют совокупность элементов, образующих замкнутый путь для тока.* Например, контурами являются цепи, изображенные на рис. 2.11 и 2.16. Схемы рис. 2.17, а, б изображают двухконтурную цепь. Такие цепи, как на рис. 2.16 и 2.17, а, б, не имеют ветвей.

При наличии ветвей в цепи они входят в состав контуров. При этом отдельные ветви могут входить в состав нескольких контуров. Например, цепь рис. 2.17, в содержит контуры, образованные ветвями 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Здесь каждая из ветвей входит в состав двух контуров.

Цепь с тремя ветвями содержит также три контура, как на рис. 2.17, в. При четырех и более ветвях в цепи количество контуров обычно превышает число ветвей, но может и равняться ему. Например, шестиконтурные цепи на рис. 2.17, г—е имеют соответственно четыре, пять и шесть ветвей. Мостовая же схема с шестью ветвями (см. рис. 2.19) имеет семь контуров.

9. Контурные токи. *Токи, проходящие в контурах, называют контурными токами.* Например, в цепях, показанных на рис. 2.16, токи i являются контурными токами. Аналогичные контурные

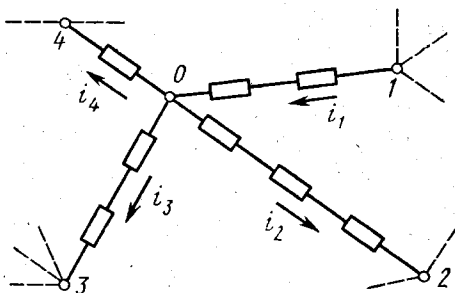


Рис. 2.18. Схема участка цепи в виде четырехлучевой звезды

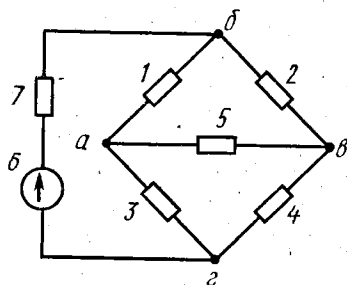


Рис. 2.19. Схема мостовой цепи

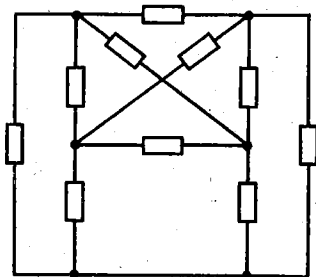


Рис. 2.20. Схема пятиугольника

токи существуют и в двухконтурных цепях, показанных на рис. 2.17, а, б. В таких цепях, не имеющих ветвей, следует говорить о существовании именно контурных токов.

Однако в цепях, содержащих ветви, реально существуют токи ветвей. Сами же ветви, как отмечалось, могут входить в состав нескольких контуров. Тем не менее это обстоятельство не препятствует использованию понятия контурных токов и для таких цепей. Действительно, *если ветвь входит в состав нескольких контуров, то ток этой ветви может быть разложен на соответствующее количество контурных токов. При этом реальный ток ветви получается равным алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь. Само же понятие контурных токов приобретает в этом случае условный смысл.*

Например, выделив в цепи с шестью ветвями (см. рис. 2.17, е) три контура 1—2—3, 3—4—5—6—8—7 и 8—9—10, получим для них три контурных тока i_1, i_2, i_3 . При этом реальные токи ветвей равны разности условных контурных токов i_1, i_2 для ветви 3 и токов i_2, i_3 для ветви 8. Однако для остальных ветвей, входящих только в один из контуров, токи ветвей и контурные токи тождественны друг другу. Например, ток i ветвей 4—5—6 и 7 равен контурному току i_2 , а токи ветвей 1—2 и 9—10 равны соответственно контурным токам i_1 и i_3 .

10. Двухполюсники и четырехполюсники. Понятия двухполюсников и четырехполюсников, введенные для отдельных элементов, распространяются на произвольные цепи с любым количеством элементов. *Двухполюсники с произвольной схемой подключают к остальной части цепи двумя зажимами.* В частности, любая ветвь цепи является двухполюсником. Если схема двухполюсника не раскрывается, то для него используют общее обозначение, как на рис. 1.1, а. Обычно применяют общее изображение двухполюсника, как на рис. 2.1, а. Соединения двухполюсников общего вида бывают такими же, как и в случае элементов двухполюсников.

Четырехполюсники с произвольной схемой подключают к остальной части цепи парой входных и парой выходных зажимов. Например, в цепи рис. 2.17, е два левых узла можно рассматривать как входные зажимы, а два правых узла — как выходные. Тогда цепь из элементов 3, 4, 5, 6, 7, 8 является четырехполюсником, подключенным входными зажимами к ветви 1—2, а выходными зажимами к ветви 9—10. Аналогично в мостовой схеме (см. рис. 2.19) ветви 1, 2, 3, 4 образуют четырехполюсник, в котором пара входных зажимов (верхний и нижний узлы) подключена к ветви 6—7, а пара выходных зажимов (левый и правый узлы) — к элементу 5. Если схема четырехполюсника не раскрывается, то для него используют общее обозначение, как на рис. 2.1, б.

Цепь, подключаемую к остальной части цепи n зажимами, называют n -полюсником или многополюсником ($n \geq 3$). Поэтому четырехлучевая звезда, например, показанная на рис. 2.18, мо-

жет быть также названа четырехполюсником. Однако не исключен случай, когда в таком четырехполюснике ток втекает только через один зажим, как показано на рис. 2.18, что противоречит определению четырехполюсника с парными входными и выходными зажимами. Поэтому во избежание различных толкований ниже всюду под четырехполюсником будем понимать цепь вида, как на рис. 2.1, б. Такие *четырёхполюсники имеют пару входных зажимов, через которые втекает и вытекает один и тот же ток i_1 , и пару выходных зажимов, через которые вытекает и втекает один и тот же ток i_2 .*

§ 2.4. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТОКОПРОХОЖДЕНИЯ

Законы токопрохождения устанавливают связь между напряжениями и токами в цепи. Для отдельных пассивных элементов такие связи рассмотрены в § 2.1. Здесь выясняются зависимости между напряжениями и токами в различных участках цепи, которые устанавливаются законами Кирхгофа и вытекающими из них следствиями.

1. *Первый закон Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами n ветвей, сходящимися в произвольном узле цепи (рис. 2.21). Изображенная здесь цепь может не являться звездой, поскольку все узлы 1, 2, ..., n или часть из них могут быть соединены накоротко между собой.*

Притекание токов i_1, i_2, \dots, i_n к узлу 0 означает перемещение положительных зарядов к этому узлу. Заряды же не могут скапливаться в узле, который является по существу математической точкой, а не физическим телом, способным накапливать заряды. Поэтому в любой момент времени некоторые токи (например, i_1, i_2, \dots, i_l) должны оттекать от узла. Остальные же токи ($i_{l+1}, i_{l+2}, \dots, i_n$) будем считать притекающими к этому узлу. При этом сумма всех оттекающих зарядов q_1, q_2, \dots, q_l , образующих оттекающие токи, должна равняться сумме притекающих зарядов $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_n$, образующих притекающие токи:

$$\sum_{k=1}^l q_k = \sum_{k=l+1}^n q_k,$$

или

$$\sum_{k=1}^l q_k - \sum_{k=l+1}^n q_k = 0.$$

Это равенство можно записать в другом виде, объединив две арифметические суммы в одну алгебраическую сумму:

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0, \quad (2.34)$$

где оттекающим положительным зарядам приписан положительный знак, а притекающим положительным зарядам — отрицательный знак.

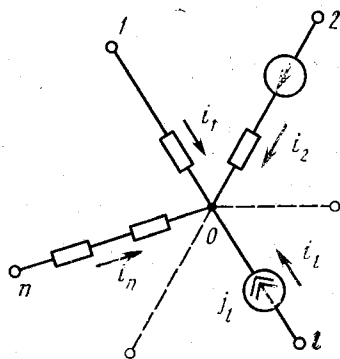


Рис. 2.21. Схема участка цепи с общим узлом

Продифференцировав уравнение (2.34), с учетом определения (1.2) получаем математическое выражение первого закона Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (2.35)$$

Этот закон справедлив для любого узла электрической цепи. Поэтому для произвольной цепи с n_y узлами можно составить n_y уравнений вида (2.35).

Соответственно знакам, приписанным зарядам в соотношении (2.34), в уравнении (2.35) токи ветвей, оттекающие от узла, являются положительными, а притекающие к узлу токи — отрицательными. Такое правило знаков соответствует физическому определению тока как перемещения положительных зарядов от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом.

Первый закон Кирхгофа (2.35) следует записывать в ином виде, если некоторые ветви содержат идеальные источники тока. В равенстве (2.35) ток i_l является отрицательным, как притекающий ток (рис. 2.21). Однако $i_l = j_l$, а по установленному ранее правилу знаков задающий ток j_l является положительным, поскольку он направлен к узлу с большим потенциалом. Поэтому с целью сохранения правила знаков для задающих токов их следует перенести в правую часть равенства (2.35):

$$\sum_{k=1}^{n_i} i_k = \sum_{k=1}^{n_j} j_k, \quad (2.36)$$

где для рассматриваемого узла с n сходящимися ветвями n_i — число ветвей без источников тока, n_j — число источников тока, $n = n_i + n_j$.

2. Сложение токов и параметров цепи. Из первого закона Кирхгофа следует, в частности, что *общий ток двухполюсника, составленного из m параллельных ветвей* (рис. 2.22, а), равен *сумме токов ветвей*:

$$i = \sum_{k=1}^m i_k. \quad (2.37)$$

Действительно, для узла 0 (см. рис. 2.21) равенство (2.35) имеет вид

$$-i + i_1 + i_2 + \dots + i_m = 0,$$

что равносильно соотношению (2.37).

Параллельно соединенные ветви могут содержать только по одному пассивному элементу (рис. 2.22, б). Если все эти элементы являются

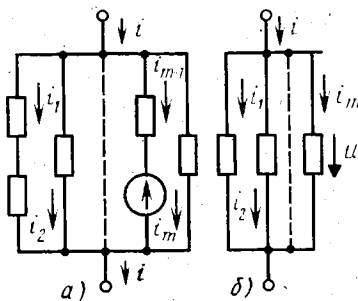


Рис. 2.22. Параллельное соединение ветвей

диссипативными проводимостями G_1, G_2, \dots, G_m , то для каждой из них справедливо второе равенство (2.1):

$$i_1 = G_1 u, i_2 = G_2 u, \dots, i_m = G_m u.$$

Подставив эти равенства и второе равенство (2.1) в формулу (2.37), найдем после сокращения на u :

$$G = \sum_{k=1}^m G_k. \quad (2.38)$$

Таким образом, при параллельном соединении диссипативных элементов их проводимости складываются. Другими словами, такой составной двухполюсник эквивалентен одному диссипативному элементу с суммарной проводимостью (2.38).

Аналогично, для параллельно соединенных емкостей C_1, C_2, \dots, C_m или индуктивностей L_1, L_2, \dots, L_m из формулы (2.37) и первого равенства (2.6) или второго равенства (2.11) находим

$$C = \sum_{k=1}^m C_k, \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{L_k}. \quad (2.39)$$

Таким образом, при параллельном соединении емкостных элементов складываются их емкости, а при параллельном соединении индуктивных элементов — величины, обратные индуктивностям.

Если две индуктивности L_1, L_2 соединены параллельно и связаны между собой взаимной индуктивностью M , то при $i = i_1 + i_2$ и $u_1 = u_2 = u$ из формул (2.22) определяется результирующая индуктивность

$$L = (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 \mp 2M). \quad (2.40)$$

В знаменателе дроби (2.40) верхний знак соответствует согласному, а нижний — встречному включению катушек.

Согласно формулам (2.38) — (2.40) одноименные параллельно соединенные элементы могут быть объединены в один элемент.

3. Закон сохранения зарядов. Существует специфический случай так называемых изолированных узлов, к которым первый закон Кирхгофа (2.35) неприменим. Узел называется *изолированным*, если все сходящиеся в нем ветви содержат емкости, а в цепи действуют только постоянные задающие напряжения и токи. При этом в таких ветвях постоянный ток проходить не может, но на емкостях скапливаются постоянные заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_n и устанавливаются соответствующие постоянные напряжения U_1, U_2, \dots, U_n (рис. 2.23).

Из-за отсутствия токов, проходящих через изолированный узел, как раз и невозможно применять первый закон Кирхгофа. Однако при этом можно использовать исходное соотношение (2.34), в котором протекающие через узел заряды q_k следует заменить статическими зарядами Q_k :

$$\sum_{k=1}^n Q_k = 0, \quad (2.41)$$

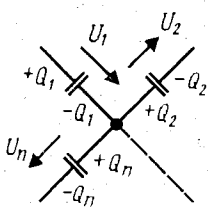


Рис. 2.23. Изолированный узел

где знаки зарядов берут в соответствии с выбранными положительными направлениями отсчета напряжений U_k (рис. 2.23).

Уравнение (2.41) справедливо в случае, когда емкости, соединенные в узле, не были первоначально заряжены. Однако некоторые m емкостей до их соединения уже могли быть заряжены и иметь заряды $Q_{01}, Q_{02}, \dots, Q_{0m}$. При этом, как бы ни перераспределились заряды на емкостях после их соединения в изолированном узле, суммарный первоначальный заряд в этом узле не может измениться. Действительно, в изолированном узле заряды исчезнуть не могут, а новые заряды не могут появиться. В этом случае соотношение (2.41) должно быть заменено более общим:

$$\sum_{k=1}^n Q_k = \sum_{k=1}^m Q_{0k}. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.42) и частный его случай — уравнение (2.41) выражают закон сохранения зарядов для изолированного узла.

4. Второй закон Кирхгофа для ветвей контура. Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, образующих замкнутый контур. Для произвольного контура, ветви которого подключены к узлам с потенциалами v_1, v_2, \dots, v_n (рис. 2.24), очевидно следующее тождество:

$$v_1 - v_1 + v_2 - v_2 + v_3 - v_3 + \dots + v_{n-1} - v_{n-1} + v_n - v_n = 0.$$

Перегруппируем слагаемые в этом тождестве:

$$(v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_n - v_{n-1}) + (v_1 - v_n) = 0.$$

Стоящие здесь в скобках двучлены являются, по определению, напряжениями ветвей. Таким образом, последнее равенство выражает второй закон Кирхгофа, гласящий, что алгебраическая сумма всех напряжений ветвей в любом замкнутом контуре равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (2.43)$$

Для произвольной цепи с n_k контурами можно составить n_k таких уравнений.

Знаки слагаемых в равенстве (2.43) устанавливают в соответствии

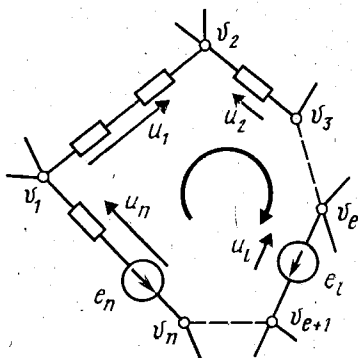


Рис. 2.24. Схема участка цепи в виде замкнутого контура

с выбранными положительными направлениями отсчета напряжений ветвей u_k и направлением обхода контура. При совпадении этих направлений знаки соответствующих слагаемых u_k должны быть положительными, а при встречных направлениях — отрицательными. Например, на рис. 2.24 направление обхода контура показано круговой стрелкой. При таком направлении обхода слагаемые u_1 и u_n в уравнении (2.43) берут со знаком «+», а слагаемые u_2 и u_l — со знаком «-».

5. Сложение напряжений и параметров цепи. Аналогично второму закону Кирхгофа может быть получено правило сложения напряжений: *общее напряжение u на двухполюснике, составленном из m последовательно соединенных элементов, равно алгебраической сумме напряжений u_k на этих элементах:*

$$u = \sum_{k=1}^m u_k. \quad (2.44)$$

Таким двухполюсником может являться, в частности, любая ветвь произвольной цепи. На рис. 2.25, а обозначены потенциалы v_1, v_2, \dots, v_{m-1} точек соединения элементов и потенциалы v_0, v_m зажимов двухполюсника. Для такого двухполюсника можно записать тождество

$$(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_m - v_{m-1}) - (v_m - v_0) = 0.$$

Здесь последний двучлен представляет собой напряжение на двухполюснике, а остальные двучлены — напряжения на элементах. Поэтому последнее равенство равносильно соотношению (2.44).

В формуле (2.44) величина u применительно к ветви является напряжением ветви, а величины u_k — напряжениями на ее элементах. Отсюда следует, в частности, что напряжение и ток любой ветви однозначно связаны между собой. Действительно, напряжения на элементах и их токи связаны соотношениями (2.1), (2.6) и (2.11), а токи в элементах являются током ветви.

В формулу (2.44) входят напряжения как на пассивных, так и на активных элементах двухполюсника. В частном случае двухполюсник может состоять только из пассивных элементов (рис. 2.25, б). Если все эти элементы, соединенные последовательно, являются диссипативными сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_m либо индуктивностями L_1, L_2, \dots, L_m , либо емкостями C_1, C_2, \dots, C_m , то из формулы (2.44) и первого равенства

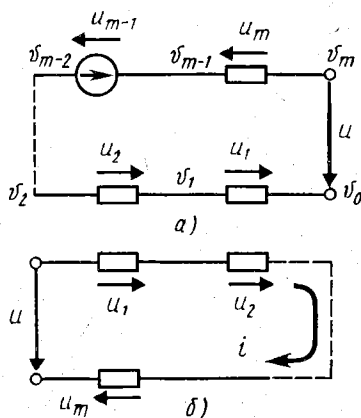


Рис. 2.25. Двухполюсник из последовательно соединенных элементов

(2.1), либо первого равенства (2.11), либо второго равенства (2.6) находим

$$R = \sum_{k=1}^m R_k, L = \sum_{k=1}^m L_k, \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k}. \quad (2.45)$$

Таким образом, при последовательном соединении диссипативных или индуктивных либо емкостных элементов складываются соответственно их сопротивления или индуктивности либо величины, обратные емкостям.

Если две индуктивности L_1, L_2 соединены последовательно и связаны между собой взаимной индуктивностью M , то при $i = i_1 + i_2$ и $i_1 = i_2 = i$ из формул (2.22) определяется результирующая индуктивность

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (2.46)$$

В формуле (2.46) верхний знак соответствует согласному, а нижний — встречному включению катушек.

Таким образом, и при последовательном соединении любые одноименные элементы могут быть объединены в один элемент согласно формулам (2.45), (2.46).

6. Второй закон Кирхгофа для элементов контура. С учетом правила сложения напряжений (2.44) второй закон Кирхгофа (2.43) может быть переписан для напряжений на n элементах, входящих в замкнутый контур:

$$\sum_{k=1}^{n_s} u_k = 0. \quad (2.47)$$

Этот закон Кирхгофа для элементов замкнутого контура и правило (2.44) сложения напряжений в разомкнутом двухполюснике являются тождественными. Это свидетельствует о возможности мысленного образования замкнутого контура для разомкнутой цепи. Например, на рис. 2.25 можно обойти разомкнутую цепь по элементам двухполюсника и по стрелке u . Такой прием мысленного образования замкнутых контуров часто используют при анализе схем произвольных цепей. В частности, можно рассматривать входной и выходной контуры четырехполюсника (см. рис. 2.1, б), замыкая их по стрелкам u_1 и u_2 .

Для цепи, изображенной на рис. 2.24, при выбранном направлении обхода контура напряжение u_i , например, входит в уравнение (2.47) с отрицательным знаком. Однако для источников напряжения принято писать не значение напряжения на их зажимах, а значение э. д. с. e . Поскольку $e_i = u_i$, эта э. д. с. войдет в уравнение (2.47) также с отрицательным знаком. Это противоречит правилу установления знаков слагаемых в уравнениях (2.43) и (2.47), так как направление стрелки e_i совпадает с направлением обхода контура на рис. 2.24. Во избежание этого противоречия задающие напряжения e_k в уравнении (2.47) переносят в правую часть равенства. Тогда второй закон Кирхгофа (2.47) для напряжений на элементах контура принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n_s} u_k = \sum_{k=1}^{n_s} e_k, \quad (2.48)$$

где n_n — количество пассивных элементов в контуре; n_e — количество источников напряжения в контуре.

Здесь слагаемые e_k имеют знак «+» при совпадении направления обхода контура и направления стрелки e_k , а знак «-» ставится, если указанные направления являются встречными. Например, для рассмотренного контура (см. рис. 2.24) э. д. с. e_1 в уравнении (2.48) имеет положительный знак, а э. д. с. e_n — отрицательный.

По смыслу своего доказательства второй закон Кирхгофа (2.43), где фигурируют напряжения ветвей u_k , применим лишь для цепей, которые содержат ветви, образующие замкнутый контур. Этот же закон в форме (2.47) или (2.48), где фигурируют напряжения u_k на элементах, входящих в замкнутый контур, может применяться также для цепей, не содержащих ветвей. В частности, для контуров, показанных на рис. 2.16 и 2.17, а, б, вполне применимы уравнения (2.47), (2.48).

Например, для контура, изображенного на рис. 2.16, а, с учетом основных законов (2.1), (2.6) и (2.11) уравнение (2.48) имеет следующий вид (при обходе контура по направлению тока):

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_1 - e_2,$$

или после дифференцирования

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de_1}{dt} - \frac{de_2}{dt}.$$

Отсюда определяется неизвестный ток i при заданных э. д. с. e_1 и e_2 .

Из приведенного примера видно, что процессы в линейной цепи описываются линейными интегродифференциальными или линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Это является еще одним (четвертым) существенным свойством линейных цепей, которое дополняет рассмотренные свойства (см. § 1.4.1, 1.4.2, 1.4.5). *Линейность указанных уравнений является еще одним обоснованием наименования линейных цепей.*

7. Закон сохранения энергии. В сложной цепи со многими ветвями их напряжения и токи связаны друг с другом рядом уравнений, которые составляются по законам Кирхгофа. Однако для сколь угодно сложной цепи с любым количеством ветвей можно составить лишь одно уравнение, которое связывает все напряжения и токи ветвей. Это уравнение выражает закон сохранения энергии для электрической цепи. Согласно этому закону в любой момент времени сумма мгновенных мощностей (1.6) для всех n_n ветвей цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n_n} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n_n} u_k(t) i_k(t) = 0, \quad (2.49)$$

где u_k , i_k — соответственно напряжения и токи ветвей.

Смысл закона (2.49) становится особенно наглядным, если от напряжений ветвей перейти к сумме напряжений на элементах этих ветвей в соответствии с формулой (2.44). Тогда напряжения на идеальных источниках напряжения можно заменить их задающими напряжениями e_k , а соответствующие слагаемые перенести в правую часть равенства, как это было сделано в уравнении (2.48). Одновременно следует перенести в правую часть равенства слагаемые, содержащие множителями задающие токи $j_k = i_k$, как в уравнении (2.36). При этом закон (2.49) представляется в виде

$$\sum_{k=1}^{n_n} u_k i_k = \sum_{k=1}^{n_e} e_k i_k + \sum_{k=1}^{n_j} u_k j_k, \quad (2.50)$$

где n_n — полное количество пассивных элементов во всей цепи с напряжениями u_k на них и проходящими через них токами i_k ; n_e — количество источников э. д. с. e_k , через которые проходят токи i_k ; n_j — количество источников тока j_k с напряжениями u_k на этих источниках.

Таким образом, уравнение (2.50), тождественное уравнению (2.49), показывает, что *сумма мгновенных мощностей на всех пассивных элементах цепи в любой момент времени равна сумме мгновенных мощностей, отдаваемых идеальными источниками напряжения и тока.*

8. Закон сохранения энергии и законы Кирхгофа. Равенство (2.49) можно доказать с помощью первого закона Кирхгофа, которому удовлетворяют токи ветвей, входящие в это равенство. Рассмотрим цепь, содержащую $n_y = m$ узлов с потенциалами v_1, v_2, \dots, v_m . В каждом из этих узлов действует закон (2.35). Поэтому справедливо тождество

$$v_1 \sum_{k=1}^{n_1} i_k + v_2 \sum_{k=1}^{n_2} i_k + \dots + v_m \sum_{k=1}^{n_m} i_k = 0, \quad (2.51)$$

где n_1, n_2, \dots, n_m — количество токов i_k (ветвей), сходящихся в соответствующих узлах.

Каждая из n_b ветвей цепи соединяет два узла. Поэтому любой ток ветви оттекает от одного узла и притекает к другому узлу. По правилу знаков этот ток для первого из указанных узлов является положительным, а для другого — отрицательным. Таким образом, в уравнение (2.51) любой из токов i_k входит в два слагаемых, причем с противоположными знаками. Объединив эти слагаемые, перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{k=1}^{n_b} (v_{1k} - v_{2k}) i_k = 0. \quad (2.52)$$

Здесь v_{1k} — потенциал узла, из которого вытекает ток i_k , а v_{2k} — потенциал узла, в который втекает этот ток.

Поскольку ток i_k проходит по k -й ветви, разность

$$u_k = v_{1k} - v_{2k} \quad (2.53)$$

является напряжением этой ветви. Поэтому соотношения (2.52) и (2.53) тождественны равенству (2.49). Таким образом, закон сохранения энергии (2.49) вытекает из первого закона Кирхгофа, который, следовательно, обладает определенным энергетическим смыслом.

Однако приведенное доказательство позволяет рассматривать уравнение (2.52) в более широком смысле. В исходном тождестве (2.51) на потенциалы узлов v_k не накладывается никаких ограничений. Поэтому в равенстве (2.52) под величинами v_{1k} и v_{2k} можно понимать потенциалы узлов не в рассматриваемой цепи, а в некоторой другой цепи, имеющей такие же узлы, как и заданная цепь. Например, при заданной цепи с четырьмя узлами, показанной на рис. 2.17, *г*, потенциалы узлов *а*, *б*, *в*, *г* могут быть взяты из мостовой схемы (см. рис. 2.19). Тогда в равенстве (2.52) под разностью потенциалов

$$u'_k = v_{1k} - v_{2k} \quad (2.54)$$

следует понимать напряжение ветвей, соединяющих соответствующие узлы не в заданной, а в другой цепи с такими же узлами. Эти новые напряжения (2.54) должны, разумеется, удовлетворять второму закону Кирхгофа, поскольку они относятся к реальной электрической цепи.

На основании равенств (2.52) и (2.54) приходим к теореме Телледжена, которая гласит, что произвольные напряжения $u'_k(t)$ и токи $i_k(t)$ связаны соотношением

$$\sum_{k=1}^{n_b} u'_k(t) i_k(t) = 0, \quad (2.55)$$

если они удовлетворяют второму и первому законам Кирхгофа. В отличие от закона сохранения энергии (2.49) равенство (2.55) лишено энергетического смысла. Однако из этого равенства вытекает закон сохранения энергии, когда величины (2.54) приобретают смысл напряжений (2.53).

Закон сохранения энергии (2.49) может быть доказан также на основе второго закона Кирхгофа. При таком доказательстве теорема Телледжена (2.55) и закон сохранения энергии (2.49) распространяются и на такие цепи, которые не содержат ветвей, а состоят из одних контуров. Кроме того, отсюда следует, что и второй закон Кирхгофа обладает определенным энергетическим смыслом.

Справедливо также обратное утверждение. Не только закон сохранения энергии можно рассматривать как следствие законов Кирхгофа, но и законы Кирхгофа могут быть получены как следствие закона сохранения энергии.

Рассмотренные здесь основные законы токопрохождения являются общими для линейных, параметрических и нелинейных цепей. Следует лишь иметь в виду, что параметрические и нелинейные элементы могут являться источниками электрической

энергии. Это необходимо учитывать при использовании, например, уравнений (2.36), (2.48) и (2.50).

К числу основных законов токопрохождения для линейных и параметрических цепей относится также рассмотренный ранее закон суперпозиции, который в гл. 3 применяется в математической форме.

§ 2.5. ГРАФЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Структура электрических цепей определяется способом соединения элементов, но не зависит от типа элементов. Поэтому указанную структуру можно изучать по абстрактным графическим схемам цепи, на которых не отображается тип элементов. Такие схемы называют графами электрических цепей.

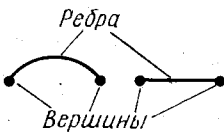


Рис. 2.26. Элементы графа электрической цепи

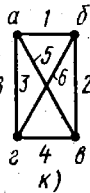
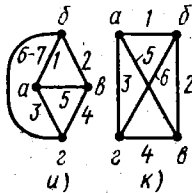
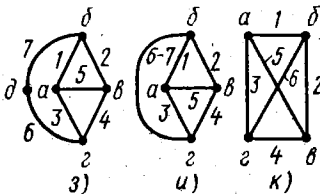
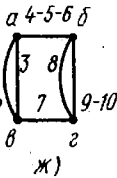
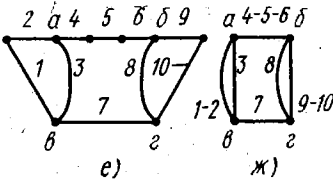
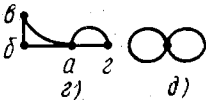
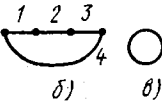
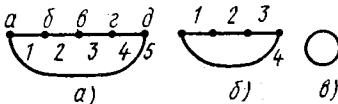


Рис. 2.27. Графы электрических цепей

1. Элементы графов. На графе любой элемент-двухполюсник отображают отрезком линии, который называется *ребром*. Зажимы элемента обозначают точками, которые называются *вершинами* графа (рис. 2.26). Ребра соединяются своими вершинами, которые сливаются при этом в одну вершину. Таким образом, *граф представляет собой совокупность вершин, которые соединены друг с другом ребрами*. Эти соединения производятся для тех или иных сочетаний вершин, соответствующих структуре цепи. Например, на рис. 2.27, а, б, г, е, з изображены графы цепей, показанных соответственно на рис. 2.16, а, б, 2.17, а, е и 2.19.

Если вершина и ребро соприкасаются, «сталкиваются» друг с другом, то их называют *инцидентными* (от слова «инцидент» — «столкновение»). Например, на рис. 2.27, а вершина б инцидентна ребрам 1, 2 и неинцидентна всем остальным ребрам.

2. Матрицы инцидентности. Структура графа может быть описана в алгебраической форме. Для этого вводят понятие коэффициентов инцидентности, которые принимают равными единице для инцидентных элементов графа и нулю — для остальных элементов. Затем составляют прямоугольную таблицу инцидент-

ных коэффициентов, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам графа. При этом строки и столбцы нумеруют или индексируют в соответствии с нумерацией (индексацией) вершин и ребер. Полученную таким образом таблицу называют *матрицей инциденций* (A). Например, граф, изображенный на рис. 2.27, а, имеет такую инцидентную матрицу:

$$(A) = \begin{matrix} \text{Номера (или индексы)} \\ \text{ребер} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \end{matrix} \\ \text{Индексы} \\ \text{(или номера)} \\ \text{вершин} \end{matrix} \quad (2.56)$$

Матрица инциденций графа, изображенного на рис. 2.27, з, имеет вид

$$(A) = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \end{matrix} \\ \end{matrix} \quad (2.57)$$

Матрицы (2.56) и (2.57) имеют по две единицы в каждом столбце. Это справедливо для любых инцидентных матриц, поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам. Пользуясь этим свойством, можно легко построить граф цепи по его матрице инциденций. При этом следует учитывать, что расположение вершин при изображении графа является произвольным и может не соответствовать привычному изображению электрической цепи.

Такое построение графа цепи и соответственно определение ее структуры может быть произведено с помощью ЭВМ, в память которой заложена матрица инциденций. Если при этом машинное описание цепи содержит также параметры элементов, отображаемых ребрами графа, то по заданной программе ЭВМ может производить любые расчеты для цепи заданной структуры.

3. Составные части графа. Если вершина инцидентна трем и более ребрам, то ее называют *узлом графа*, который соответствует узлу цепи. Например, узлами являются вершины a , b , v , z графов на рис. 2.27, e , z и вершина a графа на рис. 2.27, g . Все остальные вершины этих графов инцидентны только двум ребрам.

Если вершина инцидентна только двум ребрам, то эти ребра называют *последовательно соединенными*, что соответствует последовательному соединению двух элементов цепи. *Отдельное ребро, инцидентное двум узлам, или совокупность последовательно соединенных ребер называют ветвью графа*, которая соответствует ветви цепи.

Например, графы на рис. 2.27, *е*, *з* имеют соответственно ветви 1—2, 3, 4—5—6, 7, 8, 9—10 и 1, 2, 3, 4, 5, 6—7. Такие же ветви имеют цепи с этими графами, изображенные на рис. 2.17, *е* и 2.19.

Совокупность ребер и ветвей, по которым можно переместиться из одной вершины графа в другую, не проходя дважды через какую-либо вершину, ветвь или ребро, называют путем графа. Вершины, лежащие на пути, могут являться и узлами графа. В частности, ветвь графа является путем между двумя его узлами, соединенными этой ветвью.

Если любые две вершины графа соединены путем, то граф называют связным (связанным). В противном случае граф называют несвязным (несвязанным). Несвязные графы имеют, например, цепи, содержащие идеальный трансформатор.

Вершины (или узлы), соединенные путем графа, называют концевыми вершинами этого пути. Если обе концевые вершины совпадают, сливаясь друг с другом, то образуется замкнутый путь, называемый контуром графа. Контур графа соответствует контуру цепи. Например, графы на рис. 2.27, *а*, *б* являются контурами, как и сами цепи на рис. 2.16, *а*, *б*. Два контура графа на рис. 2.27, *г* соответствуют двум контурам цепи на рис. 2.17, *а*. Аналогично, все контуры графов на рис. 2.27, *е*, *з* и контуры цепи на рис. 2.17, *е* и 2.19 соответствуют друг другу.

4. Сжатие графов. *Вершину, инцидентную только двум ребрам, называют устранимой.* Устранимые вершины можно не отмечать на графе, если они не влияют на его изучаемые свойства. При таком устранении, т. е. изъятии устранимой вершины, инцидентные ей ребра объединяются в одну линию. В частности, при изъятии (удалении) всех устранимых вершин из ветви ее, как и ребро, изображают на графе одним отрезком линии. *Удаление всех устранимых вершин в графе называется его сжатием.* Соответственно графы с изъятиями и неизъятиями устранимыми вершинами могут быть названы сжатыми и несжатыми графами. В необходимых случаях далее будем оговаривать, какие графы имеются в виду.

Сжатие графов на рис. 2.27, *г*, *е*, *з* приводит к графам, показанным соответственно на рис. 2.27, *д*, *ж*, *и*. Сжатый граф, полученный на рис. 2.27, *и*, перечерчен в более удобном виде на рис. 2.27, *к*, где для упрощения нумерации ветвь 6—7 обозначена одной цифрой 6. При сжатии двух разных графов, изображенных на рис. 2.27, *а*, *б*, получается одинаковый граф в виде контура, не содержащего вершин (рис. 2.27, *в*).

Два контура на рис. 2.27, *д*, полученные при сжатии графа, изображенного на рис. 2.27, *г*, сохранили общий узел *а*, поскольку он является неустранимой вершиной в исходном графе (рис. 2.27, *г*). При этом в графе на рис. 2.27, *д* образовалось два замкнутых пути, не имеющих других вершин, кроме узла *а*, в котором слились концевые вершины каждого из путей. Такие замкнутые пути, содержащие только один узел, называют петлями. Таким

образом, сжатые графы состоят из узлов, ветвей, контуров и петель.

5. Подграфы. При исследовании структуры цепи может рассматриваться не весь ее граф, а некоторая его часть. *Часть графа, полученную при изъятии хотя бы одной ветви, называют подграфом этого графа.* При удалении некоторых ветвей могут получиться несвязные подграфы. Например, в графе на рис. 2.27, ж изъятие ветвей 7 и 4—5—6 приводит к двум несвязным подграфам.

Поскольку любая ветвь графа входит в состав нескольких контуров, ее изъятие приводит к подграфу с меньшим числом контуров. Например, при устранении ветви 5 в шестиконтурном графе на рис. 2.27, з—к получается трехконтурный подграф. При удалении же ветви 7 в шестиконтурном графе на рис. 2.27, ж получается двухконтурный подграф. Дальнейшим устранением ветвей в подграфе можно избавиться в нем от всех контуров.

Связный подграф, содержащий все узлы графа, но не содержащий ни одного контура, называют деревом этого графа. Оставшиеся при этом ветви, называют ветвями дерева, а изъятые ветви — связями (ветвями связи) графа или хордами этого дерева. Хорды дополняют дерево до полного графа. Поэтому число n_v ветвей графа связано с числом n_d ветвей дерева и количеством его хорд n_x простой формулой

$$n_v = n_d + n_x. \quad (2.58)$$

Если исходный граф является несвязным, то деревья образуются для каждой несвязной части графа. *Совокупность деревьев несвязного графа называют лесом этого графа.* Формула (2.58) справедлива и для несвязного графа с общим количеством ветвей n_v , если n_d и n_x — общее число ветвей и хорд деревьев в лесу.

Для каждого графа можно образовать различные деревья (леса). Например, на рис. 2.28 показаны некоторые деревья графа, изображенного на рис. 2.27, к. При построении дерева графа

можно не удалять хорды, а наращивать ветви дерева. Для этого надо наметить все узлы графа, расположив их произвольно. Затем, начав с некоторого узла, который называется корнем дерева, следует вставлять ветви графа, идущие к остальным узлам или соединяющие другие узлы графа, не допуская при этом образования контуров. Именно так построены деревья графа на рис. 2.28, корнем которых является узел a . Этот процесс построения дерева можно алго-

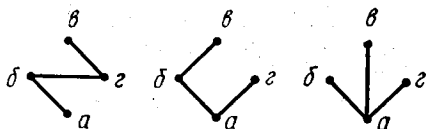


Рис. 2.28. Деревья графа

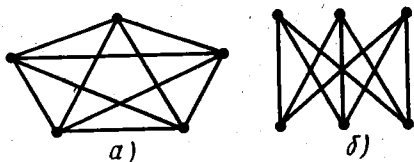


Рис. 2.29. Неплоские графы

ритмизировать. Тогда построение дерева осуществимо с помощью ЭВМ по матрице инцидентий графа.

Дерево графа с двумя узлами имеет всего одну ветвь. Добавление одного узла позволяет нарастить в дереве также одну ветвь. Поэтому с ростом числа узлов количество ветвей дерева будет оставаться на единицу меньше этого числа. Таким образом, если граф и его дерево имеют n_y узлов, то количество ветвей дерева

$$n_d = n_y - 1. \quad (2.59)$$

Если граф является несвязным, то эта формула относится к каждому дереву его леса. Граф с n_n несвязными частями имеет и n_n деревьев в лесу. Поэтому для такого графа с n_y узлами общее количество ветвей деревьев в лесу

$$n_d = n_y - n_n. \quad (2.60)$$

Из формул (2.58) и (2.59) определяют количество хорд для связного графа:

$$n_x = n_v - n_y + 1. \quad (2.61)$$

Из формул (2.58) и (2.60) находят число хорд для несвязного графа:

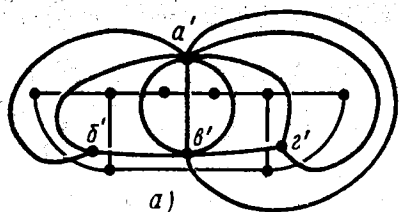
$$n_x = n_v - n_y + n_n. \quad (2.62)$$

6. Плоские графы. На рис. 2.27, *и*, *к* один и тот же граф изображен в двух видах. В первом виде ветви графа не пересекаются, во втором — пересекаются. Если граф можно перечертить в таком виде, чтобы ветви его не пересекались, то граф называют плоским. Соответствующую ему цепь называют планарной цепью. Схему такой цепи, изображенную с непересекающимися ветвями, называют планарной схемой. Плоским является не каждый граф. Например, граф, изображенный на рис. 2.29, *а*, является неплоским, поскольку его невозможно перечертить с непересекающимися ветвями. Этот неплоский граф с десятью ветвями отображает пятиугольник, показанный на рис. 2.20. Подобные цепи называются непланарными. При шести узлах в графе достаточно девяти ветвей, включенных определенным образом, как на рис. 2.29, *б*, чтобы граф стал неплоским. По теореме Куратовского любой граф является плоским в том случае, если он не содержит подграфы такого вида, как на рис. 2.29.

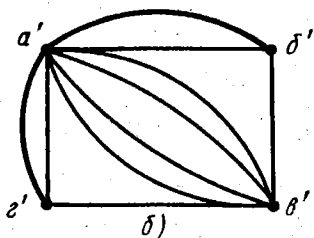
В любом плоском графе с непересекающимися ветвями имеется наружный контур, разделяющий всю плоскость на две области — внешнюю и внутреннюю. Например, в графе на рис. 2.27, *и* такой наружный контур образован ветвями 2, 4, 6—7. При этом часть контуров плоского графа разбивает внутреннюю область на неперекрывающиеся ячейки. На рис. 2.27, *и* такие внутренние ячейки ограничены контурами 1,2,5, 3,4,5 и 1,3,6—7. Внешнюю область будем рассматривать как еще одну внешнюю неперекрывающуюся ячейку, ограниченную с одной стороны наружным

контуром, а с другой стороны простирающуюся до бесконечности. Можно условно считать, что эта внешняя ячейка ограничена в бесконечности некоей окружностью бесконечно большого радиуса.

7. Дуализация графов. Графы можно подвергать различным преобразованиям, например сжатию. Более сложным преобразованием является дуализация плоского несжатого графа. Для дуализации плоский граф изображают с непересекающимися ветвями. Затем в каждой неперекрывающейся ячейке (включая внешнюю) намечают по одному новому узлу для преобразованного графа. Например, для графа, изображенного на рис. 2.27, *e*, такие новые узлы a' , b' , v' , z' показаны на рис. 2.30, *a*. Далее каждое ребро исходного графа пересекают новым ребром, соединяя им новые узлы в смежных ячейках, как показано цветными линиями на рис. 2.30, *a*. При этом образуется новый граф, который перечерчен на рис. 2.30, *b* в более удобном виде.



a)



b)

Рис. 2.30. Дуальные графы

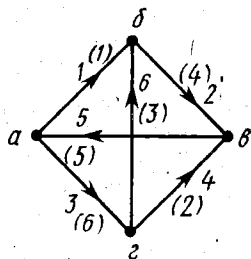


Рис. 2.31. Ориентированный граф

Преобразованный граф является также плоским. Все узлы и устранимые вершины исходного графа расположены во внешней и внутренних ячейках нового графа, которые ограничены его образовавшимися новыми контурами. Это наглядно видно из рис. 2.30, *a*. Таким образом, дуализация плоских графов является взаимным преобразованием их вершин и контуров.

Несжатые плоские графы с одинаковым количеством ребер, в которых вершины одного графа соответствуют контурам другого, называются дуальными графами. В дуальных графах последовательное соединение ребер в одном графе соответствует параллельному соединению ребер в другом графе, как это видно из рис. 2.30.

Цепи с дуальными графами также называются дуальными, если они составлены из дуальных элементов. Процессы в дуальных цепях описываются уравнениями одинаковой структуры, в которых все параметры заменены их дуальными значениями, а напряжения и заменены токами i и наоборот.

Дуализации могут подвергаться также сжатые плоские графы. При этом происходит взаимное преобразование узлов и контуров дуальных графов.

8. Ориентированные графы. Ветвям графа можно приписывать определенные направления по аналогии с выбором положительного направления отсчета токов и напряжений. Выбранные направления ветвей отмечают на графе стрелкой. Полученные при этом ветви называют ориентированными ветвями, а графы с ориентированными ветвями — ориентированными (направленными) графами. В отличие от них рассмотренные графы с неориентированными ветвями называют неориентированными (ненаправленными) графами. Например, неориентированный граф, изображенный на рис. 2.27, к, можно превратить в ориентированный граф, как это сделано на рис. 2.31. Тогда вместо матрицы инцидентий (2.57) для несжатого неориентированного графа (рис. 2.27, з) получается новая матрица инцидентий для сжатого ориентированного графа (рис. 2.31*):

$$(A_n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ a \\ z \end{matrix} \quad (2.63)$$

Здесь вследствие сжатия графа столбцы ребер заменены столбцами ветвей, а строки вершин — строками узлов. Кроме того, в этой матрице вследствие ориентации ветвей инцидентным коэффициентам приписаны разные знаки: положительный для ветвей, направленных от инцидентного узла, и отрицательный для ветвей, направленных в сторону инцидентного узла. Такой выбор знаков инцидентных коэффициентов соответствует правилу знаков для токов ветвей, оттекающих и притекающих к узлу.

Матрица инцидентий (2.63) может быть получена программным способом непосредственно в ЭВМ по заданной матрице (2.57). Алгоритм перехода от матрицы (2.57) к матрице (2.63) предоставляется найти читателям самостоятельно.

§ 2.6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕПЕЙ

Ряд свойств любой электрической цепи зависит от ее структуры и месторасположения в ней элементов. Такие свойства электрических цепей называют **топологическими** (от греч. *τοπος* — место, *λόγος* — слово, смысл). К ним относится, например, установленное правило, что число контуров в цепи не может быть меньше числа ее ветвей.

* Здесь цифрами в скобках обозначена новая нумерация ветвей, которая вводится ниже.

1. Топологические матрицы. Топологические свойства цепей изучают по их графам, называемым также *топологическими графами*. Некоторые из этих свойств рассматривались в § 2.5. В частности, такие свойства цепей описываются формулами (2.58) — (2.62), которые могут быть названы топологическими формулами. Соответственно матрицы инцидентий (2.56), (2.57) и (2.63) называются *топологическими матрицами*.

С помощью топологических матриц можно описывать не только структуру цепи, но и основные законы токопрохождения, связанные с топологическими свойствами цепей. Например, законы Кирхгофа связаны с такими топологическими понятиями, как узлы, ветви и контуры графов. Для описания этих законов в топологической форме следует ввести понятия матриц-столбцов токов и напряжений, а также нулевой матрицы столбца:

$$(i) = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_N \end{pmatrix} = (i_1, i_2, \dots, i_N)^T, \quad (u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T,$$

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)^T. \quad (2.64)$$

Здесь i_k — токи ветвей; u_k — напряжения ветвей; $N = n_b$ — количество ветвей, нулевая матрица имеет N строк, а верхним индексом «Т» обозначены транспонированные матрицы, т. е. матрицы, в которых k -е столбцы и k -е строки переставлены местами (здесь $k = 1$).

Например, для мостовой схемы с шестью ветвями (см. рис. 2.19), которая имеет ориентированный граф, изображенный на рис. 2.31, матрицы (2.64) имеют вид

$$(i) = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)^T, \quad (u) = (u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)^T, \quad (0) = (000000)^T. \quad (2.65)$$

На использовании топологических матриц основаны топологические методы расчета цепей, называемые также *матричными методами*.

2. Первый закон Кирхгофа в топологической форме. Граф мостовой схемы имеет матрицу инцидентий (2.63). Рассмотрим произведение этой матрицы на матрицу токов (2.65):

$$(A_i)(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)^T. \quad (2.66)$$

Перемножать матрицы надо по правилу умножения строки на столбец, которое заключается в умножении каждого элемента строки первой матрицы на соответствующий элемент столбца второй матрицы и сложении полученных произведений. По этому правилу произведение матриц (2.66) дает следующую матрицу-столбец:

$$(A_{ii})(i) = \begin{pmatrix} -i_1 + i_3 - i_5 \\ -i_1 + i_2 - i_6 \\ -i_2 - i_4 + i_5 \\ -i_3 + i_4 + i_6 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Из графа на рис. 2.31 видно, что каждая строка матрицы (2.67) представляет собой алгебраическую сумму токов, сходящихся соответственно в узлах a , b , v , z . С другой стороны, по первому закону Кирхгофа (2.35) каждая из этих сумм равна нулю:

$$\begin{aligned} i_1 + i_3 - i_5 &= 0, \\ -i_1 + i_2 - i_6 &= 0, \\ -i_2 - i_4 + i_5 &= 0, \\ -i_3 + i_4 + i_6 &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

С учетом этих уравнений матричное произведение (2.67) можно приравнять нулевой матрице (2.64), поскольку равенство матриц означает равенство их элементов:

$$(A_{ii})(i) = (0). \quad (2.69)$$

Таким образом, матричное уравнение (2.69) идентично системе уравнений (2.68), т. е. описывает в матричной форме систему уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для всех узлов мостовой схемы. Разумеется, уравнение (2.69), которое записано в общем виде, справедливо для любой цепи при соответствующих значениях матрицы токов ветвей и инцидентной матрицы.

3. Узловые матрицы. Нетрудно видеть, что любое из уравнений (2.68) может быть получено сложением трех остальных уравнений. Это объясняется тем, что часть токов ветвей входит в складываемые уравнения дважды, но с противоположными знаками. После их приведения остаются только те токи, которые входят с противоположными знаками в оставшееся уравнение. Таким образом, из четырех уравнений (2.68) независимыми являются только три. Аналогично, в общем случае произвольной цепи, содержащей n_y узлов, взаимно независимыми являются $n_y - 1$ уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа. Поэтому и матричное уравнение (2.69) является избыточным, поскольку оно распадается на n_y алгебраических уравнений. Избыточность системы уравнений (2.68) устраняется, если для одного из узлов цепи не составлять уравнения по первому закону Кирхгофа. Остающаяся при этом система уравнений также может быть записана в матричной форме, если в матрице инцидентий вычеркнуть какую-нибудь строку. При таком вычеркивании из матрицы инцидентий получается матрица соединений, или узловая матрица цепи (A_y). Например, при вычеркивании последней строки в матрице (2.63) получается следующая узловая матрица:

$$(A_y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \quad (2.70)$$

При использовании узловых матриц избыточная система уравнений по первому закону Кирхгофа описывается матричным уравнением, аналогичным (2.69):

$$(A_y)(i) = (0). \quad (2.71)$$

В случае узловой матрицы (2.70) уравнение (2.71) идентично избыточной системе из первых трех уравнений (2.68).

4. Сечения графа. Найденное выше количество независимых уравнений по первому закону Кирхгофа как раз соответствует числу ветвей дерева (2.59). Это позволяет заменить соотношение (2.71) другим избыточным матричным уравнением, используя вместо узловой матрицы другую топологическую матрицу, связанную с ветвями дерева графа. Для этого вводят топологическое понятие сечений графа.

Если узел или часть узлов ориентированного графа окружить замкнутой линией, то некоторые ветви графа обязательно пересекут эту линию. Ее всегда можно выбрать так, что каждая из указанных ветвей пересечет эту линию только один раз. Такие линии будем называть секущими. Например, для графа мостовой схемы (рис. 2.31) некоторые из секущих линий показаны пунктиром на рис. 2.32, где жирными линиями отмечены ветви выбранного дерева.

Сечением графа называют совокупность ветвей, пересеченных выбранной секущей линией. Главным сечением называют сечение графа, содержащее одну (и только одну) ветвь дерева графа. Например, с учетом нумерации ветвей на рис. 2.31 для секущих линий 1 и 1' (рис. 2.32) получаем сечение из ветвей 1, 3, 5, а для секущей линии 5 — сечение из ветвей 3, 4, 6. При этом первое из указанных сечений является главным, а второе таковым не является, поскольку оно включает две ветви дерева (4 и 6).

Матрицей главных сечений (матрицей сечений) называют таблицу, составленную по типу матрицы инциденций (2.63), в которой строки узлов заменены строками всех главных сечений по числу ветвей дерева (2.58). При этом в строке главного сечения проставляют 0 для ветвей, не входящих в это сечение, +1 для ветвей, пересекающих соответствующую секущую линию в том же направлении, что и ветвь дерева этого сечения (внутри или наружу), и -1 для ветвей другого направления, входящих в это сечение. Например, для графа на рис. 2.32 с его выбранным деревом матрица главных сечений имеет вид

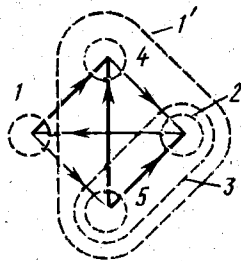


Рис. 2.32. Сечения графа

$$(A_{гс}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (2.72)$$

Здесь строки главных сечений пронумерованы в соответствии с нумерацией секущих линий на рис. 2.32, а номера ветвей обозначены по рис. 2.31.

В матрице (2.72) можно упорядочить расположение столбцов, как это сделано в § 2.6.6. Однако при любой ее структуре матрицу главных сечений используют для описания первого закона Кирхгофа.

5. Первый закон Кирхгофа для главных сечений. Если матрицу (2.72) умножить на матрицу токов (2.64), то вместо (2.71) получим другое избыточное матричное уравнение:

$$(A_{гс})(i) = (0). \quad (2.73)$$

Действительно, это соотношение по числу ветвей дерева (2.59) для данного графа распадается на три алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} i_1 + i_3 - i_5 &= 0, \\ i_2 + i_4 - i_5 &= 0, \\ -i_2 - i_3 + i_5 + i_6 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь первое уравнение совпадает с первым уравнением (2.68), второе уравнение соответствует третьему уравнению (2.68) с измененными знаками, а третье уравнение является суммой двух последних уравнений (2.68). Указанное изменение знаков во втором уравнении обусловлено новым правилом знаков для ветвей главного сечения, а сложение двух последних уравнений (2.68) — тем, что секущая линия 3 (рис. 2.32) охватывает два узла. Аналогично из уравнений (2.68) матрица главных сечений ($A_{гс}$) может быть получена путем алгебраического сложения соответствующих строк матрицы инцидентий ($A_{и}$).

Согласно уравнению (2.73) *первый закон Кирхгофа (2.35) получается справедливым не только для токов ветвей, сходящихся в узле, но и для токов ветвей, входящих в любое сечение графа, в том числе в сечение, объединяющее ветви нескольких узлов.* При этом избыточное матричное уравнение (2.73) выражает первый закон Кирхгофа для токов ветвей, входящих во все главные сечения. Это уравнение записано в общем виде и справедливо для произвольной цепи.

6. Свойства матриц главных сечений. Рассмотрим подробнее основные свойства матриц ($A_{гс}$). Как было отмечено, они могут быть получены путем алгебраического сложения строк матрицы инцидентий. Чтобы знать, какие строки следует складывать, надо предварительно наметить главные сечения. Однако без такой операции можно обойтись, если перенумеровать ветви графа, присвоив первые номера ветвям выбранного дерева, а последующие

номера — хордам этого дерева. Такая упорядоченная нумерация отмечена на рассмотренном графе (см. рис. 2.31) цифрами в скобках. При этом топологические матрицы (2.70) и (2.72) принимают вид

$$(A_y) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a \\ \beta \\ \theta \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (A_{rc}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \quad (2.74)$$

В этих матрицах столбцы ветвей дерева образуют квадратные подматрицы дерева (A_d) , $(A_d)_{rc}$, а столбцы хорд — подматрицы хорд (A_x) , $(A_x)_{rc}$, которые в общем случае не являются квадратными. Подматрицы второй матрицы (2.74) будем называть подматрицами главных сечений.

Важнейшей особенностью матрицы главных сечений (2.74) является то, что ее подматрица дерева равна единичной матрице (1) соответствующего порядка. В рассматриваемом случае

$$(A_d)_{rc} = \begin{pmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Отмеченное свойство обусловлено самим выбором нумерации главных сечений, совпадающих с нумерацией ветвей дерева. С учетом этого обстоятельства матрицы (2.74) могут быть записаны в следующем общем виде:

$$(A_y) = ((A_d)(A_x)), \quad (A_{rc}) = ((1)(A_x)_{rc}). \quad (2.75)$$

Использование подматриц узловой матрицы позволяет формализовать составление матрицы главных сечений без построения главных сечений. Для этого достаточно вспомнить, что единичная матрица получается в результате перемножения обратных матриц: $(A_d^{-1})(A_d) = (A_d)(A_d^{-1}) = (1)$. Узловая матрица может быть умножена на (A_d^{-1}) только слева, поскольку она имеет два функциональных столбца-подматрицы. Отсюда получаем

$$(A_d^{-1})(A_y) = (A_d^{-1})((A_d)(A_x)) = ((1)((A_d^{-1})(A_x))). \quad (2.76)$$

Сопоставляя матрицу главных сечений (2.75) с равенством (2.76), находим искомую матрицу и ее подматрицу хорд:

$$(A_{rc}) = (A_d^{-1})(A_y), \quad (A_x)_{rc} = (A_d^{-1})(A_x). \quad (2.77)$$

Справедливость этих общих выражений легко устанавливается и в приведенном примере. Для этого рассмотрим подматрицу дерева

$$(A_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

узловой матрицы (2.74). Определение обратной матрицы производится в четыре этапа. Сначала находим определитель подматрицы дерева

$$|A_d| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Такой ненулевой определитель присущ так называемым неособенным матрицам. Обратные матрицы существуют именно в случае неособенных матриц.

Затем определяем дополнительную матрицу, которая образуется из подматрицы дерева заменой ее элементов на их алгебраические дополнения:

$$(\bar{A}_d) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим взаимную матрицу дерева путем транспонирования дополнительной матрицы:

$$(\bar{A}_d) = (\bar{A}_d)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, определяем обратную матрицу дерева:

$$(A_d^{-1}) = (\bar{A}_d) / |A_d| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на узловую матрицу (2.74) и на ее подматрицу хорд, получаем соответственно матрицу главных сечений (2.74) и ее подматрицу хорд. Этот результат совпадает с общими выражениями (2.77).

Матричные уравнения (2.71), (2.73) остаются справедливыми и для упорядоченных матриц (2.75), поскольку при упорядочении нумерации ветвей графа соответственно изменяется нумерация токов. Читатель может убедиться в этом на примере матриц (2.70), (2.72) и (2.74).

7. Топологическая форма второго закона Кирхгофа. Матричное уравнение (2.73) не позволяет определить токи всех ветвей, поскольку общее число ветвей (2.58) превышает количество главных сечений, соответствующее числу ветвей дерева (2.59). Однако недостающее число алгебраических уравнений можно составить для напряжений ветвей по второму закону Кирхгофа, учитывая, что напряжения и токи ветвей взаимосвязаны.

Из формулы (2.58) следует, что недостающее количество уравнений по второму закону Кирхгофа соответствует числу хорд (2.61). Чтобы можно было использовать это обстоятельство, вводят понятие главных контуров графа. *Главным называют контур, составленный из ветвей дерева и одной (и только одной) хорды.* Например, для графа мостовой схемы рис. 2.31 с деревом, показанным на рис. 2.32, получаются три главных контура, составленных из ветвей 2, 4, 6 с хордой 2, ветвей 3, 6, 1 с хордой 3 и ветвей 5, 1, 6, 4 с хордой 5.

Из определения главных контуров следует, что их количество определяется числом хорд (2.61). Таким образом, уравнения по второму закону Кирхгофа следует составлять только для главных контуров. Эти уравнения можно записать в матричной форме, введя понятие *матрицы главных контуров (матрицы контуров)*; каждая строка которой описывает состав того или иного главного контура.

Для составления такой матрицы каждый главный контур обходится в направлении входящей в него хорды. При этом ветви, входящие в контур, считаются положительными при совпадении их ориентации с направлением обхода и отрицательными — в противном случае. Положительным ветвям приписывают коэффициент $+1$, отрицательным — коэффициент -1 , а ветвям цепи, не входящим в главный контур, — коэффициент 0 . Из этих коэффициентов, расположенных в порядке нумерации ветвей цепи, образуется строка главного контура. Эти строки, расположенные в порядке нумерации главных контуров, образуют искомую матрицу. Например, для рассмотренных главных контуров мостовой схемы матрица главных контуров имеет вид.

$$(A_{гк}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \quad (2.78)$$

Здесь строки главных контуров пронумерованы в соответствии с номерами входящих в них ветвей-хорд.

Как и матрица главных сечений, матрица главных контуров может быть получена формализованно, без выделения главных контуров. Формализованное составление матрицы главных контуров заключается в комбинации столбца хорды с соответствующими столбцами ветвей дерева матрицы инцидентий или узловой матрицы. Признаком необходимой комбинации является получение нулевой матрицы столбца при алгебраическом сложении столбцов искоемых ветвей. При этом ветвям, столбцы которых суммируются со знаком « $+$ », приписывают коэффициент $+1$, ветвям, столбцы которых суммируются со знаком « $-$ », — коэффициент -1 , а ветвям, не входящим в искомую комбинацию, — коэффициент 0 . В основе указанного признака нужной комбинации ветвей лежит то обстоятельство, что в любом замкнутом контуре каждая ветвь направлена от одного узла к другому.

Поэтому ее инцидентные коэффициенты в искомым столбцах матриц (A_x) и (A_y) фигурируют дважды с противоположными знаками. Описанное правило составления матрицы главных контуров можно проверить на частном примере матриц (2.78) и (2.63), (2.70), что предоставляется читателю сделать самостоятельно.

Если матрицу (2.78) умножить на матрицу напряжений (2.64), то получим матричное уравнение, описывающее второй закон Кирхгофа в топологической форме:

$$(A_{гк})(u) = (0). \quad (2.79)$$

Это соотношение эквивалентно трем алгебраическим уравнениям, составленным для мостовой цепи по второму закону Кирхгофа (2.43):

$$\begin{aligned} u_2 - u_4 + u_6 &= 0, \\ -u_1 + u_3 + u_6 &= 0, \\ u_1 + u_4 + u_5 - u_6 &= 0. \end{aligned}$$

В общем виде матричное уравнение (2.79) справедливо для произвольной цепи.

8. Свойства матриц главных контуров. Рассмотрим подробнее основные свойства матриц $(A_{гк})$. Как и для матриц главных сечений, примем новую нумерацию ветвей, обозначенную цифрами в скобках на рис. 2.31. Тогда матрица (2.78) преобразуется таким образом:

$$(A_{гк}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \quad (2.80)$$

$(A_d)_{гк} \qquad (A_x)_{гк}$

Здесь столбцы ветвей дерева образуют подматрицу дерева главных контуров $(A_d)_{гк}$, а столбцы хорд — подматрицу хорд главных контуров $(A_x)_{гк}$. Подматрица $(A_d)_{гк}$ имеет в общем случае разное число строк и столбцов, а *квадратная подматрица хорд $(A_x)_{гк}$ всегда равна единичной матрице соответствующего порядка*. Последнее обстоятельство обусловлено упорядоченной нумерацией ветвей, при которой нумерация главных контуров совпадает с нумерацией хорд. Таким образом, в общем случае матрица главных контуров разбивается на две подматрицы:

$$(A_{гк}) = ((A_d)_{гк}(1)). \quad (2.81)$$

Матричное уравнение (2.79) остается справедливым и для упорядоченной матрицы главных контуров (2.81). Читателю полезно убедиться в этом на примере упорядоченной матрицы (2.80).

Сравним подматрицу дерева главных контуров с подматрицей хорд главных сечений. В первой из них число столбцов, а во второй число строк равно количеству ветвей дерева. Число же строк

в подматрице $(A_d)_{гк}$ и число столбцов в подматрице $(A_x)_{гс}$ равно числу хорд. Поэтому при транспонировании одной из этих подматриц количество ее строк и столбцов становится таким же, как и в другой подматрице. Такие матрицы можно складывать.

Покажем, что сумма указанных подматриц равна нулю:

$$(A_d)_{гк} + (A_x)_{гс}^T = (0), \quad (A_d)_{гк}^T + (A_x)_{гс} = (0), \quad (2.82)$$

где (0) — нулевые матрицы с соответствующими числами строк и столбцов.

На пересечении некоторого k -го столбца и l -й строки подматриц $(A_d)_{гк}$, $(A_x)_{гс}^T$ стоят коэффициенты k -й ветви дерева и l -й хорды, входящих или не входящих в состав соответственно l -го главного контура и k -го главного сечения. Аналогична также структура подматриц $(A_d)_{гк}^T$, $(A_x)_{гс}$.

На рис. 2.33 изображены фрагменты графа некоторой цепи. Здесь пунктирными окружностями показаны секущие линии для некоторых главных сечений, а пунктирными овалами — соответствующие главные контуры. Из рис. 2.33, а видно, что если k -я

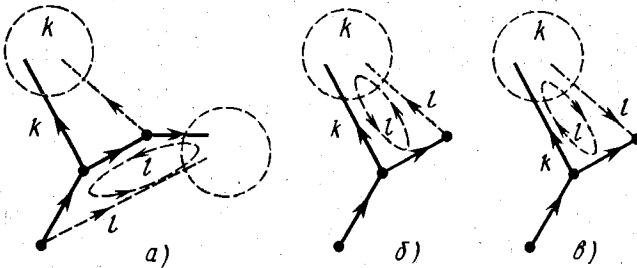


Рис. 2.33. Фрагменты графа цепи

ветвь дерева не принадлежит l -му главному контуру, то и l -я хорда не входит в состав k -го главного сечения. При этом одноименные коэффициенты A_{lk} подматриц $(A_d)_{гк}$ и $(A_x)_{гс}^T$ равны нулю. На рис. 2.33, б, в показаны k -я ветвь дерева и l -я хорда, входящие в состав как k -го главного сечения, так и l -го главного контура. При этом, если в матрице $(A_d)_{гк}$ коэффициент $A_{lk} = -1$, то в матрице $(A_x)_{гс}^T$ одноименный коэффициент $A_{lk} = 1$ (рис. 2.33, б). Наоборот, если $A_{lk} = 1$ в матрице $(A_d)_{гк}$, то в матрице $(A_x)_{гс}^T$ соответственно $A_{lk} = -1$ (рис. 2.33, в). Аналогично соотношения имеют место и в матрицах $(A_d)_{гк}^T$, $(A_x)_{гс}$.

Таким образом, в любых возможных случаях одноименные коэффициенты в складываемых подматрицах (2.82) дают в сумме нуль. Тем самым доказана справедливость соотношений (2.82). В рассмотренном частном случае справедливость этих соотношений подтверждается значениями матриц (2.80) и (2.74), где

$$(A_d)_{гк} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A_x)_{гс} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда}$$

$$(A_d)_{гк}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, (A_x)_{гс}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из первого равенства (2.82) определяют искомую подматрицу дерева главных контуров

$$(A_d)_{гк} = -(A_x)_{гс}^T = -(A_x)^T (A_d^{-1})^T. \quad (2.83)$$

Здесь последнее равенство написано на основании второго равенства (2.77) с учетом того, что при транспонировании произведения матриц транспонированные матрицы-сомножители изменяют порядок следования на обратный. Таким образом, как и в случае матрицы главных сечений, формализованное составление матрицы главных контуров возможно с помощью подматриц узловой матрицы.

В заключение отметим, что на основании равенств (2.82) можно доказать еще одно свойство топологических матриц (2.75) и (2.81):

$$(A_{гк})(A_{гс})^T = (0), (A_{гс})(A_{гк})^T = (0). \quad (2.84)$$

Доказательство равенств (2.84) предоставляется читателю сделать самостоятельно.

Ранее отмечалось, что построение дерева графа можно осуществлять машинным способом. Поскольку матрицы главных сечений и главных контуров однозначно соответствуют выбранному дереву, можно составить программу определения этих матриц на ЭВМ. Такое определение предельно упрощается при использовании соотношений (2.75), (2.77) и (2.81), (2.83). Таким образом, в конечном счете матричные уравнения (2.73) и (2.79) могут быть составлены машинным способом. Для решения же таких уравнений ЭВМ обеспечиваются специальными стандартными программами.

Вопросы для самоконтроля

- 2.1. Какими уравнениям связаны напряжения и токи в линейных, параметрических и нелинейных пассивных элементах?
- 2.2. Могут ли иметь форму прямоугольных импульсов напряжение на емкости и ток в индуктивности?
- 2.3. Какое сопротивление при $u < 0$ имеет элемент с вольт-амперной характеристикой, показанной на рис. 2.3, 2?
- 2.4. Какую форму имеет ток в диссипативном элементе и в индуктивности при напряжении, заданном графиком на рис. 2.5?
- 2.5. Как трансформируются задающие напряжения и токи в идеальном трансформаторе?
- 2.6. Как изменятся напряжения на каждом из элементов цепи с источником тока (см. рис. 2.14, б), если последовательно с ним включить идеальный источник напряжения e ?
- 2.7. Какое входное сопротивление в режимах холостого хода и короткого замыкания имеют трансформатор, конвертор и инвертор сопротивлений?
- 2.8. Как можно упростить цепь, содержащую последовательно включенные идеальный источник напряжения и идеальный источник тока?

2.9. Как можно упростить цепь, содержащую параллельно включенные идеальный источник напряжения и идеальный источник тока?

2.10. Как изменится напряжение на идеальном источнике тока, если последовательно с ним включить сопротивление R ?

2.11. Как изменится ток через идеальный источник напряжения, если параллельно с ним включить индуктивность L ?

2.12. При каком условии цепь может содержать треугольник, составленный из идеальных источников напряжения?

2.13. Можно ли элементы 2 и 3 на рис. 2.17, *е* считать соединенными последовательно, если через них проходит одинаковый ток?

2.14. Могут ли активные элементы на рис. 2.17, *г* являться идеальными источниками напряжения?

2.15. Почему нельзя соединять последовательно идеальные источники тока?

2.16. Какие линейные двухполюсники, не содержащие катушки индуктивности, обладают свойствами идеального индуктивного элемента?

2.17. Какие линейные двухполюсники обладают свойствами отрицательного диссипативного сопротивления, отрицательной диссипативной проводимости, отрицательной индуктивности и отрицательной емкости?

2.18. Какие 35 двухполюсников содержит цепь, изображенная на рис. 2.17, *а*?

2.19. Какими 60-ю способами можно выделить четырехполюсник в цепи, изображенной на рис. 2.17, *е*?

2.20. Сколько треугольников содержит цепь, изображенная на рис. 2.17, *д*?

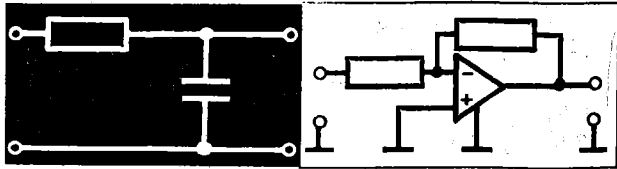
2.21. Сколько звезд содержит цепь, изображенная на рис. 2.17, *а*?

2.22. Какой энергетический смысл имеют первый и второй законы Кирхгофа?

2.23. Можно ли все возможные деревья графа построить из одного корня?

2.24. Сколько различных деревьев имеет граф мостовой цепи?

2.25. Какие главные сечения и главные контуры имеет граф мостовой цепи с деревьями, изображенными на рис. 2.28?



Основные методы расчета электрических цепей

Задачи по расчету цепей бывают двух типов. В одних задачах задаются свойства цепи, которые обеспечивают необходимые изменения сигналов. При этом могут быть заданы, например, допустимые нормы искажения сигналов, частотные свойства цепей и т. п. По заданным свойствам должны быть определены требуемые схема цепи и параметры ее элементов. Такие задачи называют задачами *синтеза цепей*. Задачи синтеза являются весьма важными при конструировании устройств связи. Они относятся к категории наиболее сложных задач и рассматриваются в последней главе настоящего курса.

В других задачах схема цепи и параметры ее элементов задаются в качестве исходных данных. В этом случае подлежат анализу свойства цепи, например степень искажений сигналов, частотные свойства и т. п. Такие задачи называют задачами *анализа цепей*. На них базируется и синтез цепей. Эти задачи рассматриваются в последующих главах курса.

Анализ свойств цепей связан с определением напряжений и токов в заданной цепи. Такое определение составляет содержание основных методов расчета цепей, которые рассматриваются в настоящей главе.

§ 3.1. РАСЧЕТ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В электрических цепях, используемых в устройствах связи, сигналы могут иметь сколь угодно сложную форму. Расчет цепей при этом упрощается, если сигналы представляются в виде спектра, содержащего гармонические спектральные составляющие (см. § 1.3.2). Тогда линейные цепи следует рассчитывать при гармонических напряжениях и токах в соответствии с принципом суперпозиции (см. § 1.4.2). Именно поэтому в настоящей главе будем акцентировать внимание на расчете гармонических напряжений и токов, включая постоянные напряжения и токи, как предельный (вырожденный) случай гармонических колебаний (см. § 1.3.2).

Указанное упрощение расчета получается вследствие того, что в линейных цепях гармонические колебания не изменяются по форме и по частоте (см. § 1.4.5). Однако

сам расчет гармонических напряжений и токов в линейных цепях получается достаточно простым только в том случае, когда используется представление гармонических колебаний в комплексной форме.

1. Символический метод. Для представления гармонических колебаний в комплексной форме введем понятие операторов поворота векторов.

Рассмотрим единичный вектор 1 , направленный в декартовой системе координат вдоль положительной оси (рис. 3.1, а). *Поворот вектора на угол $\pi/2$ будем рассматривать как его умножение на оператор поворота j : $1 \cdot j$.* Здесь поворот вектора осуществляется в положительном направлении, за которое принято направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки.

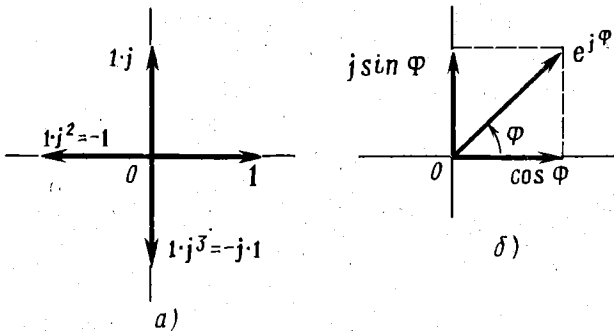


Рис. 3.1. Операторы поворота векторов

Еще один поворот единичного вектора на угол $\pi/2$ дает единичный вектор, направленный вдоль отрицательной оси, т. е. вектор $-1 \equiv 1 \cdot (-1) = 1 \cdot j \cdot j = 1 \cdot j^2$. Отсюда следует, что $j^2 = -1$ и $j = \sqrt{-1}$, т. е. *оператор поворота вектора на угол $\pi/2$ представляет собой мнимую единицу.* Это позволяет рассматривать плоскость, в которой поворачивается вектор, как комплексную плоскость с вещественной осью абсцисс и мнимой осью ординат.

Поворот единичного вектора 1 на произвольный угол Φ будем рассматривать как его умножение на обобщенный оператор поворота $e^{j\Phi}$ (рис. 3.1, б). Тогда $j = e^{j\pi/2}$; $-1 = e^{\pm j\pi}$ и $-j = e^{j3\pi/2} = e^{-j\pi/2}$. Здесь отрицательный знак угла $\Phi = -\pi$ и $\Phi = -\pi/2$ означает поворот вектора в отрицательном направлении, т. е. в направлении вращения часовой стрелки.

Если на операторы поворотов распространить правило сложения векторов (правило параллелограмма), то оператор может быть представлен в виде суммы векторов, являющихся его проекциями на вещественную и мнимую оси. Следовательно, на комплексной плоскости оператор поворота $e^{j\Phi}$ является комплексной величиной, что и выражается формулой Эйлера:

$$e^{j\Phi} = \cos \Phi + j \sin \Phi. \quad (3.1)$$

Модулем и аргументом этой комплексной величины являются соответственно длина повернутого единичного вектора и угол его поворота:

$$|e^{j\Phi}| = \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi} = 1, \quad \arg e^{j\Phi} = \arctg \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \Phi. \quad (3.2)$$

Следует обратить внимание, что при нахождении модуля (3.2) комплексной величины (3.1) берут сумму квадратов ее вещественной и мнимой составляющих без учета множителя $j^2 = -1$. Это вытекает из геометрического правила сложения сторон параллелограмма (или прямоугольного треугольника) на рис. 3.1, б, где оператор j определяет лишь ориентацию соответствующей стороны параллелограмма (или прямоугольного треугольника).

Для перехода к гармоническим колебаниям (1.14) опустим нулевые индексы и примем угол Φ в формуле (3.1) равным фазе колебаний (1.10):

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi). \quad (3.3)$$

Умножив обе части равенства (3.3) на U_m , получим комплексную величину, которую называют *комплексным напряжением* и отмечают точкой над буквенным обозначением величины:

$$\dot{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi)} = u + j\tilde{u}, \quad (3.4)$$

где

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi), \quad (3.5)$$

$$\tilde{u} = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.6)$$

Комплексное напряжение (3.4) отображают на плоскости комплексной переменной \dot{u} вращающимся вектором длиной U_m (рис. 3.2, а). Вращение этого вектора происходит с угловой скоростью ω , определяемой соотношением (1.11), поскольку угол его поворота Φ увеличивается с течением времени пропорционально ω . Такое изображение колебаний называется *векторной диаграммой*.

Формула (3.5) повторяет соотношения (1.9), (1.10) для гармонических колебаний и представляет здесь проекцию вращающегося вектора на вещественную ось. Проекция (3.6) этого вектора на мнимую ось тоже описывает гармонические колебания,

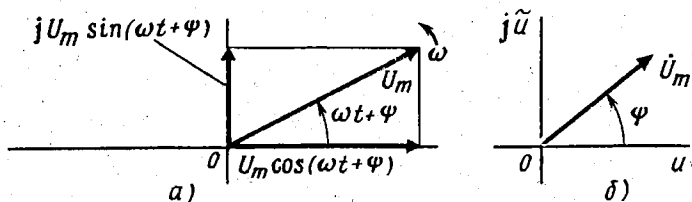


Рис. 3.2. Векторное изображение гармонических колебаний

сдвинутые по фазе на угол $\pi/2$. Эти колебания будем называть *сопряженными по фазе* относительно колебаний (3.5).

Переход от гармонических колебаний (3.5) к их комплексному значению (3.4) и обратный переход ($u \rightleftharpoons \dot{i}$) называют *символическим методом расчета гармонических колебаний*, а величину \dot{i} — их *символическим отображением*. Символический метод упрощает расчеты за счет использования показательной функции, описывающей комплексную величину (3.4).

2. Метод комплексных амплитуд. В ряде случаев расчеты упрощаются еще больше, если комплексное напряжение (3.3) представить в другом виде:

$$\dot{i} = U_m e^{j\omega t} e^{j\psi},$$

или

$$\dot{i} = \dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad (3.7)$$

где

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}. \quad (3.8)$$

Величину $e^{j\omega t}$ называют *временным множителем*, $e^{j\psi}$ — *фазовым множителем*, а \dot{U}_m — *комплексной амплитудой гармонических колебаний*.

Для любых гармонических колебаний с заданной частотой ω , которая в линейной цепи не изменяется (см. § 1.4.5), временной множитель одинаков. Таким образом, комплексная амплитуда дает полную информацию о параметрах гармонических колебаний и их изменениях в линейной цепи. Поэтому на векторной диаграмме вместо вращающегося вектора длиной U_m (рис. 3.2, а) принято показывать неподвижный вектор, обозначаемый \dot{U}_m (рис. 3.2, б). Угол поворота этого вектора на плоскости комплексной переменной \dot{i} соответствует начальной фазе колебаний ψ .

Рассмотрение вместо гармонических колебаний (3.5) их комплексной амплитуды (3.8) называют *методом комплексных амплитуд*. При пользовании этим методом все промежуточные замены переменных могут не производиться. В этом случае делается непосредственный переход $u \rightleftharpoons \dot{U}_m$.

3. Законы Кирхгофа в комплексной форме. Покажем на примере законов Кирхгофа применение символического метода и метода комплексных амплитуд. В соответствии с символическим методом уравнения (2.36) и (2.48) могут быть переписаны для комплексных значений токов и напряжений:

$$\sum_{k=1}^{n_1} I_{mk} e^{j\omega t} = \sum_{k=1}^{n_1} J_{mk} e^{j\omega t};$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} \dot{U}_{mk} e^{j\omega t} = \sum_{k=1}^{n_2} \dot{E}_{mk} e^{j\omega t}.$$

где $I_{mk} = I_{mk} e^{j\psi_{ik}}$, $\dot{U}_{mk} = U_{mk} e^{j\psi_{ik}}$ — комплексные амплитуды k -х токов и напряжений; $J_{mk} = J_{mk} e^{j\psi_{ik}}$, $\dot{E}_{mk} = E_{mk} e^{j\psi_{ik}}$ — комплексные амплитуды k -х задающих токов и напряжений.

После сокращения на временной множитель полученные уравнения принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n_i} \dot{I}_{mk} = \sum_{k=1}^{n_j} \dot{J}_{mk}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n_u} \dot{U}_{mk} = \sum_{k=1}^{n_e} \dot{E}_{mk}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9), (3.10) могли быть записаны и сразу на основании законов Кирхгофа (2.36), (2.48) в соответствии с методом комплексных амплитуд.

Аналогично суммарный ток двухполюсника (2.37) при параллельном соединении элементов и суммарное напряжение (2.44) при последовательном соединении элементов могут быть записаны в комплексной форме:

$$\dot{I}_m = \sum_{k=1}^m \dot{I}_{mk}, \quad \dot{U}_m = \sum_{k=1}^m \dot{U}_{mk}. \quad (3.11)$$

Сложение комплексных амплитуд в соответствии с формулами (3.11) может производиться и в векторной форме с учетом векторного изображения гармонических колебаний (рис. 3.2, б). Такое сложение производится по правилу параллелограмма. Для примера на рис. 3.3, а показано векторное сложение двух гармонических колебаний в соответствии с формулой (3.11). Это сложение можно производить также, совместив начало одного вектора с концом другого (рис. 3.3, б).

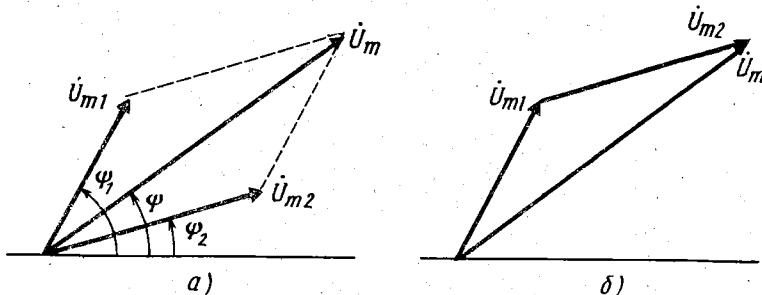


Рис. 3.3. Векторное сложение гармонических колебаний

4. Закон Ома в комплексной форме. Закон Ома (2.1) может быть переписан в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m, \quad \dot{I}_m = G \dot{U}_m, \quad (3.12)$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$, $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ — комплексные амплитуды напряжения и тока в диссипативном элементе: ψ_u , ψ_i — их начальные фазы.

Закон Ома (3.12) справедлив не только для отдельного диссипативного элемента, но и для любого диссипативного двухполюсника, составленного из различных диссипативных сопротивлений, которые соединены друг с другом в тех или иных сочетаниях. В частности, при последовательном и параллельном соединении диссипативных элементов параметры R и G в равенствах (3.12) определяются формулами (2.45), (2.38).

Закон Ома (3.12) может быть переписан отдельно для амплитуд и начальных фаз напряжения и тока. Учитывая, что R и G являются вещественными положительными величинами и $\arg R = \arg G = 0$, из равенств (3.12) получаем

$$U_m = R I_m, \quad I_m = G U_m, \quad \psi_u = \psi_i. \quad (3.13)$$

Согласно последнему равенству напряжение и ток в диссипативном двухполюснике совпадают по фазе, т. е. являются синфазными колебаниями. Таким фазовым соотношениям соответствует векторная диаграмма, показанная на рис. 3.4, а.

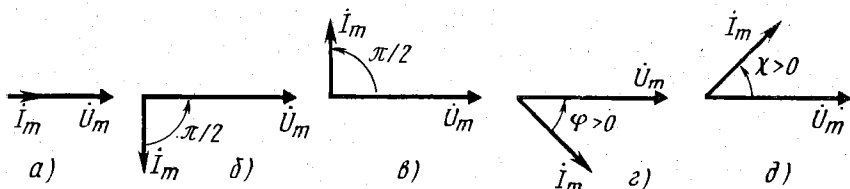


Рис. 3.4. Векторные диаграммы напряжения и тока при различных фазовых сдвигах

Рассмотрим соотношения между гармоническими напряжениями и токами в реактивных элементах. Предварительно заметим, что дифференцирование комплексного напряжения (3.7) и комплексного тока $i = I_m e^{j\omega t}$ означает их умножение на оператор $j\omega$:

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \dot{U}_m \frac{d}{dt} e^{j\omega t}, \quad \frac{di}{dt} = I_m \frac{d}{dt} e^{j\omega t}$$

или

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{u}, \quad \frac{di}{dt} = j\omega I_m e^{j\omega t} = j\omega i. \quad (3.14)$$

Подставляя указанные комплексные величины и их производные (3.14) в первые равенства (2.6) и (2.11), получаем после сокращения на временной множитель:

$$\dot{U}_m = jX I_m, \quad I_m = jB \dot{U}_m, \quad (3.15)$$

где

$$X = X_L = \omega L, \quad X = X_C = -\frac{1}{\omega C}, \quad B = B_L = -\frac{1}{\omega L}, \quad B = B_C = \omega C. \quad (3.16)$$

Учитывая знаки величин (3.16), равенства (3.15) можно переписать отдельно для амплитуд и начальных фаз напряжения и тока:

$$U_m = |X|I_m, I_m = |B|U_m, \psi_u = \psi_i \pm \pi/2. \quad (3.17)$$

В последнем равенстве учтено, что $\operatorname{arg} j = \pi/2$ и $\operatorname{arg} (-j) = -\pi/2$. При этом верхний знак относится к индуктивности, а нижний — к емкости.

Полученные соотношения (3.15) — (3.17) и их сравнение с равенствами (2.6), (2.11) и законом Ома (3.12), (3.14) позволяют сделать три вывода. Во-первых, при использовании символического метода вместо дифференциальных уравнений получаются алгебраические уравнения. Это положение относится к любым соотношениям, описывающим процессы в линейных цепях, и существенно упрощает их расчеты.

Во-вторых, по аналогии с равенствами (3.12), (3.13) соотношения (3.15), (3.17) следует рассматривать как закон Ома для реактивных элементов при гармонических колебаниях. При этом в закон Ома (3.15) входит мнимое реактивное сопротивление jX и мнимая реактивная проводимость jB . Мнимость реактивных параметров означает сдвиг по фазе между напряжением и током на угол $\pm \pi/2$, что и отражается последним равенством (3.17). В случае индуктивности напряжение опережает ток по фазе (рис. 3.4, б), а в случае емкости напряжение отстает по фазе от тока (рис. 3.4, в). Физически такие фазовые сдвиги объясняются природой реактивных сопротивлений и проводимостей (см. § 2.1.5).

В-третьих, вещественные значения (3.16) реактивных сопротивлений и проводимостей являются функциями частоты, обращаясь в нуль или в бесконечность либо на нулевой, либо на бесконечно большой частоте. Частотные зависимости этих величин для индуктивности показаны на рис. 3.5, а, а для емкости — на рис. 3.5, б. Такой характер частотных зависимостей обусловлен физической природой реактивных сопротивлений и проводимостей (см. § 2.1.5).

Закон Ома (3.15) справедлив для любых реактивных двухполюсников, состоящих из произвольно соединенных реактивных элементов. В этом случае вместо равенств (3.16) получаются более сложные соотношения. В частности, если двухполюсник содержит последовательно или параллельно соединенные реактивные элементы, то соответственно их реактивные сопротивления или проводимости складываются:

$$X = \sum_{k=1}^m X_k, B = \sum_{k=1}^m B_k. \quad (3.18)$$

Эти формулы получаются аналогично равенствам (2.45), (2.38) на основании соотношений (3.11). Однако следует учесть, что в формулах (2.45), (2.38) сопротивления и проводимости складываются арифметически, а в формулах (3.18) — алгебраически.

чески, поскольку реактивные сопротивления и проводимости могут быть как положительными, так и отрицательными.

Диссипативные или реактивные элементы могут соединяться друг с другом не только отдельно. Возможны также комбинированные соединения этих элементов в различных сочетаниях, в частности, последовательное или параллельное соединение двухполюсников с диссипативными и реактивными сопротивлениями или проводимостями, как показано на рис. 3.6, а, б. На этих рисунках \dot{U}_{ma} , I_{ma} и \dot{U}_{mr} , I_{mr} — амплитуды активных и реактивных напряжений и токов, которые соответственно или совпадают по фазе (см. рис. 3.4, а), или сдвинуты по фазе на угол $\pm \pi/2$ (см. рис. 3.4, б, в). При этом, учитывая значения $\dot{U}_m = \dot{U}_{ma} + \dot{U}_{mr}$ (рис. 3.6, а) и $I_m = I_{ma} + I_{mr}$ (рис. 3.6, б), из формул (3.13) и (3.15) получаем закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = \underline{Z} \dot{I}_m, \quad I_m = \underline{Y} \dot{U}_m. \quad (3.19)$$

Здесь \underline{Z} и \underline{Y} являются соответственно комплексным сопротивлением и комплексной проводимостью составного двухполюсника:

$$\underline{Z} = R + jX = 1/\underline{Y}, \quad \underline{Y} = G + jB = 1/\underline{Z}. \quad (3.20)$$

Последние равенства в этих формулах означают, что двухполюсники на рис. 3.6 являются эквивалентными (взаимозаменяемыми) при равенстве их комплексных сопротивлений или проводимостей. Эти параметры не являются векторами, как комплексные амплитуды гармонических колебаний. Поэтому их комплексность отмечается не точкой сверху, а чертой снизу. Как любые комплексные величины, они могут быть выражены в показательной форме:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}, \quad \underline{Y} = Y e^{j\psi}, \quad (3.21)$$

где

$$Z = |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = 1/Y, \quad Y = |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = 1/Z \quad (3.22)$$

— модули \underline{Z} и \underline{Y} , называемые соответственно полным сопротивлением и полной проводимостью двухполюсника:

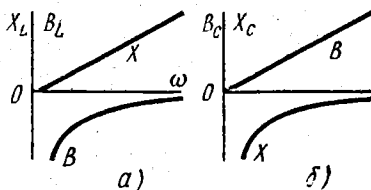


Рис. 3.5. Частотные зависимости сопротивлений и проводимостей реактивных элементов

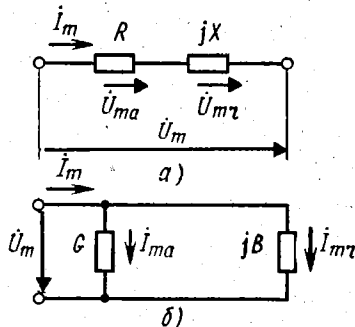


Рис. 3.6. Эквивалентные схемы комплексного сопротивления и комплексной проводимости

$$\varphi = \arg \underline{Z} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = -\chi, \quad \chi = \arg \underline{Y} = \operatorname{arctg} \frac{B}{G} = -\varphi \quad (3.23)$$

— аргументы \underline{Z} и \underline{Y} , которые будем называть *фазой* соответственно *сопротивления* и *проводимости* двухполюсника. Их физический смысл рассматривается ниже.

Закон Ома (3.19) справедлив для произвольного двухполюсника с любым количеством диссипативных и реактивных элементов, соединенных друг с другом в различных сочетаниях. При этом формулы (3.20) — (3.23) сохраняются, но формулы (3.20) приобретают обобщенный смысл. В них

$$R = \operatorname{Re} \underline{Z} = Z \cos \varphi = G/Y^2, \quad G = \operatorname{Re} \underline{Y} = Y \cos \chi = R/Z^2 \quad (3.24)$$

— вещественная, или реальная часть \underline{Z} и \underline{Y} , называемая по-прежнему диссипативным сопротивлением и диссипативной проводимостью;

$$X = \operatorname{Im} \underline{Z} = Z \sin \varphi = -B/Y^2, \quad B = \operatorname{Im} \underline{Y} = Y \sin \chi = -X/Z^2 \quad (3.25)$$

— мнимая часть \underline{Z} и \underline{Y} , называемая по-прежнему реактивным сопротивлением и реактивной проводимостью.

Последние равенства в формулах (3.24) и (3.25) получены путем освобождения от мнимости в знаменателях дробей $\underline{Z} = 1/(G + jB)$, $\underline{Y} = 1/(R + jX)$, соответствующих последним равенствам в формулах (3.20).

Следует подчеркнуть, что мнимость реактивных составляющих сопротивления и проводимости обусловлена множителем j в формулах (3.20). Поэтому R и X , а также G и B не могут складываться непосредственно. Их надо суммировать либо с учетом мнимой единицы j , как в равенствах (3.20), либо квадратично, как в формулах (3.22).

Численное сложение активных и реактивных сопротивлений или проводимостей возможно только в квадратичной форме. Это наглядно видно из треугольников сопротивлений и проводимостей (рис. 3.7), которые геометрически интерпретируют количественные соотношения (3.20) — (3.25). Например, при $R = 3$ Ом и $X = 4$ Ом полное сопротивление двухполюсника равно не 7 Ом, а 5 Ом. Поэтому абсурдными являются выражения $R + X$ и $G + B$! Таким образом, в отличие от арифметического сложения диссипативных сопротивлений (проводимостей) и алгебраического сложения реактивных сопротивлений (проводимостей) диссипативные и реактивные сопротивления (проводимости) складываются геометрически.

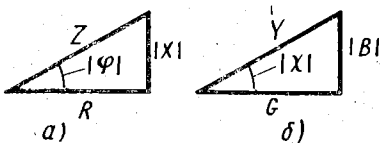


Рис. 3.7. Треугольники сопротивлений и проводимостей

Из формул (2.45), (2.38) и (3.18), (3.20) вытекают правила сложения комплексных сопротивлений и проводимостей соответ-

венно при их последовательном и параллельном соединениях:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^m \underline{Z}_k, \quad \underline{Y} = \sum_{k=1}^m \underline{Y}_k. \quad (3.26)$$

Эти соотношения означают, что *несколько последовательно или параллельно соединенных двухполюсников эквивалентны одному двухполюснику с сопротивлением \underline{Z} или проводимостью \underline{Y}* . Попеременное использование двух формул (3.26) позволяет рассчитывать сопротивление и проводимость двухполюсника со смешанным соединением диссипативных и реактивных элементов, а также двухполюсника, составленного из других двухполюсников с комплексными сопротивлениями и проводимостями при смешанном соединении этих других двухполюсников.

Из закона Ома (3.19) определяют соотношения между амплитудами и начальными фазами напряжения и тока для двухполюсника с комплексным сопротивлением (комплексной проводимостью):

$$U_m = Z I_m, \quad I_m = Y U_m, \quad \psi_u - \psi_i = \varphi, \quad \psi_i - \psi_u = \chi. \quad (3.27)$$

Таким образом, *соотношение между амплитудами напряжения и тока определяется полными сопротивлениями или проводимостями (3.22). Фазовый сдвиг, т. е. разность (сдвиг) фаз между напряжением и током (током и напряжением) определяется фазой сопротивления или проводимости (3.23)*. Как видно из двух последних равенств (3.27), при $\varphi > 0$ напряжение опережает по фазе ток (см. рис. 3.4, г), т. е. ток отстает по фазе от напряжения, а при $\chi > 0$ ток опережает по фазе напряжение (см. рис. 3.4, д), т. е. напряжение отстает по фазе от тока.

Поскольку $X = X(\omega)$, $B = B(\omega)$, *фаза и модуль сопротивления являются функциями частоты: $\varphi = \varphi(\omega)$, $Z = Z(\omega)$* . Это непосредственно вытекает из формул (3.22) и (3.23). Из формулы же (3.24) видно, что у двухполюсника, содержащего реактивные элементы, являются функциями частоты также диссипативное сопротивление и диссипативная проводимость: $R = R(\omega)$, $G = G(\omega)$.

5. Комплексный коэффициент передачи. При использовании комплексных амплитуд не только сопротивления и проводимости, но и другие параметры цепи являются комплексными величинами. Например, если на входе некоторого четырехполюсника (рис. 3.8) действует э. д. с. с комплексной амплитудой $\dot{E}_m = \dot{E}_m e^{j\psi_e}$, а выходное напряжение имеет комплексную амплитуду

$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$, то свойства этого четырехполюсника могут характеризоваться *комплексным коэффициентом передачи*:

$$\underline{K} = \dot{U}_m / \dot{E}_m = K e^{j\theta},$$

$$K = U_m / E_m, \quad \theta = \psi_u - \psi_e. \quad (3.28)$$



Рис. 3.8. Схема четырехполюсника

Величины K и θ определяют соответственно отношение амплитуд и сдвиг фаз между выходным напряжением и э. д. с. источника. Будем называть их соответственно передачей и фазой четырехполюсника.

Входящие в схему четырехполюсника реактивные элементы имеют частотозависимые сопротивления. Поэтому в отличие от вещественного коэффициента передачи, использованного в соотношении (1.25), параметры (3.28) являются функциями частоты:

$$\underline{K} = \underline{K}(\omega), K = K(\omega), \theta = \theta(\omega). \quad (3.29)$$

Первую частотную зависимость (3.29) называют комплексной частотной характеристикой (КЧХ) четырехполюсника. Ее можно изображать одним графиком на комплексной плоскости, как описано в § 8.5.5.

Вторую и третью частотные зависимости (3.29) изображают графически обычным образом в декартовых системах координат (ω, K) и (ω, θ) . График частотной зависимости $K(\omega)$ называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) или частотной характеристикой четырехполюсника, график частотной зависимости $\theta(\omega)$ — фазо-частотной или фазовой характеристикой (ФЧХ). Эти характеристики позволяют судить соответственно о частотных и фазовых искажениях сигналов в четырехполюснике.

Аналогично коэффициенту передачи (3.28) можно рассматривать коэффициент передачи не по напряжению, а по току, если сравнивать выходной ток $I_m = I_m e^{j\psi_i}$ в некоторой цепи с задающим током $J_m = J_m e^{j\psi_j}$ на ее входе:

$$\underline{K}_I = I_m / J_m = K_I e^{j\theta_I}, K_I = I_m / J_m, \theta_I = \psi_i - \psi_j. \quad (3.30)$$

Эти параметры цепи в общем случае также являются частотозависимыми. Любые функции, показывающие в комплексной форме соотношение между выходными и входными величинами цепи, называют ее передаточными функциями.

Разновидностью передаточных функций являются входные и выходные функции, которые определяют в комплексной форме соотношение между напряжениями и токами, измеренными со стороны входных и выходных зажимов цепи. Эти функции описывают входные и выходные сопротивления или проводимости цепи.

6. Активная мощность. Рассмотрим мгновенную активную мощность (2.4) в диссипативном двухполюснике при гармоническом напряжении (3.5). Согласно закону Ома (2.1) или (3.12) этому напряжению соответствует синфазный гармонический ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi) \quad (3.31)$$

с амплитудой I_m , определяемой первыми двумя равенствами (3.13). Из соотношений (2.4), (3.5) и (3.31) находим

$$p_a = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) = GU_m^2 \cos^2(\omega t + \psi).$$

Преобразуем эти равенства, воспользовавшись тригонометрической формулой для косинуса половинного угла:

$$p_a = P + p_{\infty}, \quad (3.32)$$

где

$$P = RI_m^2/2 = GU_m^2/2, \quad (3.33)$$

$$p_{\infty} = P \cos 2(\omega t + \psi). \quad (3.34)$$

Таким образом, *мгновенная активная мощность (3.32) состоит из постоянной составляющей (3.33) и переменной составляющей (3.34)* (рис. 3.9, а). Переменная составляющая изменяется с удвоенной частотой и имеет амплитуду, равную постоянной составляющей (3.33). За счет этого равенства *мгновенная активная мощность не принимает отрицательных значений, а получается пульсирующей, обращаясь в нуль вместе с напряжением и током* (рис. 3.9, б).

Из формулы (3.31) и рис. 3.9, а видно, что за период гармонических колебаний (3.5), (3.31) переменная составляющая мгновенной мощности дважды имеет положительное значение и дважды — отрицательное. Соответствующие же площади на рис. 3.9, а получаются одинаковыми сверху (вертикальная штриховка) и снизу (горизонтальная штриховка). Это означает, что *энергия, расходуемая за период гармонических колебаний переменной составляющей мгновенной активной мощности, равна нулю*. В этом нетрудно убедиться, подставив мощность (3.34) в последнее равенство (1.5) и произведя интегрирование в пределах $[0, T]$.

Таким образом, *постоянная составляющая мгновенной активной мощности является средней за период мощностью $P = \bar{p} = \omega_T/T$* , где ω_T — энергия, расходуемая в течение периода гармонических колебаний. Поэтому расходование энергии при гармонических колебаниях в диссипативном элементе обусловлено фактически постоянной составляющей (3.33) мгновенной активной мощности. За счет же переменной составляющей (3.34) расходование энергии ускоряется (при $p_{\infty} > 0$) или замедляется (при $p_{\infty} < 0$).

Если при постоянном напряжении U через диссипативный элемент протекает постоянный ток $I = U/R = GU$, то активная мощность (1.7) имеет значение

$$P = RI^2 = GU^2. \quad (3.35)$$

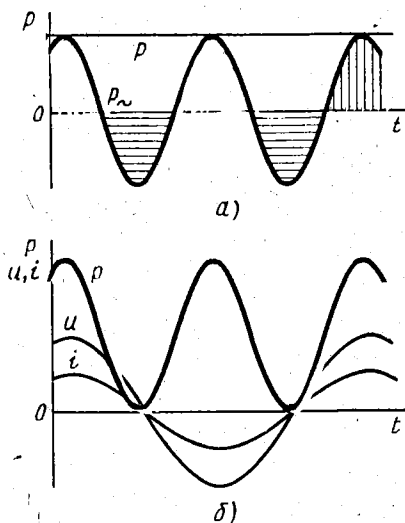


Рис. 3.9. График мгновенной активной мощности при гармонических колебаниях

Сравнивая формулы (3.33) и (3.35), приходим к выводу, что средняя мощность (3.33), расходуемая в диссипативном элементе, равна постоянной активной мощности (3.35), если

$$I = I_m/\sqrt{2}, \quad U = U_m/\sqrt{2}. \quad (3.36)$$

Эти значения постоянного тока и напряжения называют *действующими (эффективными) значениями гармонического тока и напряжения*. Амперметры и вольтметры некоторых типов, предназначенные для измерений гармонических токов и напряжений, измеряют именно их действующие значения.

С учетом формул (3.36) активная мощность (3.33) при гармонических колебаниях может быть записана в виде соотношений (3.35) для действующих значений тока и напряжения.

Как и для комплексных амплитуд, для действующих значений величин (3.36) можно использовать комплексную форму записи:

$$\dot{U} = Ue^{i\psi_u}, \quad \dot{I} = Ie^{i\psi_i}. \quad (3.37)$$

Использование комплексных действующих значений величин (3.37) вместо комплексных амплитуд напряжения и тока означает деление на $\sqrt{2}$ соответствующих уравнений, например (3.9) — (3.12) и (3.15), (3.19). В формулах же типа (3.28), (3.30) при этом делятся на $\sqrt{2}$ числители и знаменатели дробей. Это позволяет не загромождать формулы индексом m для амплитуды колебаний. Аналогично, векторные диаграммы напряжений и токов можно строить для их комплексных действующих значений (3.37).

7. Реактивная мощность. Рассмотрим мгновенную реактивную мощность (1.6) в двухполюснике, имеющем чисто реактивное сопротивление $Z = jX$ ($R = 0$, $Z = |X|$). Учитывая сдвиг фаз между напряжением и током на угол $\pm \pi/2$, запишем их выражения в виде

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi), \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.38)$$

Здесь в соответствии с законом Ома амплитуда тока

$$I_m = U_m/X \quad (3.39)$$

может иметь и положительное (при $X > 0$, $\varphi = \pi/2$), и отрицательное (при $X < 0$, $\varphi = -\pi/2$) значение. *Отрицательное значение амплитуды колебаний означает изменение их фазы на угол π .*

Из формул (3.38) и (1.6) можно определить мгновенную реактивную мощность:

$$p = p_r = U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi),$$

или, с учетом формулы для синуса двойного угла,

$$p_r = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2(\omega t + \psi) = UI \sin 2(\omega t + \psi). \quad (3.40)$$

Здесь последнее равенство написано с учетом формул (3.36).

Графики изменения величин (3.38) и (3.40) при $X > 0$ и $\psi < 0$ показаны на рис. 3.10. Из соотношения (3.40) и рис. 3.10 видно, что *мгновенная реактивная мощность изменяется с удвоенной частотой, как и переменная составляющая мгновенной активной мощности* (3.34). Однако в этом случае нет постоянной составляющей мгновенной мощности. Поэтому *изменение ее знака означает накопление энергии или возвращение в цепь накопленной энергии*, т. е. перекачку энергии в цепь и обратно.

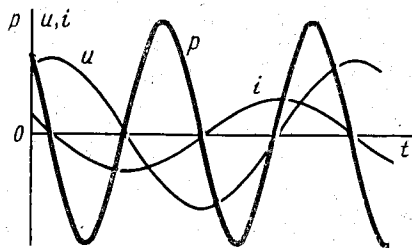


Рис. 3.10. График мгновенной реактивной мощности при гармонических колебаниях

Мгновенная реактивная мощность (3.40) определяется количественно ее амплитудой:

$$P_Q = U_m I_m / 2 = UI = XI^2 = U^2 / X. \quad (3.41)$$

Эта постоянная величина называется *реактивной мощностью*. Она может быть и положительной, и отрицательной в зависимости от знака X (знака I).

Последние равенства (3.41) написаны с учетом формулы (3.39). В них вместо сопротивления X может быть использована реактивная проводимость двухполюсника $B = -1/X$.

8. **Комплексная и полная мощности.** Рассмотрим общий случай, когда двухполюсник имеет комплексное сопротивление (3.20), т. е. содержит диссипативные и реактивные элементы. При этом

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad i = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (3.42)$$

где амплитуды и начальные фазы напряжения и тока связаны соотношениями (3.27).

Из равенств (1.6) и (3.42) определяем мгновенную мощность в рассматриваемом двухполюснике:

$$p = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i). \quad (3.43)$$

Очевидно, она состоит из мгновенных активной и реактивной мощностей, которые расходуются или перекачиваются соответственно диссипативными и реактивными элементами двухполюсника. Если принять, что напряжение u создается источником э. д. с e ($u = e$), то согласно закону сохранения энергии (2.50) мощность (3.43) можно выразить в виде

$$p = ei = \sum_{k=1}^{n_a} u_k i_k + \sum_{k=1}^{n_r} u_k i_k = p_a + p_r, \quad (3.44)$$

где n_a и n_r — количество диссипативных и реактивных элементов; а u_k и i_k — соответственно напряжения и токи этих элементов.

Первая сумма (3.44) определяет суммарную мгновенную активную мощность p_a в двухполюснике, а вторая — суммарную мгновенную реактивную мощность p_r . Поскольку схема двухполюсника не задана, разложение мгновенной мощности (3.44) на различные составляющие $u_k i_k$ может быть произведено бесчисленным количеством способов. Однако при заданных сопротивлении двухполюсника R и X должны существовать определенные количественные соотношения между суммарными мгновенными значениями активной и реактивной мощностей.

Для выяснения указанных количественных соотношений рассмотрим предельные случаи, когда двухполюсник состоит из последовательно соединенных сопротивлений R и jX (см. рис. 3.6, а) и параллельно соединенных проводимостей G и jB (см. рис. 3.6, б). Этим двум случаям соответствуют различные представления мгновенной мощности (3.43) в соответствии с равенством (3.44):

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u i_1 + u i_2. \quad (3.45)$$

Для разложения напряжения u на составляющие u_1 , u_2 и тока i на составляющие i_1 , i_2 можно использовать тригонометрическую формулу для косинуса суммы и разности двух углов. Приняв $\psi_u = \psi_i + \varphi$, из первого равенства (3.42) находим напряжения u_1 и u_2 (см. рис. 3.6, а):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_a = U_m \cos \varphi \cos(\omega t + \psi_i), \\ u_2 &= u_r = -U_m \sin \varphi \sin(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Приняв $\psi_i = \psi_u - \varphi$, из второго равенства (3.42) находим токи i_1 и i_2 (см. рис. 3.6, б):

$$\begin{aligned} i_1 &= i_a = I_m \cos \varphi \cos(\omega t + \psi_u), \\ i_2 &= i_r = I_m \sin \varphi \sin(\omega t + \psi_u). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Из формул (3.42), (3.46) и (3.47) видно, что u_1 и i_1 , а также u_2 и i_2 являются синфазными колебаниями, как это и должно быть для диссипативного элемента. Соответственно напряжение u_2 и ток i_2 , а также u_1 и i_1 отличаются по фазе на угол $\pi/2$. Подставив найденные значения активных и реактивных напряжений (3.46) и токов (3.47) в соотношения (3.45), получим:

$$\begin{aligned} u_1 i_1 &= U_m I_m \cos \varphi \cos^2(\omega t + \psi_i), \\ u_2 i_2 &= U_m I_m \sin \varphi \sin^2(\omega t + \psi_u), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} u_2 i_1 &= -\frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \sin 2(\omega t + \psi_i), \\ u_1 i_2 &= \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \sin 2(\omega t + \psi_u). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Соотношениями (3.48) определяется активная составляющая мгновенной мощности (3.45), а соотношениями (3.49) — реактивная составляющая той же мощности. Мгновенная активная мощность (3.48) состоит из постоянной и переменной составляю-

ших, как и мощность (3.32). Мгновенная реактивная мощность (3.49) совпадает по форме с мощностью (3.40).

Два выражения для мгновенной активной мощности (3.48) отличаются друг от друга лишь начальными фазами переменной составляющей. При другом количестве элементов в двухполюснике и различных способах их соединения получились бы новые значения начальной фазы. Но независимо от способа соединения элементов постоянная составляющая мгновенной активной мощности (3.48) имеет значение

$$P = 0,5U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2. \quad (3.50)$$

Последние два равенства (3.50) написаны с учетом соотношений (3.27) и (3.24).

Мощность (3.50), как и мощность (3.33) или (3.35), является также амплитудой переменной составляющей мгновенной активной мощности (3.48). Вследствие этого мощность (3.48) получается пульсирующей, как и мощность (3.32). Мощность (3.50), которая является при этом средней мощностью, расходуемой за период гармонических колебаний, принято называть активной мощностью. При $X = 0$ ($B = 0$) соотношения (3.48) и (3.50) переходят в равенства (3.32) — (3.35).

Два выражения для мгновенной реактивной мощности (3.49) также отличаются начальными фазами этой гармонической величины. Но независимо от способа соединения элементов (и их количества) мгновенную реактивную мощность (3.49) однозначно характеризуют величиной

$$P_Q = 0,5U_m I_m \sin \varphi = UI \sin \varphi = XI^2 = -BU^2. \quad (3.51)$$

Последние два равенства (3.51) написаны с учетом соотношений (3.27) и (3.25). Постоянная величина (3.51) называется реактивной мощностью. При $R = 0$ ($G = 0$) соотношения (3.49) и (3.51) переходят в равенства (3.40) и (3.41). Как и величина (3.41), реактивная мощность (3.51) может быть положительной и отрицательной в зависимости от знака $\sin \varphi$ (знака X или B).

Если реактивную мощность (3.51) умножить на оператор поворота (мнимую единицу) j и сложить полученную величину с активной мощностью (3.5), то в соответствии с формулами (3.20) получим

$$\dot{P}_S = P + jP_Q = \underline{Z}I^2 = \underline{Y}^*U^2 = \underline{U}\dot{I}^*, \quad (3.52)$$

где $\underline{Y}^* = G - jB = Ye^{-ix} = Ye^{j\varphi}$ — комплексно сопряженная проводимость, а $\dot{I}^* = Ie^{-j\varphi}$ — комплексно сопряженное действующее значение тока, при котором $\underline{U}\dot{I}^* = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = (Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi)I^2 = (R + jX)I^2$.

Полученная величина (3.52) называется комплексной мощностью, а ее модуль — полной мощностью (полная мощность измеряется в вольт-амперах — В·А):

$$P_S = |\dot{P}_S| = \sqrt{P^2 + P_Q^2} = UI = ZI^2 = YU^2. \quad (3.53)$$

Последние два равенства (3.53) могут быть получены с учетом формул (3.27).

Активная и реактивная мощности (3.50) и (3.51) связаны с полной и комплексной мощностями соотношениями

$$P = P_s \cos \varphi = \operatorname{Re} \dot{P}_s, \quad P_Q = P_s \sin \varphi = \operatorname{Im} \dot{P}_s. \quad (3.54)$$

Эти равенства написаны с учетом первых формул (3.24) и (3.25).

9. Энергетические параметры цепи. В случае двухполюсника с комплексным сопротивлением активная мощность (3.50) определяется не только амплитудами напряжения и тока, но и параметром

$$\lambda = \cos \varphi = P/P_s, \quad (3.55)$$

который называется *коэффициентом мощности*. Он характеризует долю активной мощности в полной мощности в соответствии с первым равенством (3.54). Коэффициент мощности (3.55) удобно использовать при характеристике силовых электрических систем (промышленных электроустановок, цепей питания устройств связи и т. д.). Для уменьшения потерь энергии следует стремиться к увеличению коэффициента мощности вплоть до единицы.

В некоторых устройствах связи активная мощность является не полезной, а вредной мощностью потерь, которая ухудшает свойства системы. В подобных случаях полезной является не активная, а реактивная мощность. Поэтому устройства связи часто характеризуют другими энергетическими параметрами, определяющими соотношение между реактивной и активной мощностями:

$$Q = |P_Q|/P = |X|/R = |B|/G = \operatorname{tg} |\varphi|, \quad (3.56)$$

$$d = 1/Q = \operatorname{ctg} |\varphi| = \operatorname{tg} \delta.$$

Коэффициенты Q и d называются соответственно добротностью и затуханием цепи (двухполюсника). Добротность связана с фазой φ сопротивления двухполюсника в соответствии с отношением сторон треугольников сопротивлений и проводимостей (см. рис. 3.7). В последнем равенстве введен также дополнительный угол $\delta = \pi/2 - |\varphi| = \pi/2 - |X|$, который называется *углом потерь*.

При расчете добротности бывает удобно выражать ее не через реактивную мощность, а через максимальную энергию, накапливаемую в цепи. Максимальная энергия ω_{\max} накапливается в цепи за время, в течение которого мгновенная реактивная мощность (3.49) не изменяет знака, т. е. за время $T/4$.

Приняв для простоты $\psi_i = 0$ (или $\psi_u = 0$), подставим мгновенную реактивную мощность (3.49) в соотношение (1.5). Тогда после интегрирования в пределах $[0, T/4]$ с учетом соотношения (3.51) получим

$$\omega_{\max} = \frac{|P_Q|}{\omega}. \quad (3.57)$$

Из равенств (3.56) и (3.57) получаем новые формулы для определения добротности:

$$Q = 1/d = \omega \omega_{\max} / P = 2\pi \omega_{\max} / \omega_T, \quad (3.58)$$

где $\omega_T = PT$ — энергия, расходуемая в цепи за один период гармонических колебаний.

Из формулы (3.58) видно, что добротность цепи зависит от частоты. Поэтому при прохождении через цепь сложных, например модулированных, сигналов ее добротность на частотах различных спектральных составляющих получается неодинаковой. Чтобы внести определенность в значение добротности, ее обычно рассматривают на некоторой фиксированной частоте, например на несущей частоте ω_0 .

§ 3.2. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЕЙ

Простейшие цепи содержат два — четыре элемента. При наличии двух элементов в цепи они соединяются либо последовательно, либо параллельно. Соединение трех-четырех элементов может быть смешанным. Расчет этих цепей основывается на применении закона Ома и правил сложения сопротивлений и проводимостей. Такие простейшие расчеты рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Резистивные цепи. Расчет любой резистивной цепи производят с помощью закона Ома (2.1) при произвольных напряжениях u и токах i . Ими могут быть, в частности, постоянные напряжения U и токи I , при которых преимущественно используются резистивные цепи. В случае гармонических напряжений и токов во всех соотношениях временной множитель $\cos(\omega t + \psi)$ сокращается. Это свидетельствует о совпадении по фазе всех гармонических напряжений и токов в резистивных цепях. Поэтому при их расчете вместо мгновенных значений u, i используют амплитуды U_m, I_m или действующие значения U, I гармонических напряжений и токов. Далее под величинами U, I будем понимать либо постоянные напряжения и токи; либо действующие значения гармонических напряжений и токов.

Схемы простейших резистивных цепей показаны на рис. 3.11. Согласно формулам (2.1) и (2.45) в схеме делителя напряжения (рис. 3.11, а)

$$U = (R_1 + R_2)I, \quad U_1 = R_1I, \quad U_2 = R_2I,$$

откуда

$$U_1 = UR_1/(R_1 + R_2), \quad U_2 = UR_2/(R_1 + R_2).$$

(3.59)

Отсюда видно, что в делителе напряжения $U_1 < U$ и $U_2 < U$, чем и обусловлено его

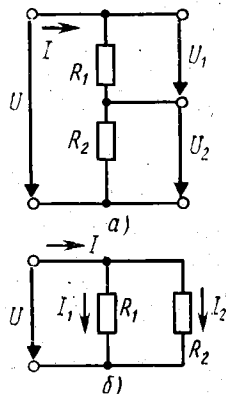


Рис. 3.11. Схемы резистивных делителей напряжения и тока

название. Из формул (3.59) находим коэффициенты передачи делителя, аналогичные коэффициенту (3.28) при $E = U$:

$$K_1 = U_1/U = R_1/R, \quad K_2 = U_2/U = R_2/R, \quad (3.60)$$

где согласно первой формуле (2.45) $R = R_1 + R_2$ — входное сопротивление делителя.

Согласно формулам (2.1) и (2.38) в схеме делителя тока (рис. 3.11, б)

$$I = (G_1 + G_2)U, \quad I_1 = G_1U, \quad I_2 = G_2U,$$

где $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$. Отсюда определяют токи делителя

$$I_1 = IG_1/(G_1 + G_2) < I, \quad I_2 = IG_2/(G_1 + G_2) < I. \quad (3.61)$$

По аналогии с коэффициентом передачи по напряжению (3.28) из равенств (3.61) определяем коэффициенты передачи по току (3.30):

$$K_{I1} = I_1/I = G_1/G, \quad K_{I2} = I_2/I = G_2/G, \quad (3.62)$$

где согласно формуле (2.38) $G = G_1 + G_2$ — входная проводимость делителя.

С понятием деления тока связано понятие *шунтирования* (от англ. shunt — ответвление). О параллельно включенных резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 говорят, что они шунтируют друг друга. Сопротивление R_1 является шунтом для R_2 , а сопротивление R_2 — шунтом для R_1 . Чем меньше сопротивление шунта, тем сильнее он шунтирует параллельно включенный резистор. Например, при $R_1 \ll R_2$ ($G_1 \gg G_2$) сопротивление R_1 шунтирует настолько сильно, что практически весь ток I ответвляется через него, как это следует из первых формул (3.61), (3.62): $I_1 \approx I$, $K_{I1} \approx 1$.

Делители напряжения и тока можно выделить в составе сложных цепей. Например, в Г-образной цепи R_1, R_2 с нагрузкой R_H (рис. 3.12, а) сопротивления R_1, R_H образуют делитель напряжения, а сопротивления $R_2, R = R_1 + R_H$ — делитель тока. В Т-образной цепи R_1, R_2 (рис. 3.12, б), называемой обратной Г-образной цепью, сопротивление R_2 образует делитель тока с нагрузочным сопротивлением R_H , а сопротивление R_1 — делитель напря-

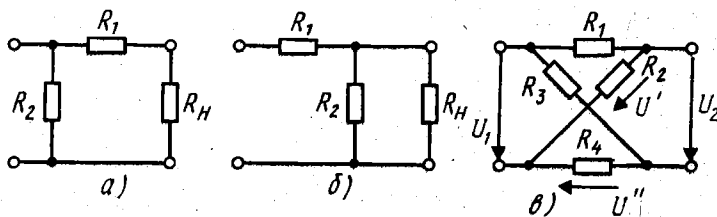


Рис. 3.12. Схемы резистивных Г- и Т-образной цепей с нагрузкой и Х-образной цепи без нагрузки

жения с сопротивлением $R = R_2 R_n / (R_2 + R_n)$. В X-образной мостовой схеме без нагрузки (рис. 3.12, а) сопротивления $R_1 + R_2$ и $R_3 + R_4$ образуют делитель тока, а пары сопротивлений R_1, R_2 и R_3, R_4 — два делителя напряжения. В этой схеме выходное напряжение U_2 определяется как разность напряжений на сопротивлениях R_2 и R_4 , поскольку по второму закону Кирхгофа $U_2 + U'' - U' = 0$. Отсюда по формуле (3.59) $U_2 = U_1 R_2 / (R_1 + R_2) - U_1 R_4 / (R_3 + R_4)$, или $U_2 = U_1 (R_2 R_3 - R_1 R_4) / (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)$. Из этого соотношения следует, что при $R_2 R_3 > R_1 R_4$ получается $U_2 > 0$, при

$$R_1 R_4 = R_2 R_3, R_1 / R_2 = R_3 / R_4 \quad (3.63)$$

выходное напряжение обращается в нуль, а при $R_1 R_4 > R_2 R_3$ оно изменяет полярность ($U_2 < 0$).

При выполнении равенств (3.63) мостовая схема называется сбалансированной, а сами равенства являются условиями баланса моста. Следует отметить, что условие баланса (3.63) не нарушается при подключении к выходным зажимам моста любой нагрузки. Действительно, при отсутствии напряжения на нагрузке ток через нее не проходит, что равносильно режиму холостого хода моста (рис. 3.12, в).

При расчете входных сопротивлений резистивных цепей со смешанным соединением элементов следует применять последовательно формулы (2.38) и (2.45), начиная с выхода схемы. Например, в T-образной цепи с нагрузкой (рис. 3.13, а) последовательно определяем $R' = R_n + R_3 = 1/G'$, $G'' = G' + G_2 = 1/(R_n + R_3) + 1/R_2 = 1/R''$, $R'' = 1/G'' = R_2(R_3 + R_n)/(R_2 + R_3 + R_n)$, $R_T = R'' + R_1$, или

$$R_T = [R_1(R_2 + R_3 + R_n) + R_2(R_3 + R_n)] / (R_2 + R_3 + R_n). \quad (3.64)$$

Аналогично определяют входное сопротивление П-образной цепи с нагрузкой (рис. 3.13, б), но в этом случае расчет начинают с проводимости: $G' = G_n + G_3 = 1/R_n + 1/R_3 = 1/R'$, $R'' = R' + R_1 = 1/G''$, $G_{II} = G'' + G_2 = 1/R'' + 1/R_2$, откуда $R_{II} = 1/G_{II}$, или

$$R_{II} = R_2 [R_1(R_3 + R_n) + R_3 R_n] / [(R_1 + R_2)(R_3 + R_n) + R_3 R_n]. \quad (3.65)$$

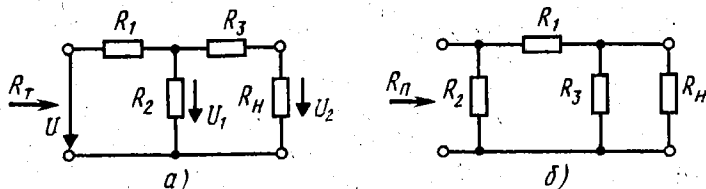


Рис. 3.13. Схемы резистивных T- и П-образной цепей с нагрузкой

Используя полученные соотношения, можно производить и более сложные расчеты в резистивных цепях со смешанным соединением элементов. Например, при определении коэффициента передачи $K = U_2/U$ Т-образной цепи рис. 3.13, а следует учитывать, что сопротивление R_3 и R_n образуют делитель напряжения с коэффициентом передачи $K_2 = U_2/U_1$. Кроме того, здесь образуется делитель напряжения из сопротивления R_1 и сопротивления R'' , найденного при выводе формулы (3.64). Его коэффициент передачи $K_1 = U_1/U = R''/R_T$. Поэтому с учетом формул (3.60), (3.64) и значения R'' получаем

$$K = K_1 K_2, \quad K_1 = R_2(R_3 + R_n) / [R_1(R_2 + R_3 + R_n) + R_2(R_3 + R_n)], \quad K_2 = R_n / (R_3 + R_n). \quad (3.66)$$

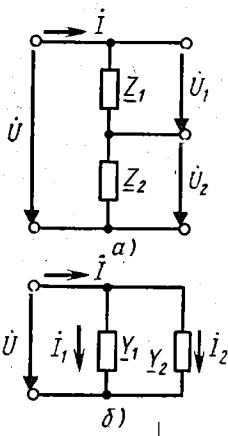


Рис. 3.14. Схемы делителей напряжения и тока с комплексными сопротивлениями.

Подобные расчеты возможны и для П-образной цепи рис. 3.13, б.

2. Цепи с реактивными элементами. Расчет любых цепей с реактивными элементами при гармонических напряжениях и токах производят относительно комплексных амплитуд U_m, I_m или комплексных действующих значений напряжений \dot{U} и токов \dot{I} . При этом используют комплексные сопротивления $\underline{Z} = R + jX$ и проводимости $\underline{Y} = G + jB$. Тогда, например, делители напряжения и тока (см. рис. 3.11) приобретают вид делителей с комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_1 = 1/\underline{Y}_1$ и $\underline{Z}_2 = 1/\underline{Y}_2$ (рис. 3.14). Коэффициенты передачи таких делителей находят аналогично параметрам (3.60) и (3.62):

$$\underline{K}_1 = \dot{U}_1/\dot{U} = \underline{Z}_1/\underline{Z}, \quad \underline{K}_2 = \dot{U}_2/\dot{U} = \underline{Z}_2/\underline{Z}, \quad (3.67)$$

$$\underline{K}_{j1} = I_1/I = \underline{Y}_1/\underline{Y}, \quad \underline{K}_{j2} = I_2/I = \underline{Y}_2/\underline{Y}, \quad (3.68)$$

где согласно формулам (3.26) $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ — входное сопротивление делителя напряжения (рис. 3.14, а), а $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ — входная проводимость делителя тока (рис. 3.14, б).

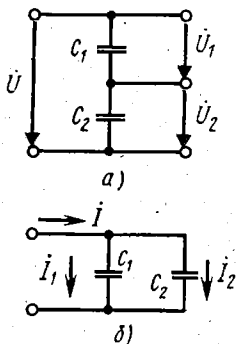


Рис. 3.15. Схемы емкостных делителей напряжения и тока.

3. Цепи с емкостью. Простейшими цепями с емкостями являются емкостные делители напряжения (рис. 3.15, а) и тока (рис. 3.15, б). В этих цепях комплексные сопротивления и проводимости переходят в реактивные сопротивления и проводимости, являющиеся мнимыми величинами: $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = j\omega C_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = j\omega C_2$. При

подстановке этих величин в формулы (3.67), (3.68) после сокращения на $j\omega$ получаем:

$$\underline{K}_1 = C_2/(C_1 + C_2) = K_1, \quad \underline{K}_2 = C_1/(C_1 + C_2) = K_2, \quad (3.69)$$

$$\underline{K}_{I1} = C_1/(C_1 + C_2) = K_{I1}, \quad \underline{K}_{I2} = C_2/(C_1 + C_2) = K_{I2}. \quad (3.70)$$

Таким образом, коэффициенты передачи емкостных делителей напряжения и тока являются вещественными величинами, не зависящими от частоты. Поэтому формулы (3.69) можно применять для емкостных делителей постоянного напряжения.

Из соотношений (3.69), (3.70) следует:

$$\dot{U} = \dot{U}C_2/(C_1 + C_2), \quad \dot{U}_2 = \dot{U}C_1/(C_1 + C_2), \quad (3.71)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}C_1/(C_1 + C_2), \quad \dot{I}_2 = \dot{I}C_2/(C_1 + C_2). \quad (3.72)$$

Полезно сравнить формулы (3.59) и (3.71), а также (3.61) и (3.72). Если в резистивных и емкостных делителях тока параметры G_1, G_2 и C_1, C_2 сходным образом влияют на токи I_1, I_2 , то в резистивных и емкостных делителях напряжения параметры R_1, R_2 и C_1, C_2 влияют на напряжения U_1, U_2 различным образом.

Цепи с емкостями могут содержать и резисторы. Они называются безындуктивными или RC-цепями. Простейшие из этих цепей также образуют делители напряжения (рис. 3.16, а, б) и тока (рис. 3.16, в). Для них можно использовать общие формулы (3.67) и (3.68) при $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C, \underline{Z}_2 = R$ (рис. 3.16, а) или $\underline{Z}_1 = R, \underline{Z}_2 = 1/j\omega C$ (рис. 3.16, б) и $\underline{Y}_1 = G, \underline{Y}_2 = j\omega C$ (рис. 3.16, в). Тогда для этих схем получаем следующие коэффициенты передачи:

$$\underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = j\omega CR/(1 + j\omega CR), \quad \underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = 1/(1 + j\omega CR) \quad (3.73)$$

— соответственно для первого (рис. 3.16, а) и второго (рис. 3.16, б) делителей напряжения,

$$\underline{K}_{I1} = \dot{I}_1/\dot{I} = 1/(1 + j\omega CR), \quad \underline{K}_{I2} = \dot{I}_2/\dot{I} = j\omega CR/(1 + j\omega CR) \quad (3.74)$$

— для делителя тока (рис. 3.16, в).

Частотные и фазовые характеристики этих делителей получаем путем определения модулей и аргументов комплексных дробей (3.73), (3.74). Подчеркнем, что при таком определении не следует освобождаться от мнимости в знаменателе комплексной

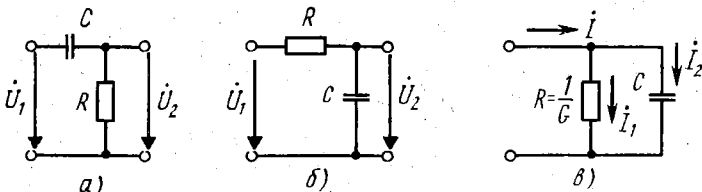


Рис. 3.16. Схемы безындуктивных цепей (RC-цепей)

дроби с целью выделения ее вещественной и мнимой частей. Это лишь усложняет расчеты и затрудняет анализ характеристик, особенно в случае многоэлементных схем. *Модуль и аргумент комплексной дроби следует определять соответственно как отношение модулей и разность аргументов ее числителя и знаменателя.* При этом из первой формулы (3.73) находим

$$K(\omega) = |\underline{K}(\omega)| = |j\omega CR| / |1 + j\omega CR| = \omega CR / \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad (3.75)$$

$$\theta(\omega) = \arg \underline{K}(\omega) = \arg(j\omega CR) - \arg(1 + j\omega CR),$$

или

$$\theta(\omega) = \pi/2 - \arctg \omega CR. \quad (3.76)$$

Частотная и фазовая характеристики (3.75) и (3.76) первого делителя напряжения (см. рис. 3.16, а) показаны на рис. 3.17, а.

Для второго делителя напряжения (см. рис. 3.16, б) из второго равенства (3.73) аналогично получаем

$$K(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad \theta(\omega) = -\arctg \omega CR. \quad (3.77)$$

Частотная и фазовая характеристики (3.77) показаны на рис. 3.17, б. Из формул (3.74) и (3.73) видно, что характеристики на рис. 3.17 относятся и к передаточным функциям по току для делителя тока (см. рис. 3.16, в).

Входное сопротивление делителя напряжения (см. рис. 3.16, а, б)

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + 1/j\omega C = (1 + j\omega CR)/j\omega C, \quad (3.78)$$

откуда полное сопротивление

$$Z(\omega) = |\underline{Z}(\omega)| = \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2} = \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} / \omega C, \quad (3.79)$$

а фаза (аргумент) сопротивления

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{Z}(\omega) = \arg(R - j/\omega C) = -\arctg(1/\omega CR), \quad (3.80)$$

или согласно последнему равенству (3.78)

$$\varphi(\omega) = \arg(1 + j\omega CR) - \arg(j\omega C) = \arctg \omega CR - \pi/2. \quad (3.81)$$

Графики частотных функций (3.79) — (3.81) показаны на рис. 3.18, а.

Входная проводимость делителя тока (см. рис. 3.16, в)

$$\underline{Y} = Ye^{j\chi} = G + j\omega C = (1 + j\omega CR)/R, \quad (3.82)$$

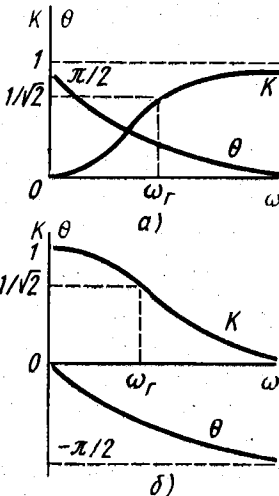


Рис. 3.17. Частотные и фазовые характеристики RC-цепей

откуда полная проводимость

$$Y(\omega) = |Y(\omega)| = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} = \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} / R, \quad (3.83)$$

а фаза (аргумент) проводимости

$$\chi(\omega) = \arg Y(\omega) = \arctg(\omega C / G) = \arctg \omega CR. \quad (3.84)$$

Частотные зависимости (3.83) и (3.84) показаны на рис. 3.18, б.

Входное сопротивление делителя тока находим из формулы (3.82):

$$\underline{Z}_{вх} = Z_{вх} e^{j\varphi_{вх}} = R_{вх} + jX_{вх} = I / \underline{Y} = R / (1 + j\omega CR). \quad (3.85)$$

Отсюда можно определить модуль и аргумент входного сопротивления:

$$Z_{вх}(\omega) = R / \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad \varphi_{вх}(\omega) = -\arctg \omega CR, \quad (3.86)$$

а также его диссипативную и реактивную (вещественную и мнимую) составляющие:

$$\begin{aligned} R_{вх}(\omega) &= \operatorname{Re} Z_{вх}(\omega) = R / (1 + \omega^2 C^2 R^2), \\ X_{вх}(\omega) &= \operatorname{Im} Z_{вх}(\omega) = -\omega CR^2 / (1 + \omega^2 C^2 R^2). \end{aligned} \quad (3.87)$$

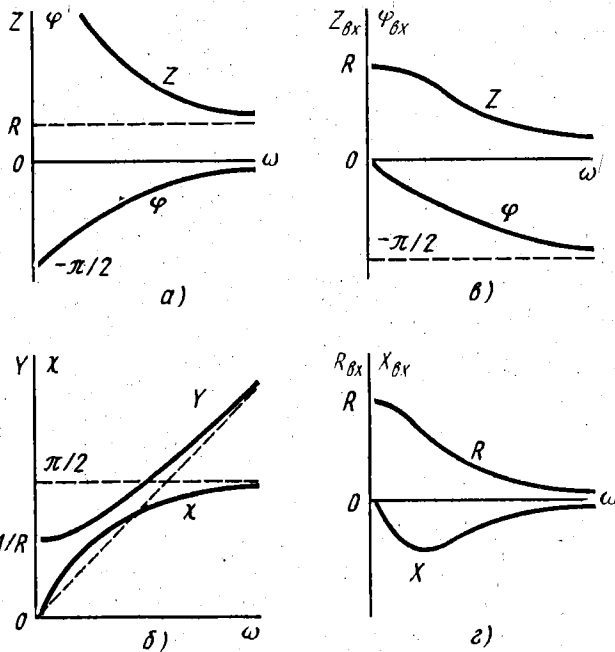


Рис. 3.18. Графики входных сопротивлений и проводимостей RC-цепей

Формулы (3.87) получены после освобождения от мнимости в знаменателе последней дроби (3.85). Частотные зависимости (3.86) и (3.87) показаны соответственно на рис. 3.18, *в*, *г*.

Фаза на рис. 3.18, *а*, *в* изменяется монотонно с ростом частоты. Возможны также случаи немонотонного изменения фазы. Например, для *RC*-цепи, показанной на рис. 3.19, *а*, с учетом формулы (3.85) находим входное сопротивление

$$\underline{Z} = R_1 + R_2/(1 + j\omega CR_2) = (R_1 + R_2 + j\omega CR_1 R_2)/(1 + j\omega CR_2).$$

Отсюда находим частотную функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg(R_1 + R_2 + j\omega CR_1 R_2) - \arg(1 + j\omega CR_2) = \\ &= \operatorname{arctg} [\omega CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)] - \operatorname{arctg} \omega CR_2. \end{aligned}$$

График этой функции приведен на рис. 3.19, *б*, где показаны также составляющие $\varphi_1(\omega) = \operatorname{arctg} [\omega CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)]$ и $\varphi_2(\omega) = \operatorname{arctg} \omega CR_2$.

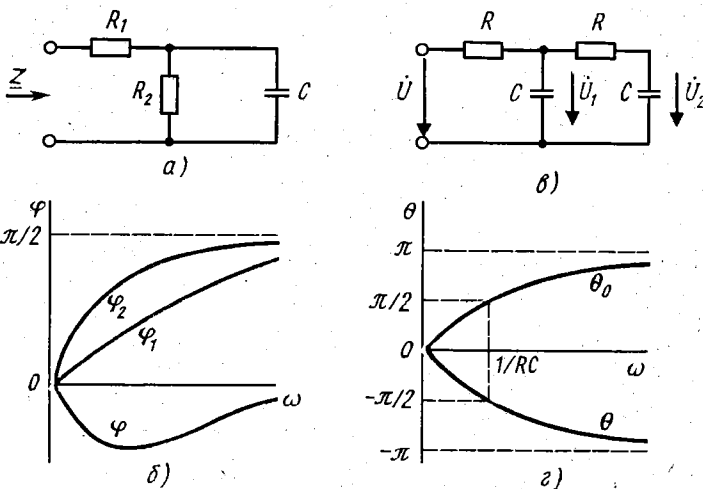


Рис. 3.19. Схемы усложненных *RC*-цепей и их характеристики

В рассмотренных простейших цепях фазовые сдвиги θ не превышают значения $\pm \pi/2$ (см. рис. 3.17). В многоэлементных цепях могут получаться и большие значения $|\theta|$ за счет наращивания фазового сдвига в отдельных участках схемы. Это можно показать на примере *RC*-цепи, изображенной на рис. 3.19, *в*. Коэффициент передачи этой цепи можно определить тем же способом, что и для резистивной Т-образной схемы (см. рис. 3.13, *а*), заменив диссипативные сопротивления соответствующими комплексными сопротивлениями. Можно и непосредственно использовать формулы (3.66), приняв в них $R_1 = R_3 = R$ и заменив сопротивления R_2, R_n на сопротивление $\underline{Z} = 1/j\omega C$. Тогда получим комплексные коэффициенты передачи:

$$\underline{K}_1 = \dot{U}_1/\dot{U} = K_1 e^{j\theta_1} = (1 + j\omega CR)/(1 - \omega^2 C^2 R^2 + j3\omega CR),$$

$$\underline{K}_2 = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_2 e^{j\theta_2} = 1/(1 + j\omega CR),$$

откуда

$$\underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U} = Ke^{j\theta} = \underline{K}_1 \underline{K}_2 = 1/(1 - \omega^2 C^2 R^2 + j3\omega CR). \quad (3.88)$$

Заметим, что в общем случае модуль и аргумент произведения комплексных величин определяются соответственно как произведение модулей и сумма аргументов этих величин: $K = K_1 K_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$. При этом не следует предварительно перемножать эти комплексные величины, поскольку такая операция усложняет вычисления и затрудняет анализ. Однако в данном случае произведено перемножение \underline{K}_1 и \underline{K}_2 , так как наличие сокращаемого множителя $1 + j\omega CR$ приводит к упрощению выражения.

Как и в случае простейшей комплексной дроби (3.73), для найденного коэффициента передачи определяем его аргумент, вычитая аргумент знаменателя из аргумента числителя:

$$\theta = \arg 1 - \arg(1 - \omega^2 C^2 R^2 + j3\omega CR) = 0 - \theta_0 = -\theta_0,$$

где

$$\theta_0 = \text{Arc tg}[3\omega CR/(1 - \omega^2 C^2 R^2)], \quad \text{tg } \theta_0 = 3\omega CR/(1 - \omega^2 C^2 R^2).$$

При построении графика этой частотной зависимости необходимо учесть, что при $\omega < 1/RC$ получается $\text{tg } \theta_0 > 0$, $\theta_0 < \pi/2$, а при $\omega = 1/RC$ — соответственно $\text{tg } \theta_0 = \pm \infty$, $\theta_0 = \pi/2$. Поскольку с ростом частоты фазовый сдвиг в рассматриваемой цепи изменяется плавно, при $\omega > 1/RC$ получается $\text{tg } \theta_0 < 0$, $\theta_0 > \pi/2$, а не $\theta_0 < 0$, как это показывает, например, микрокалькулятор, определяющий главное значение аргумента в интервале $\pm \pi/2$. Поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ получается $\text{tg } \theta_0 \rightarrow 0$, $\theta_0 \rightarrow \pi$, но не $\theta_0 \rightarrow 0$. Соответствующая частотная зависимость показана на рис. 3.19, г. Из полученного графика видно, что в RC-цепи, составленной из двух Т-образных звеньев, фазовый сдвиг θ может превышать значение $\pi/2$, доходя в пределе до значения $-2 \cdot \pi/2 = -\pi$.

В аналогичных и других n -звенных RC-цепях сдвиг может доходить до значения $\pm n\pi/2$. В общем случае с ростом частоты ω функция $\text{tg } \theta(\omega) = f(\omega)$ может многократно проходить через бесконечно большие и нулевые значения, изменяя при этом свой знак. Это означает последовательный переход угла $\theta(\omega)$ из первого во второй, из второго в третий квадрант и т. д.: $\theta(\omega) = \text{Arc tg } f(\omega) = \arctg f(\omega) + k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ изменяет значение при $f(\omega) = \pm \infty$.

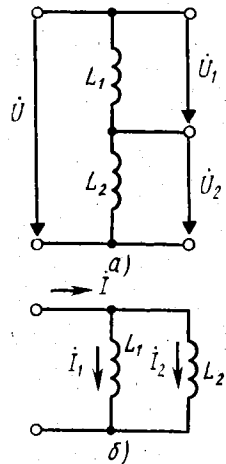


Рис. 3.20. Схемы индуктивных делителей напряжения и тока

4. Цепи с индуктивностью. Простейшие цепи с индуктивностями показаны на рис. 3.20. Они образуют *индуктивные делители напряжения* (рис. 3.20, а) и *тока* (рис. 3.20, б). Из общих соотношений (3.67), (3.68) находим коэффициенты передачи индуктивных делителей:

$$\underline{K}_1 = \dot{U}_1/\dot{U} = L_1/(L_1 + L_2) = K_1, \quad \underline{K}_2 = \dot{U}_2/\dot{U} = L_2/(L_1 + L_2) = K_2, \quad (3.89)$$

$$\underline{K}_{j1} = I_1/I = L_2/(L_1 + L_2) = K_{j1}, \quad \underline{K}_{j2} = I_2/I = L_1/(L_1 + L_2) = K_{j2}. \quad (3.90)$$

Таким образом, аналогично параметрам (3.69), (3.70) коэффициенты передачи (3.89), (3.90) являются вещественными величинами. В *RL*-цепях, как и в *RC*-цепях, коэффициенты передачи получаются комплексными. Например, для *RL*-делителей (рис. 3.21) из формул (3.67), (3.68) находим

$$\underline{K}(\omega) = j\omega L/(R + j\omega L), \quad K(\omega) = \omega L/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \theta(\omega) = \pi/2 - \text{arctg}(\omega L/R) \quad (3.91)$$

— для первого делителя напряжения (рис. 3.21, а),

$$\underline{K}(\omega) = R/(R + j\omega L), \quad K(\omega) = R/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \theta(\omega) = -\text{arctg}(\omega L/R) \quad (3.92)$$

— для второго делителя напряжения (рис. 3.21, б),

$$\underline{K}_{j1}(\omega) = j\omega L/(R + j\omega L), \quad \underline{K}_{j2} = R/(R + j\omega L) \quad (3.93)$$

— для делителя тока (рис. 3.21, в).

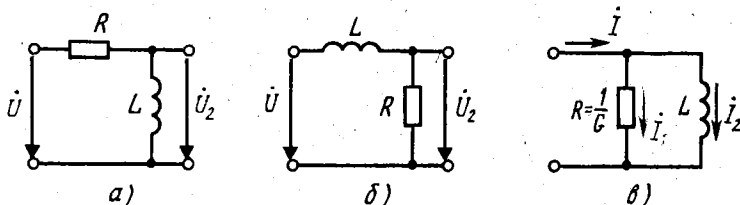


Рис. 3.21. Схемы *RL*-цепей

Частотные и фазовые характеристики, описываемые двумя последними уравнениями (3.91), (3.92), получаются такими же, как на рис. 3.17, а, б. Аналогичные характеристики получаются и для *RL*-делителя тока, поскольку формулы (3.93) совпадают с первыми равенствами (3.91), (3.92).

Входное сопротивление делителей напряжения (рис. 3.21, а, б) определяется простыми соотношениями

$$\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L, \quad Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega L/R). \quad (3.94)$$

Отсюда находим входную проводимость:

$$Y = 1/Z = G + jB = 1/(R + j\omega L), \quad Y(\omega) = 1/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$

$$\chi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega L/R), \quad G(\omega) = R/(R^2 + \omega^2 L^2), \quad (3.95)$$

$$B(\omega) = -\omega L/(R^2 + \omega^2 L^2).$$

Частотные зависимости (3.94) и (3.95) показаны соответственно на рис. 3.22, а—в. Существенно отметить, что эти зависимости качественно совпадают с графиками рис. 3.18, б, в, г.

Входная проводимость делителя тока (рис. 3.21, а)

$$Y_{\text{вх}} = 1/R + 1/j\omega L, \quad Y_{\text{вх}}(\omega) = \sqrt{1/R^2 + 1/\omega^2 L^2},$$

$$\chi_{\text{вх}}(\omega) = -\operatorname{arctg}(R/\omega L), \quad (3.96)$$

откуда его входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = 1/Y_{\text{вх}} = j\omega LR/(R + j\omega L); \quad (3.97)$$

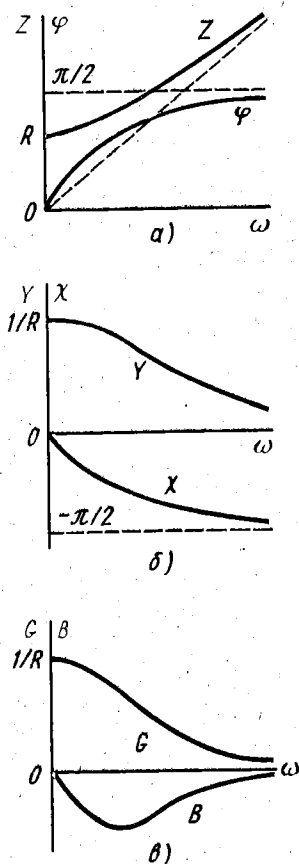


Рис. 3.22. Характеристики последовательной RL -цепи

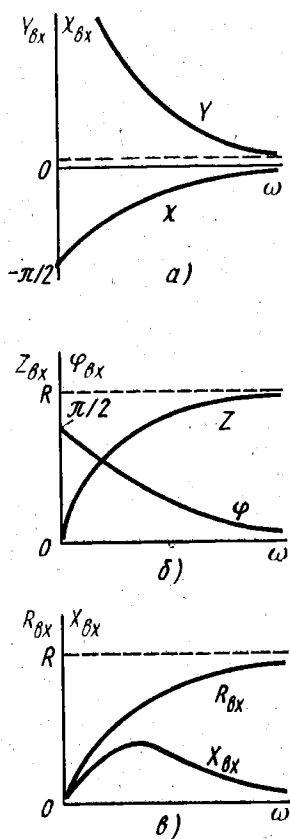


Рис. 3.23. Характеристики параллельной RL -цепи

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = \omega LR / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \varphi_{\text{вх}}(\omega) = \pi/2 - \text{arctg}(\omega L/R), \quad (3.98)$$

$$R_{\text{вх}}(\omega) = \omega^2 L^2 R / (R^2 + \omega^2 L^2), \quad X_{\text{вх}}(\omega) = \omega LR^2 / (R^2 + \omega^2 L^2). \quad (3.99)$$

Частотные зависимости (3.96), (3.98), (3.99) показаны соответственно на рис. 3.23, а—в. Поскольку структура комплексной величины (3.96) аналогична структуре величины (3.78), графики рис. 3.23, а и 3.18, а совпадают качественно, а при соответствующих параметрах — и количественно, что характерно для дуальных цепей.

5. Реактивные цепи с индуктивностью и емкостью. Схемы простейших цепей с индуктивностью и емкостью показаны на рис. 3.24. При последовательном соединении реактивных элементов (рис. 3.24, а) сопротивление и проводимость двухполюсника описываются соотношениями

$$\underline{Z} = jX = j\omega L + 1/j\omega C = j(\omega L - 1/\omega C), \quad \underline{Y} = jB = 1/\underline{Z} = 1/j(\omega L - 1/\omega C). \quad (3.100)$$

При параллельном соединении элементов (рис. 3.24, б) проводимость и сопротивление двухполюсника

$$\underline{Y} = jB = j\omega C + 1/j\omega L = j(\omega C - 1/\omega L), \quad \underline{Z} = jX = 1/\underline{Y} = 1/j(\omega C - 1/\omega L). \quad (3.101)$$

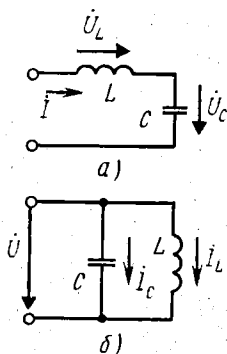


Рис. 3.24. Схемы реактивных резонансных двухполюсников

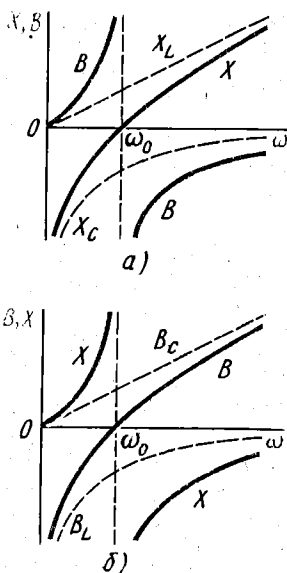


Рис. 3.25. Частотные зависимости сопротивлений и проводимостей реактивных резонансных двухполюсников

Графики частотных зависимостей реактивных сопротивлений и проводимостей (3.100), (3.101) показаны соответственно на рис. 3.25, а, б, где пунктиром изображены сопротивления и проводимости отдельных элементов. Сложение этих сопротивлений (проводимостей) приводит к искомым графикам, в соответствии с которыми на частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (3.102)$$

сопротивление (3.100) и проводимость (3.101) равны нулю. На остальных частотах преобладает либо индуктивное, либо емкостное сопротивление (проводимость), так что для сопротивления (3.100)

$$X|_{\omega < \omega_0} < 0, X|_{\omega > \omega_0} > 0, \quad (3.103)$$

а для проводимости (3.101)

$$X|_{\omega < \omega_0} > 0, X|_{\omega > \omega_0} < 0. \quad (3.104)$$

Таким образом, в отличие от сопротивлений и проводимостей (3.16) реактивных элементов *реактивные сопротивления и проводимости (3.100), (3.101) обращаются в нуль или в бесконечность на отличной от нуля конечной частоте (3.102). Это явление называют резонансом, а частоту (3.102) — резонансной частотой. Цепи, обладающие описанными резонансными свойствами, соответственно называют резонансными цепями. Смысл этих названий разъясняется ниже.*

Резонанс, для которого выполняются условия (3.103), будем называть последовательным, а резонанс, для которого выполняются условия (3.101), — параллельным. Это соответствует названиям последовательной резонансной цепи (см. рис. 3.24, а) и параллельной резонансной цепи (см. рис. 3.24, б).

При любом из резонансов реактивные сопротивления индуктивности и емкости равны по модулю друг другу. Эти сопротивления (по модулю) называют характеристическим сопротивлением резонансной цепи:

$$\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}. \quad (3.105)$$

Из данных равенств вытекает, что *последовательный резонанс обусловлен компенсацией напряжений на реактивных элементах (рис. 3.26, а), а параллельный резонанс — компенсацией токов в реактивных элементах (рис. 3.26, б).*

Действительно, $\dot{U}_L|_{\omega=\omega_0} = \dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I} = j\rho \dot{I}$, $\dot{U}_C|_{\omega=\omega_0} = \dot{U}_{C0} = \dot{I}/j\omega_0 C = -j\rho \dot{I}$ и $\dot{I}_C|_{\omega=\omega_0} = \dot{I}_{C0} = j\omega_0 C \dot{U} = j\dot{U}/\rho$, $\dot{I}_L|_{\omega=\omega_0} = \dot{I}_{L0} = \dot{U}/j\omega_0 L = -j\dot{U}/\rho$, так что $\dot{U}_{L0} + \dot{U}_{C0} = 0$, $\dot{I}_{C0} + \dot{I}_{L0} = 0$.

При отклонении частоты от резо-

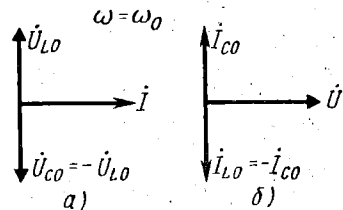


Рис. 3.26. Векторные диаграммы резонансных напряжений и токов

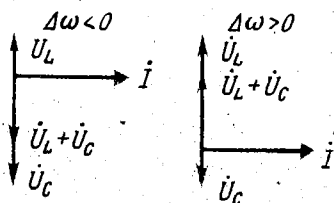


Рис. 3.27. Векторные диаграммы напряжений и тока в последовательном резонансном двухполюснике

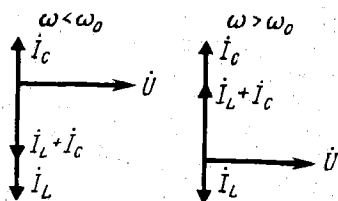


Рис. 3.28. Векторные диаграммы напряжения и токов в параллельном резонансном двухполюснике

нансной преобладает одно из напряжений (рис. 3.27) или один из токов (рис. 3.28). Знаком получающихся при этом фазовых сдвигов $\varphi = \psi_u - \psi_i$ обусловлен и знак сопротивлений (3.103), (3.104). Поэтому условия (3.103), (3.104), определяющие характер резонанса, могут быть заменены другими неравенствами:

$$\varphi|_{\omega < \omega_0} < 0, \varphi|_{\omega > \omega_0} > 0 \quad (3.106)$$

— для последовательного резонанса,

$$\varphi|_{\omega < \omega_0} > 0, \varphi|_{\omega > \omega_0} < 0 \quad (3.107)$$

— для параллельного резонанса.

В технике связи, где широко используются резонансные цепи, принято оценивать отклонение частоты сигнала $\omega (f = \omega/2\pi)$ от резонансной частоты $\omega_0 (f_0 = \omega_0/2\pi)$ величинами, которые называются расстройками:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \Delta f = f - f_0 \quad (3.108)$$

— абсолютные расстройки,

$$\Delta = \Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0 \quad (3.109)$$

— относительная расстройка,

$$\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = f/f_0 - f_0/f = \Delta(2 + \Delta)/(1 + \Delta) \quad (3.110)$$

— нормированная расстройка, для которой последнее равенство получено с учетом значения $f = f_0 + \Delta f$.

При прохождении через резонансную цепь модулированного сигнала (1.15), (1.21) представляют интерес значения ее параметров на частотах боковых составляющих, которые мало отличаются от несущей частоты ω_0 , совпадающей с резонансной частотой (3.102). Поэтому пользуются понятием *малых расстроек*, при которых

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0, |\Delta f| \ll f_0, |\Delta| \ll 1, |\nu| \ll 1. \quad (3.111)$$

При малых расстройках (3.111) нормированная расстройка (3.110) практически линейно зависит от относительной и абсолютной расстроек (3.109), (3.108):

$$\nu|_{|\nu| \ll 1} \approx 2\Delta = 2\Delta f/f_0. \quad (3.112)$$

Умножив и разделив на ρ сопротивления (3.100), (3.101), с учетом соотношений (3.102), (3.105) и (3.110) — (3.112) получим удобные формулы:

$$\underline{Z} = j\rho v \approx j2\rho\Delta f/f_0 \quad (3.113)$$

— для сопротивления последовательной резонансной цепи,

$$\underline{Z} = \rho/jv \approx -j\rho f_0/2\Delta f \quad (3.114)$$

— для сопротивления параллельной резонансной цепи.

Приближенные формулы (3.113), (3.114) справедливы для области малых расстройек (3.111).

6. Диссипативные цепи с индуктивностью и емкостью. Рассмотренные резонансные двухполюсники являются идеальными. Реальные резонансные двухполюсники должны содержать также диссипативный элемент, на котором рассеивается активная мощность. Схемы простейших двухполюсников такого вида показаны на рис. 3.29.

Свойства резонансных двухполюсников с потерями зависят от добротности (3.56), (3.58). Поскольку значение добротности зависит от частоты, *добротность резонансной цепи определяют для однозначности на резонансной частоте*. При этом в формулы (3.56) надо подставлять резонансное значение параметров элементов $|X| = \rho$ или $|B| = 1/\rho$. Тогда соответственно для последовательного (рис. 3.29, а) и параллельного (рис. 3.29, б) резонансных двухполюсников получаем следующие значения добротностей:

$$Q = \rho/r = 1/d, \quad Q = R_0/\rho = 1/d. \quad (3.115)$$

В диссипативных резонансных цепях дополнительно к расстройкам (3.108) — (3.110) используют понятие *обобщенной расстройки*

$$\xi = Qv \approx 2Q\Delta f/f_0, \quad (3.116)$$

для которой приближенное значение определяется в области малых расстройек (3.111).

С учетом формул (3.113) — (3.116) и общих соотношений (3.20) — (3.25) находим

$$\underline{Z} = r + j\rho v = r(1 + jQv) = r(1 + j\xi) = \rho(d + jv),$$

$$Z = r\sqrt{1 + Q^2v^2} =$$

$$= r\sqrt{1 + \xi^2},$$

$$\varphi = \arctg Qv = \arctg \xi.$$

$$R = r = \text{const.}$$

$$X = \rho v = Qrv = r\xi,$$

$$\underline{Z} = 1/(r + j\rho v) =$$

$$= 1/r(1 + jQv) =$$

$$= 1/r(1 + j\xi), \quad (3.117)$$

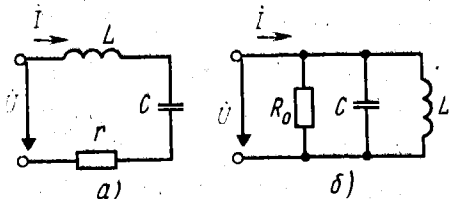


Рис. 3.29. Схемы резонансных двухполюсников с потерями

$$\begin{aligned}
 Y &= 1/r\sqrt{1 + Q^2v^2} = 1/r\sqrt{1 + \xi^2}, \quad \chi = -\operatorname{arctg} Qv = -\operatorname{arctg} \xi, \\
 G &= 1/r(1 + Q^2v^2) = 1/r(1 + \xi^2), \quad B = -Qv/r(1 + Q^2v^2) = \\
 &= -\xi/r(1 + \xi^2)
 \end{aligned}
 \tag{3.117}$$

— для последовательного резонансного двухполюсника,

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= 1/R_0 + jv/\rho = (1 + jQv)/R_0 = (1 + j\xi)/R_0, \\
 Y &= \sqrt{1 + Q^2v^2}/R_0 = \sqrt{1 + \xi^2}/R_0, \quad \chi = \operatorname{arctg} Qv = \operatorname{arctg} \xi, \\
 G &= 1/R_0 = \operatorname{const}, \quad B = v/\rho = Qv/R_0 = \xi/R_0, \\
 \underline{Z} &= R_0/(1 + jQv) = R_0/(1 + j\xi) = \rho/(d + jv), \\
 Z &= R_0/\sqrt{1 + Q^2v^2} = R_0/\sqrt{1 + \xi^2} = \rho/\sqrt{d^2 + v^2}, \\
 \varphi &= -\operatorname{arctg} Qv = -\operatorname{arctg} \xi, \\
 R &= R_0/(1 + Q^2v^2) = R_0/(1 + \xi^2) = \rho d/(d^2 + v^2), \\
 X &= -QR_0v/(1 + Q^2v^2) = -R_0\xi/(1 + \xi^2) = -\rho v/(d^2 + v^2)
 \end{aligned}
 \tag{3.118}$$

— для параллельного резонансного двухполюсника.

В зависимости от целей расчета можно пользоваться различными формулами (3.117), (3.118). При этом в области малых расстройк следует использовать приближенные равенства (3.112) или (3.116).

Графики частотных зависимостей (3.117), как функции обобщенной расстройки ξ , показаны на рис. 3.30, а, а соответствующие графики для зависимостей (3.118) — на рис. 3.30, б.

Из полученных соотношений и графиков видно, что при любом резонансе как реактивное сопротивление, так и реактивная проводимость диссипативных резонансных двухполюсников равны нулю. При этом условия резонансов (3.103), (3.104) и (3.106), (3.107) сохраняются. С учетом сказанного условия резонансов можно записать иначе:

$$X|_{\omega=\omega_0} = B|_{\omega=\omega_0} = 0, \quad \left. \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} > 0, \quad \left. \frac{dB(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} < 0. \tag{3.119}$$

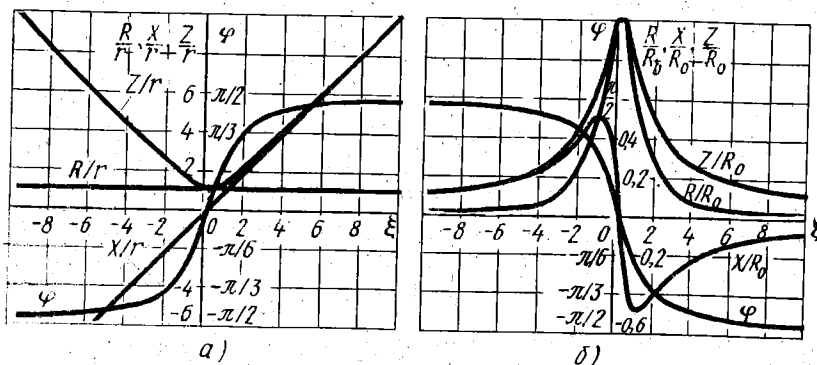


Рис. 3.30. Частотные характеристики сопротивлений резонансных двухполюсников с потерями

— для последовательного резонанса,

$$X|_{\omega=\omega_0} = B|_{\omega=\omega_0} = 0,$$

$$\left. \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} < 0, \quad (3.120)$$

$$\left. \frac{dB(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} > 0$$

— для параллельного резонанса.

Равенства (3.119),

(3.120) означают, что при любом резонансе как резонансное сопротивление, так и резонансная проводимость цепи являются диссипативными параметрами, т. е. вещественными величинами. При этом резонансное значение полного сопротивления получается минимальным при последовательном резонансе и максимальным при параллельном резонансе.

Соответственно рассмотренным значениям полного сопротивления изменяется и ток двухполюсника I при заданном значении напряжения U (см. рис. 3.29). В последовательном резонансном двухполюснике резонансный ток получается максимальным ($I|_{\omega=\omega_0} = I_{\max} = U/r$), а в параллельном — минимальным ($I|_{\omega=\omega_0} = I_{\min} = U/R_0$). Графики изменения тока в этих двухполюсниках показаны соответственно на рис. 3.31, а, б. Эти графики называют резонансными кривыми (характеристиками) резонансных двухполюсников. Из рис. 3.31 видно, что при большей добротности резонансные кривые получаются более острыми. Это свойство вытекает из формул (3.117) и (3.118): при заданной расстройке ν (или Δf) полное сопротивление (3.117) увеличивается, а полное сопротивление (3.118) уменьшается, когда добротность возрастает.

При резонансе в последовательном двухполюснике резонансные напряжения на реактивных элементах $U_{L_0} = U_{C_0} = \rho I_{\max} = U\rho/r = QU$. Так как обычно $Q > 1$ (и даже $Q \gg 1$), то $U_{L_0} > U$; $U_{C_0} > U$ (и даже $U_{L_0} \gg U$, $U_{C_0} \gg U$). Этим обстоятельством и обусловлено название резонанса (от лат. *resono* — откликаюсь). Поскольку же в данном случае «отклик» получается по напряжению, последовательный резонанс называют также резонансом напряжений.

В параллельном двухполюснике резонансные токи $I_{L_0} = I_{C_0} = U/\rho = I_{\min}R_0/\rho = QI_{\min}$. Отсюда следует, что $I_{L_0} > I_{\min}$, $I_{C_0} > I_{\min}$ (или $I_{L_0} \gg I_{\min}$, $I_{C_0} \gg I_{\min}$). Поэтому параллельный резонанс называют также резонансом токов.

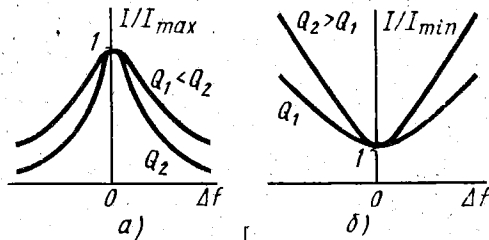


Рис. 3.31. Резонансные характеристики

§ 3.3. РЕАЛЬНЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Как отмечалось, реальные элементы электрической цепи могут быть отображены эквивалентной схемой, составленной из идеальных элементов. Критерием эквивалентности цепей является сохранение токов и напряжений на их внешних зажимах

при замене одной цепи другой, эквивалентной цепью. Схемы, эквивалентные реальным элементам (устройствам), называют также их *схемами замещения*. При расчете любой цепи, содержащей такие элементы, надо знать их схемы замещения.

1. Конденсатор. В реальном емкостном накопителе энергии, или в конденсаторе, происходят также потери энергии. Они обусловлены главным образом расходом активной мощности в диэлектрике конденсатора. Как и накапливаемая энергия (2.7), мгновенная активная мощность в конденсаторе должна определяться приложенным к нему напряжением в соответствии со вторым равенством (2.4). Это условие соблюдается в схеме замещения конденсатора, показанной на рис. 3.32, а. Здесь через сопротивление R_c (проводимость G_c), называемое сопротивлением (проводимостью) утечки, происходит перетекание зарядов, обусловленное несовершенством диэлектрика.

Согласно формуле (2.7) максимальная энергия, накапливаемая в конденсаторе, соответствует амплитудному значению напряжения:

$$\omega_{\max} = CU_m^2/2 = CU^2. \quad (3.121)$$

Согласно второму равенству (2.32) мощность потерь в конденсаторе

$$P = G_c U^2 = U^2/R_c. \quad (3.122)$$

Из соотношений (3.56), (3.57) и (3.122) находим добротность, затухание и тангенс угла потерь конденсатора:

$$Q_c = \omega CR_c = \omega C/G_c, \quad d_c = \operatorname{tg} \delta = 1/\omega CR_c = G_c/\omega C. \quad (3.123)$$

Угол потерь задается в паспорте конденсаторов некоторых типов, а добротность может быть определена экспериментально с помощью специальных измерительных приборов — Q -метров. Емкость конденсаторов C определяют с помощью измерителей емкости. По этим данным при известной частоте ω из формул (3.123) находят сопротивление и проводимость утечки.

Для воздушных и керамических конденсаторов* $\delta \ll 1$,

$d_c \ll 1$, $Q_c \gg 1$ и соответственно $R_c \gg 1/\omega C$, $G_c \ll \omega C$.

При этом вместо параллельной схемы замещения конденсатора можно построить последовательную схему замещения, показанную на рис. 3.32, б. Найдем ее параметры.

Выше говорилось об эк-

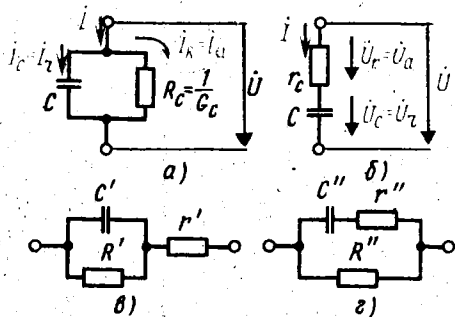


Рис. 3.32. Схемы замещения конденсатора

* С типами, конструкцией и параметрами конденсаторов следует ознакомиться в лаборатории.

вивалентности схем двухполюсников, изображенных на рис. 3.6. Эта эквивалентность соблюдается при выполнении равенств (3.24) и (3.25), которые для схем замещения рис. 3.32, а, б имеют вид

$$\begin{aligned} r_c &= G_c / (G_c^2 + \omega^2 C^2), \quad X_c = \\ &= -\omega C / (G_c^2 + \omega^2 C^2), \end{aligned} \quad (3.124)$$

где r_c — частотозависимое сопротивление потерь; X_c — реактивное сопротивление последовательной схемы замещения (рис. 3.32, б).

Частотная зависимость сопротивлений (3.124) показана сплошными линиями на рис. 3.33. Здесь существенна не только зависимость сопротивления потерь от частоты, но и характер частотной зависимости реактивного сопротивления. При таком характере этой зависимости реактивное сопротивление X_c не может быть замещено идеальными емкостными элементами. Однако при $G_c \ll \omega C$ формулы (3.124) упрощаются:

$$r_c \approx r'_c = G_c / \omega^2 C^2, \quad X_c \approx X'_c = -1 / \omega C. \quad (3.125)$$

Второе равенство (3.125) означает, что последовательная схема замещения (см. рис. 3.32, б) содержит приблизительно ту же идеальную емкость C , что и параллельная схема (см. рис. 3.32, а). Частотные зависимости сопротивлений (3.125) показаны на рис. 3.33 пунктирными линиями. Из этих графиков видно, что последовательная схема замещения справедлива только при достаточно высоких частотах. Кроме того, этой схемой можно пользоваться в ограниченном диапазоне частот, в котором изменение r_c не превышает допустимых пределов.

В обоих рассмотренных схемах замещения конденсатора его сопротивление равно нулю при бесконечно большой частоте. Если принять, что за счет потерь сопротивление конденсатора не обращается в нуль даже при $\omega = \infty$, то ни одна из этих схем замещения не является пригодной. При этом следует пользоваться одной из эквивалентных схем конденсатора, показанных на рис. 3.32, в, г. Ниже используются только две первые схемы замещения (см. рис. 3.32, а, б).

Векторные диаграммы напряжений и токов в схемах замещения конденсатора показаны на рис. 3.34, а (для параллельной схемы) и рис. 3.34, б (для последовательной схемы). Построение первой диаграммы следует начинать с вектора общего напряжения \dot{U} , а второй — с вектора общего тока \dot{I} . Этим диаграммам соответствуют подобные *треугольники проводимостей* (рис.

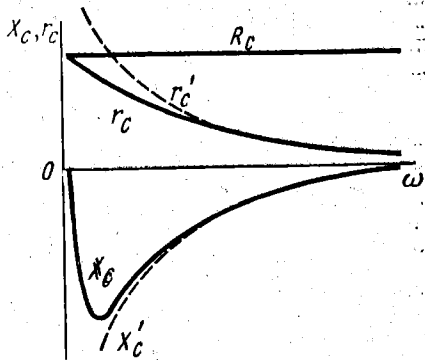


Рис. 3.33. Частотные зависимости сопротивлений конденсатора

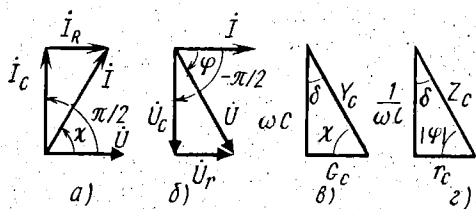


Рис. 3.34. Векторные диаграммы напряжений и токов в конденсаторе, его треугольники сопротивлений и проводимостей

3.34, в) и сопротивлений (рис. 3.34, г). Треугольник проводимостей (рис. 3.34, в) подобен треугольнику, образованному векторами токов на рис. 3.34, а, а треугольник сопротивлений (рис. 3.34, г) подобен треугольнику, образованному векторами напряжений на рис. 3.34, б.

По всем этим подобным треугольникам могут быть определены добротность и затухание конденсатора в соответствии с формулами (3.123).

2. Катушка индуктивности. В реальном индуктивном накопителе энергии, или в катушке индуктивности, происходит также расходование активной мощности. При этом потери энергии возникают за счет выделения теплоты в проводе катушки, а также в сердечнике и каркасе катушки, если они имеются и не являются идеальными диэлектриками. Кроме того, если катушка экранирована, то часть энергии теряется в экране. Все эти потери, зависящие от тока катушки, могут быть учтены в схеме замещения, изображенной на рис. 3.35, а, с помощью сопротивления потерь r_L .

Как и в конденсаторе, сопротивление потерь здесь нельзя измерить непосредственно. При необходимости его рассчитывают с помощью справочников по эмпирическим или полуэмпирическим формулам. Экспериментально же можно определить добротность катушки и по ней вычислить сопротивление потерь.

Формулы для добротности и затухания катушки могут быть получены из соответствующих равенств (3.56):

$$Q_L = \omega L / r_L, \quad d_L = r_L / \omega L. \quad (3.126)$$

Как и для конденсатора, для катушек индуктивности, используемых в устройствах связи, обычно выполняются неравенства $Q_L \gg 1$ и $d_L \ll 1$, причем тем лучше, чем больше частота, как это видно из формул (3.126). Однако прямой пропорциональности между добротностью и частотой не существует, поскольку сопротивление потерь несколько увеличивается с ростом частоты. В любом случае потери в катушках индуктивности получаются больше, чем в высокодобротных конденсаторах, так что $Q_L \ll Q_C$ и $d_L \gg d_C$.

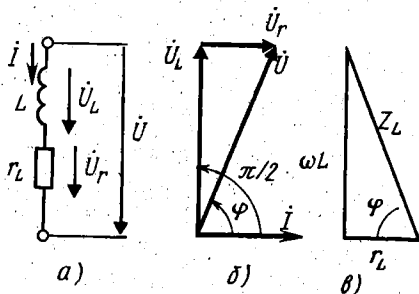


Рис. 3.35. Катушка индуктивности: а — схема замещения; б — векторная диаграмма напряжений и тока; в — треугольник сопротивлений

Векторная диаграмма тока и напряжений в катушке индуктивности и ее треугольник сопротивлений показаны соответственно на рис. 3.35, б, в. Здесь, как и прежде, треугольник сопротивлений подобен треугольнику, образованному векторами \dot{U}_L , \dot{U}_r , \dot{U} .

При необходимости последовательная схема замещения катушки индуктивности может быть пересчитана на параллельную схему замещения, содержащую сопротивление утечки по аналогии с конденсатором. Параметры параллельной схемы замещения определяются по соответствующим формулам (3.24) и (3.25), которые упрощаются при $Q_L \gg 1$. При таком пересчете может быть построена векторная диаграмма напряжения и токов, а также треугольник проводимостей, подобный треугольнику, образованному векторами токов.

3. Трансформатор. Реальный трансформатор представляет собой две катушки (обмотки) — первичную и вторичную, индуктивно связанные друг с другом. Потери энергии в обмотках трансформатора аналогичны потерям в катушках индуктивности. Схема замещения трансформатора содержит идеальный элемент взаимной индукции и два сопротивления потерь r_1 и r_2 (рис. 3.36, а).

Возможны и более сложные схемы трансформаторов. Например, на рис. 3.36, б показана схема так называемого дифференциального трансформатора, имеющего отвод от средней точки первичной обмотки. В нем токи I_1' и I_1'' создают при определенных условиях взаимно компенсирующиеся поля. Другой разновидностью трансформатора является автотрансформатор (рис. 3.36, в), в котором вторичной обмоткой служит часть первичной обмотки. Расчеты трансформаторов любой разновидности сводятся к расчету основной схемы (рис. 3.36, а), которая рассматривается ниже.

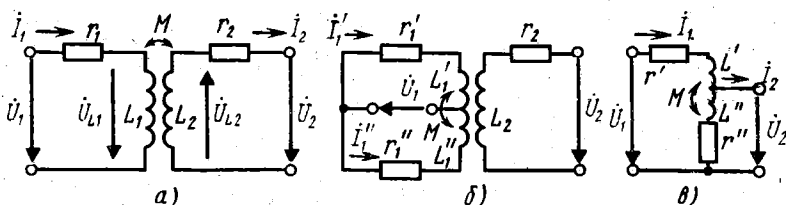


Рис. 3.36. Схемы замещения трансформаторов и автотрансформатора

При использовании символического метода для идеального элемента взаимной индукции уравнения (2.22) принимают вид

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2, \quad \dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1,$$

или

$$\dot{U}_{L1} = \dot{U}_{L1} \pm \dot{U}_{M1}, \quad \dot{U}_{L2} = \dot{U}_{L2} \pm \dot{U}_{M2}, \quad (3.127)$$

где

$$\dot{U}'_{L1} = \underline{Z}_{L1} I_1, \quad \dot{U}'_{L2} = \underline{Z}_{L2} I_2, \quad (3.128)$$

$$\dot{U}'_{M1} = \underline{Z}_M I_2, \quad \dot{U}'_{M2} = \underline{Z}_M I_1, \quad (3.129)$$

$$\underline{Z}_{L1} = jX_{L1}, \quad X_{L1} = \omega L_1, \quad \underline{Z}_{L2} = jX_{L2}, \quad X_{L2} = \omega L_2, \quad (3.130)$$

$$\underline{Z}_M = jX_M, \quad X_M = \omega M. \quad (3.131)$$

Согласно равенствам (3.127) напряжения на индуктивно связанных элементах L_1, L_2 складываются из падений напряжений $\dot{U}'_{L1}, \dot{U}'_{L2}$ и напряжений взаимоиндукции $\dot{U}'_{M1}, \dot{U}'_{M2}$. Напряжения $\dot{U}'_{L1}, \dot{U}'_{L2}$ определяются законом Ома (3.15) для индуктивных элементов L_1, L_2 , как это следует из равенств (3.128), (3.130). Напряжения взаимоиндукции $\dot{U}'_{M1}, \dot{U}'_{M2}$ определяются аналогичными соотношениями (3.129), (3.131), которые отличаются лишь тем, что напряжения на любой из катушек зависят от тока другой катушки. Равенства (3.129) по аналогии следует рассматривать как закон Ома для взаимоиндуктивности M , а параметры (3.131) — как сопротивления взаимоиндукции.

В схеме замещения рис. 3.36, а в соответствии с правилом (3.11) напряжения \dot{U}_1, \dot{U}_2 складываются из напряжений (3.127) и падений напряжения на сопротивлениях r_1, r_2 :

$$\dot{U}_1 = r_1 I_1 + \underline{Z}_{L1} I_1 \pm \underline{Z}_M I_2, \quad \dot{U}_2 = -(r_2 I_2 + \underline{Z}_{L2} I_2 \pm \underline{Z}_M I_1),$$

или

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1 \pm \underline{Z}_M I_2, \quad \dot{U}_2 = \mp \underline{Z}_M I_1 - \underline{Z}_2 I_2, \quad (3.132)$$

где

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jX_{L1}, \quad \underline{Z}_2 = r_2 + jX_{L2} \quad (3.133)$$

— комплексные сопротивления первичной и вторичной обмоток трансформатора.

Входные и выходные напряжения и токи трансформатора связаны также законом Ома:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{вх1} I_1, \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{02} I_2, \quad (3.134)$$

где $\underline{Z}_{вх1}$ — входное сопротивление трансформатора со стороны его левых зажимов; \underline{Z}_{02} — нагрузочное сопротивление трансформатора, подключенное к его выходным зажимам.

Изменение напряжений и токов в трансформаторе характеризуется коэффициентами трансформации по напряжению и току:

$$\underline{n}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1, \quad \underline{n}_I = I_1 / I_2. \quad (3.135)$$

В соответствии с изменением напряжений и токов в трансформаторе происходит также трансформация сопротивлений. Она характеризуется коэффициентом трансформации по сопротивлению, который может быть найден из соотношений (3.134) и (3.135):

$$\underline{n}_Z = \underline{Z}_{02} / \underline{Z}_{вх1} = \underline{n}_U \underline{n}_I. \quad (3.136)$$

Понятие коэффициентов трансформации (3.135), (3.136) распространяется на любые четырехполюсники, в которых происходит изменение напряжений и токов и соответственно трансформируется сопротивление.

Для рассматриваемого трансформатора коэффициент трансформации по току определяется из вторых равенств (3.132) и (3.134):

$$n_I = \mp (Z_2 + Z_{02}) / Z_M. \quad (3.137)$$

Из соотношений (3.132) определяется коэффициент трансформации по напряжению:

$$n_U = (\mp Z_M(I_1/I_2) - Z_2) / (Z_1(I_1/I_2) \pm Z_M),$$

или с учетом формулы (3.137)

$$n_U = \mp Z_M Z_{02} / (Z_1(Z_2 + Z_{02}) - Z_M^2). \quad (3.138)$$

В отличие от постоянного коэффициента трансформации (2.18) идеального трансформатора коэффициенты трансформации (3.137), (3.138) получаются неодинаковыми для тока и напряжения и являются функциями ряда параметров. В частности, эти коэффициенты изменяются при изменении нагрузочного сопротивления Z_{02} и зависят от частоты, поскольку комплексные сопротивления в формулах (3.137), (3.138) являются частотозависимыми величинами.

Из соотношений (3.136) — (3.138) находим коэффициент трансформации по сопротивлению:

$$n_Z = Z_{02}(Z_2 + Z_{02}) / (Z_1(Z_2 + Z_{02}) - Z_M^2) = Z_{02} / (Z_1 - Z_M^2 / (Z_2 + Z_{02})). \quad (3.139)$$

Коэффициент трансформации по сопротивлению, как и параметры (3.137), (3.138), не является постоянной величиной и зависит от ряда величин. Это является существенным недостатком реального трансформатора.

Из последнего равенства (3.139) и определения (3.136) следует, что

$$Z_{вх1} = Z_1 + Z_{вн1}, \quad (3.140)$$

где

$$Z_{вн1} = -Z_M^2 / (Z_2 + Z_{02}) = X_M^2 / (Z_2 + Z_{02}). \quad (3.141)$$

Таким образом, входное сопротивление (3.140) складывается из сопротивления цепи первичной обмотки Z_1 и дополнительного сопротивления (3.141), называемого *вносимым сопротивлением*. При заданном сопротивлении взаимной индукции X_M вносимое сопротивление (3.141) определяется сопротивлением цепи вторичной обмотки трансформатора $Z_2 + Z_{02}$. Это и означает, что сопротивление (3.141) как бы вносится в цепь первичной обмотки со стороны цепи вторичной обмотки трансформатора.

Физический смысл вносимого сопротивления определяется

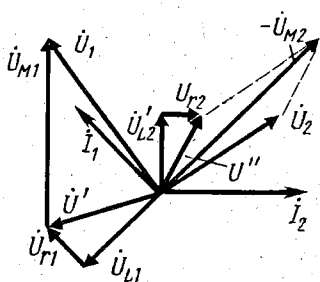


Рис. 3.37. Векторная диаграмма напряжений и токов трансформатора

природой сопротивления взаимной индукции (см. § 2.1.5). Поскольку противодействующая э. д. с., возбуждаемая в первичной обмотке через взаимную индуктивность, обусловлена током во вторичной обмотке, количественно это противодействие отображается вносимым сопротивлением, которое включено в цепи первичной обмотки, но зависит от сопротивления цепи вторичной обмотки.

Наглядное представление о сущности вносимого сопротивления дает векторная диаграмма напряжений и токов трансформатора. Такая диаграмма, построенная по уравнениям (3.127) — (3.134) для случая согласного включения обмоток, показана на рис. 3.37. Ее строят в такой последовательности: I_2 , U_2 , U'_{L2} , $U_{r2} = r_2 I_2$, $U'' = U_{r2} + U'_{L2}$, $-U_{M2} = U_2 + U''$, I_1 , U_{L1} , $U_{r1} = r_1 I_1$, $U' = U_{r1} + U'_{L1}$, U_{M1} , U_1 .

Описанные здесь количественные соотношения справедливы для реальных трансформаторов, обмотки которых выполнены без сердечника. Такие трансформаторы называют воздушными. Если трансформатор имеет ферритовый сердечник, то он практически сохраняет линейные свойства. В трансформаторах же с железным сердечником сказываются гистерезисные явления и магнитное насыщение сердечника, что является причиной параметрических и нелинейных свойств таких трансформаторов. Влияние указанных явлений сводится к минимуму при наличии воздушного зазора в поперечном сечении железного сердечника трансформатора.

В реальном трансформаторе с ферритовым кольцевым сердечником практически могут отсутствовать магнитные потоки рассеяния и $L_{\text{рас}} = L_{2\text{рас}} = 0$. Такой трансформатор называют совершенным. Для него из формул (2.17) находим

$$M = \sqrt{L_1 L_2}, \quad Z_{L1} Z_{L2} = Z_M^2. \quad (3.142)$$

Если в совершенном трансформаторе отсутствуют потери ($r_1 = r_2 = 0$), то из формул (3.138) и (3.142) следует, что

$$\underline{n}_U = n_U = \sqrt{L_2/L_1} = N_2/N_1 = n. \quad (3.143)$$

Здесь последние два равенства написаны с учетом соотношения (2.18) при условии, что индуктивности обмоток совершенного трансформатора пропорциональны квадрату числа витков. Формула (3.143) означает, что в рассмотренном трансформаторе напряжение трансформируется, как и в идеальном трансформаторе, в соответствии с равенством (2.23). Однако чтобы рассмотренный трансформатор стал идеальным, должны выполняться также условия $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$. Тогда в формуле (3.137) можно пренебречь сопротивлением Z_{02} и она преобразуется к виду (3.143): $\underline{n}_U = n_I = n$.

4. Эквивалентные схемы трансформатора. Уравнения (3.132) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} (r_1 + j\omega L_1 \pm j\omega M) \dot{I}_1 \mp \\ \mp j\omega M \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 - \dot{U}_1 = 0, \\ \pm j\omega M \dot{I}_1 \mp j\omega M \dot{I}_2 + (r_2 + \\ + j\omega L_2 \pm j\omega M) \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} [r_1 + j\omega(L_1 \pm M)] \dot{I}_1 \mp \\ \mp j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - \dot{U}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} [r_2 + j\omega(L_2 \pm M)] \dot{I}_2 \pm \\ \pm j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти равенства являются уравнениями, составленными по второму закону Кирхгофа для схем, изображенных на рис. 3.38, а (случай согласного включения) и рис. 3.38, б (случай встречного включения обмоток трансформатора), где разностный ток $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ устанавливается в соответствии с первым законом Кирхгофа. Уравнения (3.144) для этих Т-образных схем получают при мысленном замыкании контуров по стрелкам \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и их обходе в направлении токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 через взаимную индуктивность $\mp M$.

Таким образом, схемы рис. 3.38, а, б эквивалентны схеме замещения трансформатора (см. рис. 3.36, а). Используя эти эквивалентные схемы, цепи с индуктивно связанными катушками можно заменять эквивалентными цепями с непосредственно связанными элементами. Такой метод преобразования схем называется развязкой индуктивных связей.

В соответствии с (2.17), (2.18) эквивалентную схему при встречном включении обмоток (рис. 3.38, б) можно заменить другой эквивалентной схемой (рис. 3.38, в, где $L_{s1} = L_{1\text{рас}}$, $L_{s2} = L_{2\text{рас}}$), если $N_1 = N_2$. Введение индуктивностей рассеяния в эквивалентную схему трансформатора возможно и при $N_1 \neq N_2$. Для этого включим в схему рис. 3.38, б идеальный трансформатор, как показано на рис. 3.38, г. Здесь напряжение \dot{U}_2/n , ток $n\dot{I}_2$ и параметры L_2/n^2 , r_2/n^2 изменены согласно трансформирующим свой-

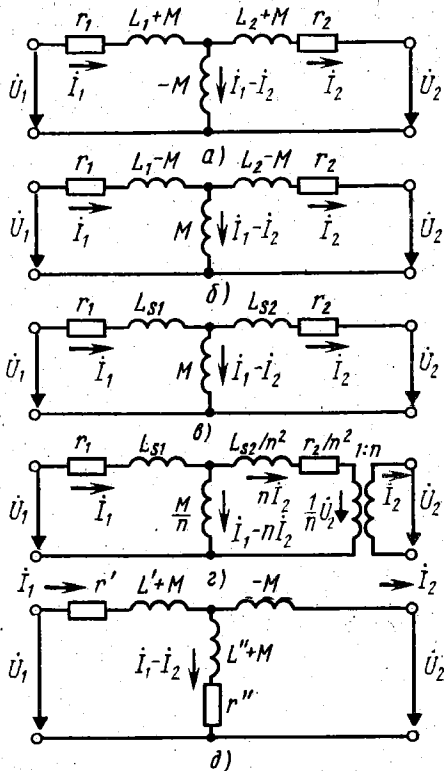


Рис. 3.38. Эквивалентные схемы трансформатора и автотрансформатора

ствам идеального трансформатора. Соответственно изменен разностный ток $I_1 - nI_2$. Чтобы при этом падение напряжения на взаимной индуктивности M не изменилось при прохождении тока nI_2 , ее значение уменьшено в n раз. Соответственно индуктивности в продольных плечах исходной схемы должны быть изменены до значений $L_1 \rightarrow M/n$ и $L_2/n^2 \rightarrow M/n = (L_2 - nM)/n^2$. При этом согласно формулам (2.17) получаются параметры, указанные на рис. 3.38, з.

Для схемы замещения с идеальным трансформатором можно составить два уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\left[r_1 + j\omega \left(L_1 - \frac{M}{n} \right) \right] I_1 + j\omega \frac{M}{n} (I_1 - nI_2) - \dot{U}_1 = 0,$$

$$\left[\frac{r_2}{n^2} + j\omega \left(\frac{L_2}{n^2} - \frac{M}{n} \right) \right] I_2 - j\omega \frac{M}{n} (I_1 - nI_2) + \dot{U}_2 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов эти уравнения сводятся к исходным соотношениям (3.132), что подтверждает правильность сделанных построений.

Поскольку в автотрансформаторе (см. рис. 3.36, в) обмотки L' , L'' включены согласно, для него может быть использована схема, изображенная на рис. 3.38, а. Изменив в ней подключение зажимов и обозначения согласно рис. 3.36, в, получим эквивалентную схему автотрансформатора, показанную на рис. 3.38, д.

§ 3.4. РЕАЛЬНЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В настоящем параграфе рассматриваются лишь независимые источники электрической энергии. Зависимым источникам напряжения и тока посвящен § 3.5. Там же излагаются основные сведения о реализации конверторов и инверторов сопротивлений.

1. Схемы замещения источников. В реальных источниках электрической энергии (источниках сигналов) при изменении нагрузки ни напряжение на зажимах источника, ни его ток не остаются неизменными. Чтобы учесть это обстоятельство, в схемах замещения реального источника надо использовать не только идеальные источники напряжения или тока, но и пассивные элементы. При этом получают схемы замещения, называемые реальными источниками напряжения (рис. 3.39, а) и тока (рис. 3.39, б). Их параметры Z_i и Y_i называются соответственно *внутренним сопротивлением* и *внутренней проводимостью* источника.

Для схем замещения справедливы законы Кирхгофа (3.10) и (3.9):

Для схем замещения справедливы законы Кирхгофа (3.10) и (3.9):

$$\underline{Z}_i I + \dot{U} = \dot{E}, \quad \underline{Y}_i \dot{U} + I = J,$$

откуда

$$\dot{U} = \dot{E} - \underline{Z}_i I, \quad I = J - \underline{Y}_i \dot{U}. \quad (3.145)$$

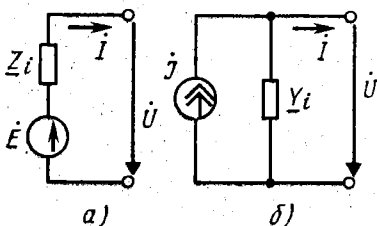


Рис. 3.39. Схемы замещения источников электрической энергии (источников сигналов)

Первое равенство (3.145) подтверждает, что при изменении тока источника напряжения изменяется и напряжение на его зажимах. Аналогично, из второго равенства (3.145) следует, что при изменении напряжения на зажимах источника тока соответственно изменяется ток, отдаваемый в нагрузку этим реальным источником.

Внутреннее сопротивление \underline{Z}_i и внутренняя проводимость \underline{Y}_i учитывают также рассеяние мощности и накопление энергии внутри реальных источников. Рассеяние мощности происходит на сопротивлении $R_i = \text{Re}\underline{Z}_i$ или проводимости $G_i = \text{Re}\underline{Y}_i$, а накопление энергии — в реактивной составляющей $X_i = \text{Im}\underline{Z}_i$ или $B_i = \text{Im}\underline{Y}_i$.

Однако обеспечивая одинаковый ток I в нагрузке при заданном напряжении \dot{U} , источники напряжения и тока имеют разную рассеиваемую мощность и накапливаемую энергию. Поэтому энергетические соотношения для этих источников надо рассматривать отдельно.

2. Отдача источником активной мощности. Рассмотрим отдачу мощности источником в нагрузку на примере источника напряжения (рис. 3.40). Приняв $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ и $\underline{Z}_n = R_n + jX_n$, с учетом закона Ома найдем активную мощность (3.32) в нагрузочном сопротивлении

$$P = E^2 R_n / ((R_i + R_n)^2 + (X_i + X_n)^2). \quad (3.146)$$

Отсюда видно, что при

$$X = X_i + X_n = 0, \quad X_n = -X_i \quad (3.147)$$

активная мощность (3.146) принимает максимальное значение

$$P_{\max} = E^2 R_n / (R_i + R_n)^2. \quad (3.148)$$

Выполнение условия (3.147) возможно за счет разных знаков реактивных сопротивлений X_i и X_n . Происходящая при этом компенсация реактивных сопротивлений означает установление в цепи последовательного резонанса. Таким образом, *при последовательном резонансе в цепи активная мощность в нагрузке получается максимальной.*

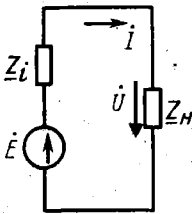


Рис. 3.40. Подключение нагрузки к источнику

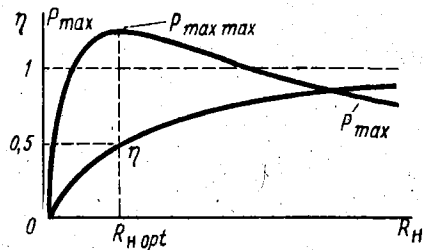


Рис. 3.41. Графики максимальной активной мощности в нагрузке и к.п.д. источника

Максимальная мощность (3.148) может иметь разные значения в зависимости от параметров схемы. Зависимость $P_{\max}(R_n)$ показана на рис. 3.41. Из формулы (3.148) и рис. 3.41 видно, что максимальная активная мощность P_{\max} имеет наибольшее значение при некотором оптимальном значении нагрузочного сопротивления $R_n = R_{n \text{ опт}}$. Эту наибольшую максимальную мощность называют мощностью максимум максимум и обозначают $P_{\max \max}$. Уменьшение мощности P_{\max} в сравнении с $P_{\max \max}$ обусловлено тем, что при $R_n = 0$ равно нулю напряжение на нагрузке, а при $R_n \rightarrow \infty$ стремится к нулю ток в нагрузке.

Оптимальное значение нагрузочного сопротивления определяют из уравнения $\frac{dP_{\max}(R_n)}{dR_n} = 0$. Отсюда с учетом равенства (3.148) находим

$$R_{n \text{ опт}} = R_i. \quad (3.149)$$

При этом значении нагрузочного сопротивления из формулы (3.148) определяем

$$P_{\max \max} = E^2/4R_i. \quad (3.150)$$

Мощность (3.150) получается при одновременном выполнении двух условий (3.147) и (3.149). Их можно записать в виде одного критерия:

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_{n \text{ опт}} = \underline{Z}_i^*, \quad (3.151)$$

где $\underline{Z}_i^* = R_i - jX_i$ — комплексно сопряженное внутреннее сопротивление источника.

Оптимальное сопротивление, удовлетворяющее критерию (3.151), называется согласованным с внутренним сопротивлением источника (по активной мощности). При согласовании нагрузки с источником тока аналогичным образом получаются соотношения

$$\underline{Y}_n = \underline{Y}_{n \text{ опт}} = \underline{Y}_i^*, \quad P_{\max \max} = I^2/4G_i, \quad (3.152)$$

где $\underline{Y}_{n \text{ опт}}$ — оптимальная (согласованная) проводимость нагрузки; $\underline{Y}_i^* = G_i - jB_i$ — комплексно сопряженная внутренняя проводимость источника.

В этом случае компенсация реактивных проводимостей B_n и B_i означает установление в цепи резонанса токов. Таким образом, при резонансе токов в цепи активная мощность в нагрузке также получается максимальной.

Согласование нагрузки с источником по критериям (3.151), (3.152) практически достигается не изменением нагрузочного сопротивления, а включением между источником и нагрузкой согласующего устройства. Согласующим устройством может служить, в частности, трансформатор (идеальный трансформатор), конвертор и инвертор сопротивлений. При таком согласовании можно говорить и о согласовании внутреннего сопротивления (проводимости) источника с нагрузочным сопротивлением (проводимостью) по критерию $\underline{Z}_i = \underline{Z}_n^*$ ($\underline{Y}_i = \underline{Y}_n^*$).

Для суммарной активной мощности, расходуемой источником на сопротивлении $R_n + R_i$, получается выражение, аналогичное (3.148): $P_0 = E^2(R_n + R_i)/(R_n + R_i)^2 = E^2/(R_n + R_i)$.

Отсюда с учетом формулы (3.148) находим коэффициент полезного действия (к. п. д.) источника при резонансе:

$$\eta = P_{\max}/P_0 = R_n/(R_n + R_i) = 1/(1 + R_i/R_n). \quad (3.153)$$

График изменения к. п. д. показан на рис. 3.41. Из этого графика и формулы (3.153) видно, что при согласовании нагрузки с источником к. п. д. получается небольшим: $\eta = 0,5$. При увеличении же нагрузочного сопротивления R_n , когда к. п. д. приближается к единице, уменьшается мощность P_{\max} . Поэтому приходится выбирать компромиссное решение с учетом целевого назначения устройства связи и предъявляемых к нему требований.

При отсутствии резонанса в цепи формула (3.153) остается справедливой при замене величины P_{\max} на активную мощность в нагрузке $P \neq P_{\max}$. Эта формула видоизменяется, если нагрузка состоит из параллельно соединенных сопротивления R_n и емкости C_n . Тогда согласно формулам (3.85), (3.87) нагрузочное сопротивление $Z_n = R_n/(1 + j\omega C_n R_n) = R + jX$, где $R = R_n/(1 + \omega^2 C_n^2 R_n^2)$, $X = -\omega C_n R_n^2/(1 + \omega^2 C_n^2 R_n^2)$. При этом к. п. д.

$$\eta = P/P_0 = R/(R_i + R) = R_n/(R_i + R_n + \omega^2 C_n^2 R_n^2 R_i).$$

Отсюда видно, что при $R_i = \text{const}$, $\omega C_n = \text{const}$ можно выбрать оптимальное значение R_n , при котором к. п. д. получается максимальным:

$$R_{n \text{ opt}} = 1/\omega C_n, \quad \eta_{\max} = \eta |_{R_n = R_{n \text{ opt}}} = 1/(1 + 2\omega C_n R_i). \quad (3.154)$$

При таких параметрах цепи говорят о согласовании нагрузки с источником по максимуму к. п. д. Согласованная нагрузка имеет реактивное сопротивление $X = -1/2\omega C_n$, на которое не наложено никаких ограничений. Поэтому его можно задавать произвольно, получая разные значения η_{\max} . При комплексном внутреннем сопротивлении источника $Z_i = R_i + jX_i$ и положительном значении $X_i = \omega L_i$ емкость C_n можно выбрать из условия резонанса $X_i + X = X_i - 1/2\omega C_n = 0$. Отсюда и из равенств (3.154) находим

$$C_n = C_p = 1/2\omega X_i, \quad R_{n \text{ opt}} |_{C_n = C_p} = 2X_i, \quad \eta_{\max} |_{C_n = C_p} = 1/(1 + R_i/X_i). \quad (3.155)$$

Хотя в этом случае цепь настроена в резонанс, активная мощность в нагрузке не является максимальной, как при соблюдении условия (3.147). Действительно, при оптимальном сопротивлении (3.154) активная мощность в нагрузке имеет значение

$$P = E^2 R / [(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2] = E^2 \omega C_n / [2Z_i^2 \omega^2 C_n^2 + 2(R_i - X_i) \times \omega C_n + 1].$$

Эта мощность максимальна при других параметрах:

$$C_n = C_0 = 1/\sqrt{2} \omega Z_i, R_{n \text{ opt}} | c_n = c_0 = \sqrt{2} Z_i, \eta_{\text{max}} | c_n = c_0 = 1/(1 + \sqrt{2} R_i/Z_i). \quad (3.156)$$

Из соотношений (3.155), (3.156) видно, что в рассмотренных случаях максимальный к. п. д. имеет значение $\eta_{\text{max}} > 1/2$ при $R_i/X_i < 1$.

3. Отдача источником полной мощности. В устройствах связи, где происходят различные преобразования маломощных сигналов, активная мощность в нагрузке может вообще не представлять интереса. В подобных случаях при анализе процессов существенной величиной является полная мощность.

Рассмотрим отдачу полной мощности в нагрузку также на примере реального источника напряжения (см. рис. 3.40). Согласно формулам (3.53) и закону Ома полная мощность

$$P_S = \frac{Z_n E^2}{|Z_i + Z_n|^2} = \frac{Z_n E^2}{Z_i^2 |1 + Z_n/Z_i|^2}.$$

Учитывая значения $Z_n = Z_n e^{j\varphi_n}$, $Z_i = Z_i e^{j\varphi_i}$ и вводя обозначения $Z_n/Z_i = a$, $\varphi_n - \varphi_i = \Delta\varphi$, после несложных преобразований получаем

$$P_S = \frac{Z_n E^2}{Z_i^2 |1 + a \cos \Delta\varphi + ja \sin \Delta\varphi|^2},$$

или

$$P_S = \frac{aE^2}{Z_i(1 + 2a \cos \Delta\varphi + a^2)}.$$

Исследуем зависимость полной мощности от параметра a при фиксированном значении Z_i , считая $\Delta\varphi = \text{const}$, т. е. $X_n/R_n = \text{const}$. Из уравнения $\frac{dP_S(a)}{da} = 0$ с учетом полученного равенства найдем, что при $a = 1$, т. е. при

$$Z_n = Z_i, \quad (3.157)$$

полная мощность получается максимальной:

$$P_S = \frac{E^2}{2Z_i(1 + \cos \Delta\varphi)}. \quad (3.158)$$

Эта максимальная мощность может иметь различные значения при разных $\Delta\varphi$. Важную роль играет случай $\varphi_n = \varphi_i$ ($\Delta\varphi = 0$). При этом вместо равенств (3.157), (3.158) получаются соотношения

$$Z_n = Z_{n \text{ opt}} = Z_i, \quad (3.159)$$

$$P_{S \text{ max}} = E^2/4Z_i. \quad (3.160)$$

Условие (3.159), при соблюдении которого получается максимальная полная мощность (3.160), называют критерием согласования

вания нагрузки с источником по полной мощности. Соответственно сопротивления (3.159) называют согласованными (по полной мощности). При согласовании нагрузки с источником по полной мощности отсутствуют искажения сигнала в нагрузке, поскольку при этом на всех частотах напряжение $\dot{U} = \dot{E}/2$ (см. рис. 3.40). Этим и обусловлена важность критерия (3.159), хотя при других соотношениях мощность (3.160) может быть превышена.

При согласовании нагрузки с источником тока аналогичным образом получаем следующие соотношения:

$$Y_n = Y_{n \text{ опт}} = Y_i, P_{S \text{ max}} = I^2/4Y_i. \quad (3.161)$$

Согласование по критериям (3.159) и (3.161) также достигается с помощью согласующих устройств.

§ 3.5. ЦЕПИ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

К линейным цепям относятся и усилительные устройства, работающие в линейном режиме. Особое место среди них занимают операционные усилители (ОУ), с помощью которых можно реализовать идеальные преобразователи мощности и другие преобразователи для обработки сигналов. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые цепи с операционными усилителями и их основные свойства.

1. **Операционный усилитель.** В § 2.2.3 операционный усилитель был определен как идеальный преобразователь мощности типа ИНУН (см. рис. 2.12, а) с $\mu = \mu_0 \rightarrow \infty$. Реальный ОУ представляет собой многокаскадный транзисторный усилитель, выполненный в виде интегрального блока, у которого коэффициент усиления имеет значение порядка $\mu_0 = 10^5$ и практически выполняются требования, предъявляемые к входному и выходному сопротивлениям ИНУН:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} \rightarrow \infty, \underline{Z}_{\text{вых}} = R_{\text{вых}} \rightarrow 0. \quad (3.162)$$

Условное обозначение ОУ показано на рис. 3.42, а. Он имеет два входа — прямой и инверсный, которые отмечают соответственно знаками «+» и «-»*. Эквивалентная схема ОУ для прямого входа показана на рис. 3.42, б. Она соответствует определению ОУ как ИНУН с $\mu = \mu_0 \rightarrow \infty$. В этой схеме выходное и входное напряжения совпадают по фазе. Для инверсного входа в эквивалентной схеме меняется либо направление э. д. с., либо знак μ_0 . Это обеспечивает инверсию выходного напряжения, т. е. изменение его фазы на угол π . В общем случае при подведении входных напряжений к обоим входам ОУ выходное напряжение

$$\dot{U}_2 = \mu_0(\dot{U}'_1 - \dot{U}''_1). \quad (3.163)$$

Имеются конструкции ОУ с несколькими входами. Для них в формулу (3.163) надо подставлять сумму всех входных напряжений, т. е. они могут служить сумматорами напряжений.

* Эти входы называют также неинвертирующим и инвертирующим.

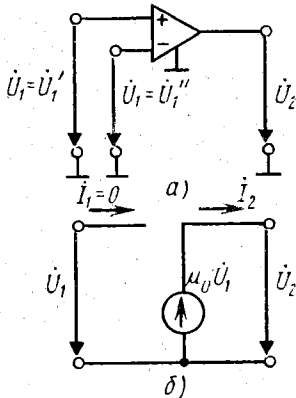


Рис. 3.42. Обозначение операционного усилителя и его эквивалентная схема

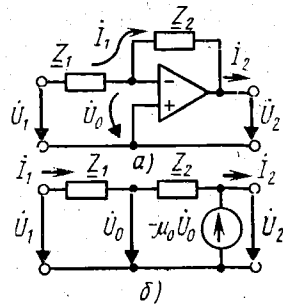


Рис. 3.43. Инвертирующий операционный усилитель и его эквивалентная схема

Для получения в операционном усилителе заданного значения коэффициента передачи применяется отрицательная обратная связь. Обратной связью называют подачу на вход усилителя некоторой части сигнала с его выхода. Обратная связь называется отрицательной, если она обеспечивает в усилителе уменьшение его коэффициента усиления. В частности, обратная связь получается отрицательной, если напряжение обратной связи складывается в противофазе с напряжением усиливаемого сигнала.

2. Инвертирующий операционный усилитель. Схема инвертирующего ОУ (ИОУ) показана на рис. 3.43, а, а его эквивалентная схема — на рис. 3.43, б. В этой схеме согласно обозначениям на рис. 3.42 $\dot{U}'_1 = 0$ и $\dot{U}_0 = \dot{U}'_1$, а ток I_1 целиком проходит через сопротивление Z_2 в силу первого соотношения (3.162). При этом согласно равенству (3.163) и второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_2 = -\mu_0 \dot{U}_0, \quad -\dot{U}_1 + Z_1 I_1 + \dot{U}_0 = 0, \quad -\dot{U}_0 + Z_2 I_1 + \dot{U}_2 = 0.$$

Исключив из этих равенств \dot{U}_0 и I_1 , находим

$$\dot{U}_2 = -\mu_0 \dot{U}_1 Z_2 / Z_1 (1 + \mu_0 + Z_2 / Z_1). \quad (3.164)$$

Отсюда получаем коэффициент передачи ИОУ при $\mu_0 \rightarrow \infty$:

$$K = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = -Z_2 / Z_1 = -R_2 / R_1. \quad (3.165)$$

Здесь последнее равенство написано для случая $Z_1 = R_1$ и $Z_2 = R_2$. Таким образом, при бесконечно большом μ_0 коэффициент передачи ИОУ получается конечным за счет отрицательной обратной связи через сопротивления Z_2 , Z_1 . При этом в случае диссипативных сопротивлений R_1 , R_2 происходит инверсия выходного напряжения, чем и обусловлено название ИОУ.

3. Схемы преобразователей мощности. Различные типы идеальных преобразователей мощности (см. рис. 2.12) можно реали-

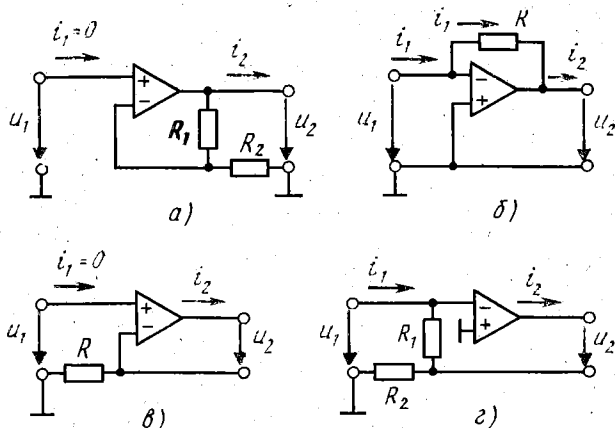


Рис. 3.44. Схемы реализации идеальных преобразователей мощности

зовать в схемах с ОУ за счет различных способов осуществления отрицательной обратной связи. В схеме рис. 3.44, а напряжение обратной связи снимается с сопротивления R_2 . За счет подведения этого напряжения к инверсному входу ОУ обеспечивается отрицательная обратная связь. Согласно формулам (3.59) и (3.163) $u_2 = \mu_0[u_1 - u_2 R_2 / (R_1 + R_2)]$, или $u_2 = \mu_0 u_1 / [1 + \mu_0 \times R_2 / (R_1 + R_2)]$.

Отсюда следует, что при $\mu_0 \rightarrow \infty$ эквивалентной схемой рассматриваемого усилителя (рис. 3.44, а) является схема ИНУН (см. рис. 2.12, а), в которой

$$\mu = e/u_1 = u_2/u_1 = 1 + R_1/R_2. \quad (3.166)$$

Для схемы рис. 3.44, б $-u_1 + R i_1 + u_2 = 0$ и $u_2 = -\mu_0 u_1$, т. е. $u_1 = -u_2/\mu_0$. Поэтому при $\mu_0 \rightarrow \infty$ она реализует ИНУТ (см. рис. 2.12, б), в котором $u_1 = 0$ и

$$z_0 = e/i_1 = u_2/i_1 = -R. \quad (3.167)$$

Преобразователь типа ИТУН реализуется схемой, изображенной на рис. 3.44, в, для которой $u_2 = \mu_0(u_1 - R i_2)$, т. е. $R i_2 = u_1 - u_2/\mu_0$. Поэтому при $\mu_0 \rightarrow \infty$ получается эквивалентная схема в виде ИТУН (см. рис. 2.12, в), в котором

$$y_0 = j/u_1 = i_2/u_1 = 1/R. \quad (3.168)$$

Наконец, для схемы рис. 3.44, г $R_1 i_1 + R_2(i_1 + i_2) - u_1 = 0$ и $u_2 = -\mu_0 u_1$, т. е. $u_1 = -u_2/\mu_0$. Поэтому при $\mu_0 \rightarrow \infty$ такая схема реализует ИТУТ (см. рис. 2.12, г), в котором

$$\alpha = j/i_1 = i_2/i_1 = -(1 + R_1/R_2). \quad (3.169)$$

Для устойчивой работы преобразователей мощности параметры (3.166)–(3.169) не должны иметь чрезмерно больших значений.

Схемы реализации ИТУН и ИТУТ, изображенные на рис. 3.44, в, г, обладают тем недостатком, что в них нагрузочное сопротивление, включаемое между выходными зажимами, получается незаземленным. Существуют более сложные схемы реализации таких преобразователей, свободные от этого недостатка.

4. Схемы конверторов сопротивлений. Простейшие схемы реализации конверторов сопротивлений (см. рис. 2.13) показаны на рис. 3.45. Для первого конвертора (рис. 3.45, а) согласно формулам (3.59) и второму закону Кирхгофа имеем $-\dot{U}_1 + \dot{U}_0 + \mu_0 \dot{U}_0 R_1 / (R_1 + R_2) = 0$ и $-\dot{U}_0 + \dot{U}_2 + \mu_0 \dot{U}_0 R_2 / (R_1 + R_2) = 0$. Исключив из этих уравнений \dot{U}_0 , находим связь между \dot{U}_1 и \dot{U}_2 :

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \frac{(\mu_0 + 1)R_1 + R_2}{R_1 - (\mu_0 - 1)R_2}, \quad \dot{U}_1 |_{\mu_0 \rightarrow \infty} = -\dot{U}_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда находим связь входного сопротивления $\underline{Z} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ с нагрузочным сопротивлением $\underline{Z}_H = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ при $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$:

$$\underline{Z} = -\underline{Z}_H R_1 / R_2. \quad (3.170)$$

Таким образом, рассмотренная схема является конвертором отрицательных сопротивлений по напряжению (КОСН). Ей соответствуют эквивалентные схемы, изображенные на рис. 2.13, в которых

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \mu_1 = 1 / \mu_2 = -R_1 / R_2. \quad (3.171)$$

Для второго конвертора (рис. 3.45, б) по второму закону Кирхгофа можно записать $-\dot{U}_1 + \dot{U}_0 + \dot{U}_2 = 0$, $\dot{U}_0 - R_2 \dot{I}_2 - R_1 \dot{I}_1 = 0$ и $-\dot{U}_1 + R_1 \dot{I}_1 + \mu_0 \dot{U}_0 = 0$. Исключив из этих уравнений \dot{U}_0 , при $\mu_0 \rightarrow \infty$ и $\underline{Z}_H = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ получаем

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1, \quad \dot{I}_2 / \dot{I}_1 = -R_1 / R_2, \quad (3.172)$$

$$\underline{Z} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = -\underline{Z}_H R_1 / R_2.$$

Следовательно, данная схема является конвертором отрицательных сопротивлений по току (КОСТ). Согласно формулам (3.172) его эквивалентные схемы, изображенные на рис. 2.13, имеют следующие параметры:

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad 1 / \alpha_1 = \alpha_2 = -R_1 / R_2. \quad (3.173)$$

Описанная схема КОСТ в отличие от рассмотренной схемы КОСН позволяет использовать заземленную нагрузку.

Конверторы положительных сопротивлений (КПС) могут быть реализованы с помощью так называемого каскадного соединения двух КОС, показанного на рис. 3.46, а. Например, два КОСТ (см. рис. 3.45, б) об-

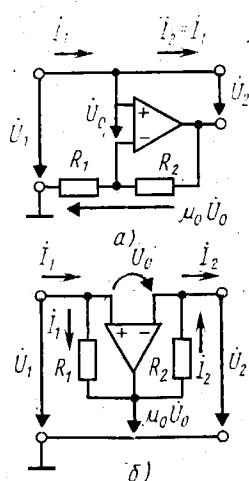


Рис. 3.45. Схемы конверторов отрицательных сопротивлений

разует КПСТ (рис. 3.46, б), эквивалентные схемы которого (см. рис. 2.13) имеют параметры

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad 1/\alpha_1 = \alpha_2 = R_1 R_3 / R_2 R_4. \quad (3.174)$$

Возможны и другие сочетания КОС, например КОСТ и КОСН (рис. 3.46, в).

Как отмечалось, КОС позволяют получить отрицательные емкости, индуктивности и диссипативные сопротивления. Например, согласно формулам (3.170), (3.172) при $Z_H = R_H$ получаем отрицательное сопротивление $Z = -R = -R_H R_1 / R_2$. При использовании в схеме КОС реактивных элементов возможно получение и других эквивалентных элементов с необычными свойствами. Например, при использовании емкости C_0 в реактивном КОС (РКОС), показанном на рис. 3.47, а, реактивное сопротивление нагрузочной емкости C_H конвертируется в диссипативное частотозависимое сопротивление

$$Z = R(\omega) = 1/\omega^2 C_0 C_H R_0. \quad (3.175)$$

Это сопротивление определяется при подстановке в последнюю формулу (3.172) сопротивлений $1/j\omega C_0$, R_0 вместо параметров R_1 , R_2 .

Сочетание РКОС и КОС (рис. 3.47, б) позволяет получить отрицательное диссипативное частотозависимое сопротивление

$$Z = -1/\omega^2 D, \quad D = C_0 C_H R_0 R_2 / R_1. \quad (3.176)$$

Это соотношение получено из формул (3.175) и (3.172). Двухполюсник с сопротивлением (3.176) принято называть *D-элементом*. Его условное обозначение показано на рис. 3.47, в.

5. Схемы инверторов сопротивлений. Среди разновидностей инверторов сопротивлений достаточно просто реализуется отрицательный гиратор (ОГ). Для него справедлива эквивалентная схема с одинаковыми зависимыми источниками (см. рис. 2.14, в, г), в которой изменена полярность одного из источников. Однако

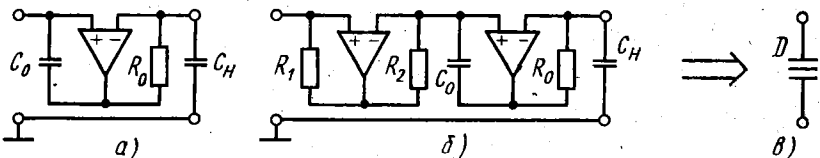


Рис. 3.47. Схемы преобразователей с реактивным конвертером сопротивлений и обозначение *D*-элемента

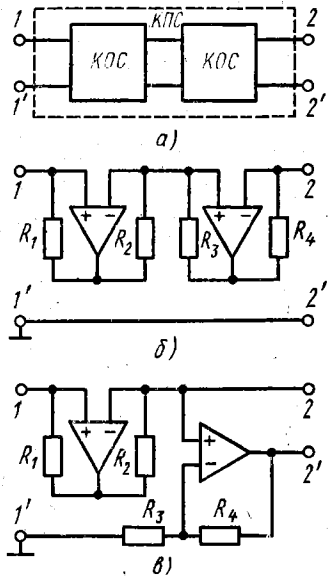


Рис. 3.46. Схемы конверторов положительных сопротивлений

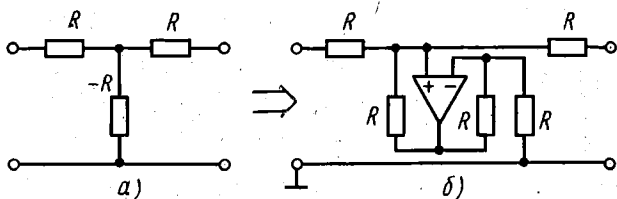


Рис. 3.48. Схемы отрицательного гиратора

для реализации схемы ОГ не обязательно использовать два ИНУТ или два ИТУН. Свойствами ОГ обладает резистивный Т-образный четырехполюсник с отрицательным сопротивлением в поперечном плече (рис. 3.48, а). Действительно, по формуле (3.65) при $R_1 = R_3 = R$ и $R_2 = -R$ находим его входное сопротивление

$$\underline{Z} = -R^2/R_{II} = -R^2/\underline{Z}_{II}. \quad (3.177)$$

Здесь последнее равенство написано для комплексного нагрузочного сопротивления. Соотношение (3.177) соответствует формулам (2.33) для ОГ, в которых $z_1 = -z_2 = z_0 = R$ и $y_1 = -y_2 = y_0 = 1/R$. Одна из реализаций схемы рис. 3.48, а показана на рис. 3.48, б, где отрицательное сопротивление $-R$ получено с помощью КОСТ, нагруженного на сопротивление R . Аналогичный результат может быть получен в П-образном резистивном четырехполюснике с отрицательным сопротивлением $R_1 = -R$ в продольном плече и $R_2 = R_3 = R$, как это видно из формулы (3.65).

Каскадное соединение ОГ с КОС позволяет получить инвертор положительных сопротивлений (ИПС), как показано на рис. 3.49, а. Его входное сопротивление находят по формулам (3.177), (3.172) и соответственно определяют параметры эквивалентных схем (см. рис. 2.14, а, б):

$$\underline{Z} = R^2 R_1 / R_2 \underline{Z}_{II}, \quad z_1 = 1/y_2 = R, \quad y_1 = 1/z_2 = R_2 / R_1 R. \quad (3.178)$$

В частности, при $R_1 = R_2 = R$ такой ИПС (рис. 3.49, б) является положительным гиратором (ПГ). Его параметры (3.178) по обозначениям в эквивалентных схемах рис. 2.14, в, г имеют следующие значения:

$$\underline{Z} = R^2 / \underline{Z}_{II}, \quad z_0 = 1/y_0 = R. \quad (3.179)$$

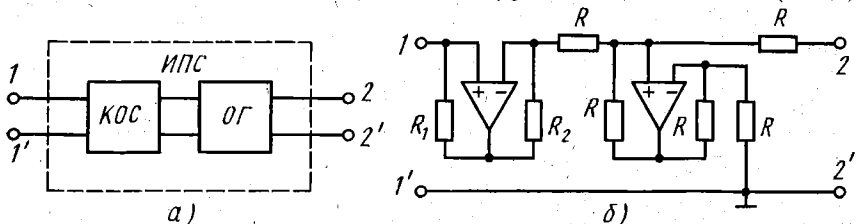


Рис. 3.49. Схемы инверторов положительных сопротивлений

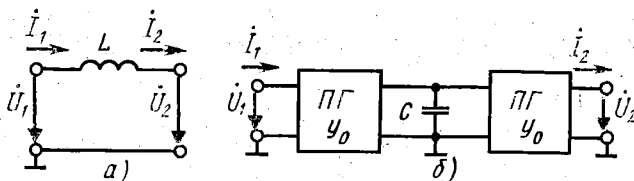


Рис. 3.50. Проходная индуктивность и ее имитация цепью с гирирами

Как отмечалось, ИПС, в частности ПГ, инвертирует емкость в индуктивность (см. рис. 2.15, в). Однако в гирираторе зажимы $1'$, $2'$ являются обычно заземленными (рис. 3.49, б). Это позволяет заменять рассмотренной безындуктивной гирираторной схемой только заземленную индуктивность. Для замены незаземленной (проходной) индуктивности (рис. 3.50, а) можно использовать безындуктивную схему с двумя одинаковыми ПГ (рис. 3.50, б), имеющими коэффициент гирирации $y_0 = 1/R$. Действительно, при произвольной нагрузке $Z_n = \dot{U}_2/\dot{I}_2$ схема рис. 3.50, а имеет входное сопротивление $Z = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = j\omega L + Z_n$. Согласно же формулам (3.179) при этом в схеме рис. 3.50, б параллельно емкости C подключена проводимость $Y' = y_0^2 Z_n$. Поэтому входное сопротивление этой схемы $Z = (j\omega C + Y')/y_0^2 = j\omega C/y_0^2 + Z_n$. Таким образом, эквивалентность схем, показанных на рис. 3.50, соблюдается при выполнении равенств

$$L = C/y_0^2 = R^2 C, \quad C = y_0^2 L = L/R^2.$$

Инверсия емкости и индуктивности по этим формулам получается такой же, как и по формулам (2.33).

§ 3.6. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Для расчета цепей со смешанным соединением элементов и сложноразветвленных цепей разработаны специальные методы. Определение напряжений и токов в любой сложной цепи осуществляется с помощью основных законов токопротождения — законов Кирхгофа и Ома. Если при этом конфигурация цепи (ее граф) не подвергается изменениям, то методы определения неизвестных величин называются прямыми методами расчета. Например, к прямым методам относится метод делителей напряжения и тока, согласно которому расчет производится по формулам (3.59)–(3.62), (3.67)–(3.74) и (3.89), (3.90). Расчет входных сопротивлений в § 3.2 производился также прямыми методами.

При этом, однако, могут объединяться одноименные элементы цепи, соединенные параллельно или последовательно. Определение параметра полученного в этом случае эквивалентного элемента производится по формулам (2.38), (2.39) и (2.45). При использовании метода комплексных амплитуд возможно также объединение разноименных элементов с определением суммарных реактивных и комплексных сопротивлений и проводимостей по формулам (3.26).

Существуют различные прямые методы расчета цепей. Их различают по виду неизвестных величин, подлежащих определению, — токов ветвей, узловых напряжений и др.

При расчете цепей прямыми методами в общем случае определяют мгновенные значения напряжений и токов произвольной формы. Ниже, однако, рассматриваются преимущественно гармонические напряжения и токи. Для них исполь-

зуют комплексные действующие значения гармонических колебаний \dot{U} и \dot{I} . Для резистивных цепей получаемые при этом соотношения пригодны и в случае постоянных напряжений U и токов I . В указанных соотношениях следует лишь произвести замену $\dot{U} \rightarrow U, \dot{I} \rightarrow I, \underline{Z} \rightarrow R, \underline{Y} \rightarrow G$. Расчеты постоянных напряжений и токов в цепях, содержащих реактивные элементы, рассматриваются далее в отдельном параграфе.

1. Метод токов ветвей. В методе токов ветвей подлежат определению неизвестные токи ветвей. Метод пригоден для произвольной цепи с n_b ветвями.

Для определения n_b неизвестных величин составляют n_b уравнений. Из них в соответствии с формулой (2.59) или (2.60) $n_l = n_d$ уравнений составляют по первому закону Кирхгофа для узлов цепи. Эти уравнения имеют вид (2.36) или (3.9).

Недостающие уравнения составляют для главных контуров по второму закону Кирхгофа (2.48) или (3.10). При этом напряжения u_k выражают через подлежащие определению токи ветвей i_k по формулам (2.1), (2.6), (2.11) или используют закон Ома (3.19). Таким образом, уравнения (3.10), например, принимают вид

$$\sum_{k=1}^m \underline{Z}_k \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{n_c} \dot{E}_k, \quad (3.180)$$

где m — количество сопротивлений \underline{Z}_k в контуре.

Количество недостающих уравнений $n_{11} = n_x$ должно определяться соотношением (2.61) либо (2.62). Однако здесь требуется уточнение. Если некоторое количество n_j ветвей содержит источники тока, то токи этих ветвей являются известными и не подлежат определению. Соответственно должно быть сокращено количество уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа. При этом вместо равенств (2.61) и (2.62) получаются формулы

$$n_{11} = n_b + 1 - (n_y + n_j), \quad n_{11} = n_b + n_n - (n_y + n_j). \quad (3.181)$$

Исключению подлежат уравнения для тех главных контуров, которые содержат ветви с источниками тока, если эти ветви не входят в состав дерева графа цепи. Для этого дерево должно быть соответственно подобрано. Однако такой способ целесообразен лишь при машинном составлении уравнений на ЭВМ.

Практически для цепей с плоскими графами удобно составлять уравнения по второму закону Кирхгофа для тех главных контуров, которые ограничивают внутренние неперекрывающиеся ячейки графа (см. § 2.5.6). При этом для исключения лишних контуров надо мысленно разорвать ветви, содержащие источники тока. Тогда следует рассматривать оставшиеся контуры, ограничивающие оставшиеся внутренние ячейки. Будем называть их *независимыми контурами*.

Для примера рассмотрим цепь с четырьмя неизвестными токами (рис. 3.51, а). Размечаем предварительно неизвестные токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$, произвольно задав их положительные направления. По формуле (2.59) определяем, что необходимо составить два

уравнения (3.9) по первому закону Кирхгофа. Составляем их для узлов a и b :

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad -I_3 + I_4 = J. \quad (3.182)$$

По первой формуле (3.181) определяем, что требуется составить два уравнения (3.180) по второму закону Кирхгофа. Для этого мысленно размыкаем ветвь с источником тока. Остается два контура, ограничивающих внутренние ячейки. Выбрав направление обхода контуров по ходу часовой стрелки, составляем для них уравнения (3.180):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 I_1 + \underline{Z}_2 I_2 &= \dot{E}, & -\underline{Z}_2 I_2 + \\ + \underline{Z}_3 I_3 + \underline{Z}_4 I_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.183)$$

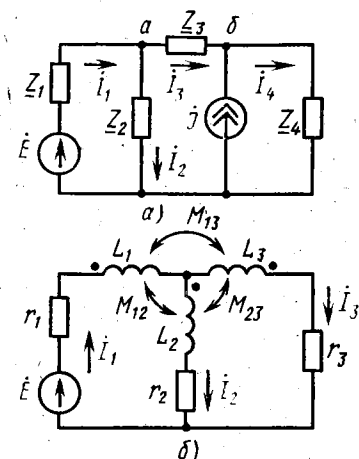


Рис. 3.51. Схемы цепей, иллюстрирующие метод токов ветвей

Совместное решение системы из четырех уравнений (3.182), (3.183) позволяет определить четыре неизвестных тока ветвей. Возможно и машинное решение такой задачи на ЭВМ с использованием стандартной программы и операторов расчета комплексных чисел. При этом само составление уравнений по методу токов ветвей осуществимо машинным способом с помощью матриц главных сечений и главных контуров, как это описано в § 2.6.

Метод токов ветвей позволяет рассчитывать цепи с индуктивными связями. При этом в уравнениях (3.180) под сопротивлениями \underline{Z}_k понимают также сопротивления взаимной индукции \underline{Z}_{kl} . Таким образом, для каждой индуктивности, связанной с m другими индуктивностями, в уравнениях (3.180) следует складывать падение напряжения на этой индуктивности $\underline{Z}_k I_k$ и m напряжений взаимной индукции $\underline{Z}_{kl} I_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$).

Например, для цепи, изображенной на рис. 3.51, б, следует составить одно уравнение по первому закону Кирхгофа и два уравнения по второму закону Кирхгофа. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0, & (r_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega M_{12}I_2 - j\omega M_{13}I_3 + \\ + (r_2 + j\omega L_2)I_2 + j\omega M_{12}I_1 - j\omega M_{23}I_3 &= \dot{E}, & (r_3 + j\omega L_3)I_3 - \\ - j\omega M_{13}I_1 - j\omega M_{23}I_2 - (r_2 + j\omega L_2)I_2 - j\omega M_{12}I_1 + j\omega M_{23}I_3 &= 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов эта система уравнений решается обычным образом.

2. Метод переменных состояния. *Переменными состояниями цепи называют мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности. В методе переменных состояния урав-*

нения составляют именно относительно этих неизвестных величин, подлежащих определению.

Хотя переменные состояния не включают в себя всех токов и напряжений цепи, они полностью определяют состояние цепи в любой момент времени, чем и обусловлено их название. Такая роль переменных состояния объясняется двумя факторами. Во-первых, они однозначно определяют запас энергии в цепи в любой момент времени. Поэтому, в частности, если по каким-либо причинам входной сигнал перестает действовать, то процесс в цепи не прекращается вследствие расходования запасенной энергии, что и определяется значениями переменных состояния. Во-вторых, по этим значениям могут быть определены любые другие напряжения и токи в цепи, с которыми переменные состояния связаны уравнениями Кирхгофа и законом Ома.

Если каждая из ветвей содержит только по одному реактивному элементу, то количество подлежащих определению неизвестных переменных состояния равно числу ветвей. В этом случае уравнения относительно переменных состояния (уравнения состояния) составляют в том же количестве и по тем же правилам, что и в методе токов ветвей (для мгновенных значений напряжений и токов).

Если некоторые ветви содержат и индуктивность и емкость, то для них количество неизвестных величин удваивается. Недостающее при этом количество уравнений состояния составляют по первому равенству (2.6).

Полученная система дифференциальных уравнений может быть решена численно на ЭВМ. Для этого она должна быть представлена в так называемой нормальной форме. Такая система дифференциальных уравнений содержит в левой части каждого уравнения первую производную одной из переменных состояния, а в правой части все остальные слагаемые (без производных).

Для примера рассмотрим цепь, показанную на рис. 3.52, а. Здесь неизвестными переменными состояниями являются напряжения u_1 , u_2 и ток i_2 . По первому и второму законам Кирхгофа можно составить лишь по одному уравнению (при $i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt}$):

$$-C_1 \frac{du_1}{dt} + i_2 = j, \quad R_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + u_2 = e.$$

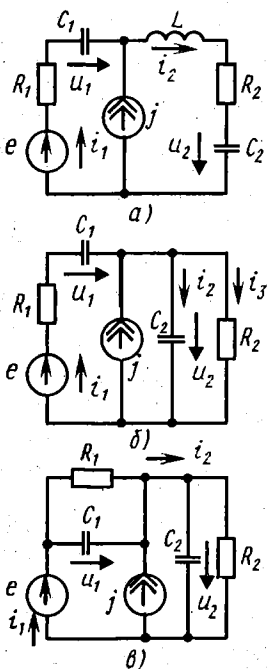


Рис. 3.52. Схемы цепей, иллюстрирующие метод переменных состояния

Недостающим уравнением является равенство

$$i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}.$$

Решив совместно полученные уравнения относительно производных, получим систему уравнений в нормальной форме:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} (i_2 - j),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} i_2,$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} [e + R_1 j - u_1 - u_2 - (R_1 + R_2) i_2].$$

Такая система уравнений решается на ЭВМ с помощью стандартной программы при заданных начальных условиях $u_{10} = u_1(t) |_{t=0}$, $u_{20} = u_2(t) |_{t=0}$, $i_0 = i_2(t) |_{t=0}$.

Возможен случай, когда некоторые ветви не содержат реактивных элементов. Неизвестные токи этих ветвей не должны входить в систему уравнений для переменных состояния. При этом из уравнений (2.25) или (2.33), (2.1) определяют в общем виде указанные неизвестные токи и подставляют их в остальные уравнения. Таким образом соответственно сокращается как число неизвестных, так и количество уравнений.

Например, для цепи рис. 3.52, б при двух переменных состояния u_1 и u_2 существует три независимых уравнения — одно по первому закону и два по второму закону Кирхгофа. Из уравнения для контура C_2 , R_2 определяют ток $i_3 = \frac{1}{R_2} u_2$. При этом остается два уравнения для двух переменных состояния:

$$-C_1 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_2} u_2 = j, \quad R_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 + u_2 = e,$$

или в нормальной форме

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} (e - u_1 - u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[j + \frac{1}{R_1} (e - u_1) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) u_2 \right].$$

Возможен, наконец, случай, когда некоторые из независимых уравнений не содержат производных переменных состояния. Следует продифференцировать такие уравнения и остальные действия производить по общей схеме. Так, для цепи с переменными состояниями u_1 , u_2 , показанной на рис. 3.52, в, получаются два независимых уравнения по законам Кирхгофа:

$$-C_1 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} - \frac{1}{R_1} u_1 + \frac{1}{R_2} u_2 = j, \quad u_1 + u_2 = e.$$

Продифференцировав второе уравнение и решив полученную систему из двух уравнений относительно производных, получим

дифференциальные уравнения в нормальной форме:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1 + C_2} \left(C_2 \frac{de}{dt} - j - \frac{1}{R_1} u_1 + \frac{1}{R_2} u_2 \right),$$
$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_1 + C_2} \left(C_1 \frac{de}{dt} + j + \frac{1}{R_1} u_1 - \frac{1}{R_2} u_2 \right).$$

Решение подобных уравнений возможно не только на цифровых, но и на аналоговых ЭВМ. В ряде случаев такие уравнения решают аналитически (см. § 6.2.2).

3. Метод контурных токов. В методе контурных токов подлежат определению неизвестные контурные токи. При этом реальные токи ветвей могут быть найдены алгебраическим суммированием соответствующих контурных токов (см. § 2.3.9).

Для определения контурных токов составляют уравнения по второму закону Кирхгофа. Независимые контуры, для которых составляют эти уравнения, выбирают по тем же правилам, что и в методе токов ветвей (см. § 3.6.1). Количество контуров определяется прежними формулами (3.181).

Перед составлением уравнений размечают контурные токи. Направление их выбирают произвольно. Однако удобно (особенно для планарных схем) выбирать для всех контурных токов одинаковые направления, например по ходу часовой стрелки. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа каждый из контуров следует обходить по выбранному направлению соответствующего контурного тока.

Как и в методе токов ветвей, уравнения по методу контурных токов составляют в виде равенств (3.180), где фигурируют токи ветвей. Следовательно, в составляемые уравнения надо сразу подставлять алгебраическую сумму контурных токов, образующих соответствующий ток ветви.

Следует подчеркнуть одну особенность составления уравнений по методу контурных токов. Как и в методе токов ветвей, в этом случае не составляют уравнения для контуров, содержащих ветви с источниками тока, а сами эти ветви мысленно размыкают. Однако в методе контурных токов перед мысленным размыканием указанных ветвей намечают вспомогательные контуры, по которым замыкаются задающие токи; будем называть их контурными задающими токами. Как и для прочих контурных токов, эти контуры выбирают произвольно, но направление каждого контурного задающего тока должно задаваться в соответствии с направлением задающего тока источника. Хотя для вспомогательных контуров уравнения не составляют, в уравнениях для остальных независимых контуров токи ветвей выражают через алгебраическую сумму контурных токов, включающую и соответствующие контурные задающие токи.

Рассмотрим для примера цепь, показанную на рис. 3.53, а. По первой формуле (3.181) определяем, что необходимо составить два уравнения вида (3.180). Для этого надо выбрать два

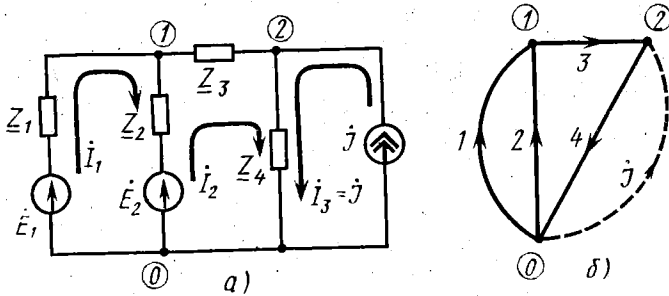


Рис. 3.53. Схема цепи и ее граф, иллюстрирующие метод контурных токов

контура, разомкнув мысленно ветвь с источником тока. Однако предварительно намечаем контурный задающий ток $i_3 = j^*$. Затем выбираем контуры, окружающие две внутренние ячейки, и намечаем контурные токи i_1, i_2 . При этом через сопротивление Z_2 в направлении тока i_1 проходит ток ветви $i_1 - i_2$, а через сопротивление Z_4 в направлении тока i_2 — ток ветви $i_2 + j$.

Составляем два уравнения (3.180), обходя выбранные контуры по намеченному направлению контурных токов:

$$\underline{Z}_1 i_1 + \underline{Z}_2 (i_1 - i_2) = \dot{E}_1 - \dot{E}_2, \quad \underline{Z}_2 (i_2 - i_1) + \underline{Z}_3 i_2 + \underline{Z}_4 (i_2 + j) = \dot{E}_2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) i_1 - \underline{Z}_2 i_2 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2, \\ -\underline{Z}_2 i_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) i_2 &= \dot{E}_2 - \underline{Z}_4 j. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Полученные уравнения имеют вполне определенную структуру, которой соответствует простой алгоритм. Для произвольной цепи, содержащей $n = n_{11}$ независимых контуров, этот алгоритм выражается следующей системой уравнений, заменяющих уравнения (3.180):

$$\sum_{l=1}^n \underline{Z}_{kl} i_l = \dot{E}'_k + \dot{E}''_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.185)$$

где

$$\underline{Z}_{kl} |_{l=k} = \underline{Z}_{kk} = \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq k}}^{n+m} \underline{Z}_{kv}, \quad \dot{E}'_k = \sum_{v=1}^{n+m} \dot{E}_{kv}, \quad \dot{E}''_k = \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \underline{Z}_{kv} j_v, \quad (3.186)$$

k — номер рассматриваемого контура; l — нумерация n независимых контуров с контурными токами i_l ; m — количество вспомогательных контуров с контурными задающими токами j_v ; $\underline{Z}_{kl} =$

* Заметим, что ток j можно замкнуть и по контуру j, Z_3, Z_2, \dot{E}_2 или по контуру j, Z_3, Z_1, \dot{E}_1 . Однако выбранный контур j, Z_4 соответствует правилу выбора контуров по внутренним ячейкам и приводит к более простым уравнениям.

$= Z_{lk}$ — сопротивление, входящее в состав k -го и l -го контуров, которое называется *сопротивлением связи* ($Z_{kl} = 0$, если отсутствует сопротивление, общее для k -го и l -го контуров); Z_{kk} — *собственное сопротивление* k -го контура, равное сумме всех сопротивлений связи этого контура и сопротивления Z_{k0} , принадлежащего только k -му контуру; \dot{E}'_k — суммарная э. д. с., действующая в k -м контуре, которая называется *контурной э. д. с.*; \dot{E}_{kv} — э. д. с. источников, входящих в состав k -го и v -го контуров (включая вспомогательные контуры), причем значение $\dot{E}_{kk} = \dot{E}_{kv} |_{v=k}$ относится к источнику напряжения, принадлежащего только k -му контуру; \dot{E}''_k — эквивалентная контурная э. д. с. в k -м контуре, складывающаяся из падений напряжения, создаваемых задающими токами \dot{I}_v на сопротивлениях связи этого контура со вспомогательными контурами.

Сопротивления связи и собственные сопротивления контуров объединяются под общим названием контурных сопротивлений.

Сопротивления связи Z_{kl} в уравнениях (3.185) имеют отрицательный знак, если контурные токи \dot{I}_k и \dot{I}_l проходят через эти сопротивления в противоположных направлениях, что всегда имеет место в планарных схемах при выборе одинакового направления всех контурных токов, например по ходу часовой стрелки. При этих же условиях сопротивления связи Z_{kv} в последнем равенстве (3.186) имеют положительный знак. Указанные знаки меняются на противоположные, если \dot{I}_k и \dot{I}_l (\dot{I}_k и \dot{I}_v) проходят через соответствующие сопротивления связи в одном направлении.

Собственные сопротивления контуров Z_{kk} , как и их составляющие Z_{kv} в первом равенстве ((3.186), всегда имеют положительный знак.

Задающие напряжения \dot{E}_{kv} во втором равенстве (3.186), которые являются составляющими э. д. с. \dot{E}'_k , имеют положительный знак, если их направления совпадают с направлением контурного тока \dot{I}_k , и отрицательный — в противном случае. Э. д. с. $\dot{E}_{kv} = 0$, если ветвь с сопротивлением связи Z_{kv} не содержит источника напряжения, и $\dot{E}_{kk} = 0$, если ветвь с сопротивлением Z_{k0} не содержит источника напряжения.

Поясним смысл введенных обозначений на рассмотренном примере (см. рис. 3.53, а). В первом уравнении (3.184) собственное сопротивление $Z_{11} = Z_1 + Z_2$, сопротивление связи со вторым контуром $Z_{12} = -Z_2$ и контурная э. д. с. $\dot{E}'_1 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$, т. е. $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$ и $\dot{E}_{12} = -\dot{E}_2$. При этом $Z_{13} = 0$ и $\dot{E}''_1 = 0$. Во втором уравнении (3.184) собственное сопротивление $Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_4$, сопротивления связи $Z_{21} = -Z_2$ и $Z_{23} = -Z_4$, контурная э. д. с. $\dot{E}'_2 = \dot{E}_{21} = \dot{E}_2$ (при $\dot{E}_{22} = 0$) и эквивалентная контурная э. д. с. $\dot{E}''_2 = Z_{23}\dot{I}_3 = -Z_4\dot{I}_3$.

При твердом усвоении введенных здесь понятий можно приобрести навыки в непосредственном составлении уравнений (3.185), что упрощает решение задач методом контурных токов. Например, уравнения (3.185) можно составить непосредственно,

минуя этап составления уравнений относительно токов ветвей. Сами же уравнения (3.184) решаются достаточно просто.

4. Матричный метод контурных токов. Метод контурных токов можно использовать и при решении задач на ЭВМ. При этом уравнения (3.185) составляют машинным способом, для чего их представляют в матричной форме:

$$(\underline{Z}_{kl})(\dot{I}^k) = (\dot{E}') + (\dot{E}''). \quad (3.187)$$

Здесь (\underline{Z}_{kl}) — матрица контурных сопротивлений, равная

$$(\underline{Z}_{kl}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \dots \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \dots \underline{Z}_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} \dots \underline{Z}_{nn} \end{pmatrix}$$

$(\dot{I}^k) = (\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dots \dot{I}_n)^T$ — матрица-столбец контурных токов; $(\dot{E}') = (\dot{E}'_1 \dot{E}'_2 \dots \dot{E}'_n)^T$ — матрица-столбец контурных э. д. с.; $(\dot{E}'') = (\dot{E}''_1 \dot{E}''_2 \dots \dot{E}''_n)^T$ — матрица-столбец эквивалентных контурных э. д. с.

Матрица контурных сопротивлений может быть определена через матрицу главных контуров. При этом главные контуры могут формироваться не по дереву и его хордам, а по описанному правилу оконтуривания внутренних неперекрывающихся ячеек графа цепи при размыкании ее ветвей, содержащих источники тока. В любом случае справедлива формула

$$(\underline{Z}_{kl}) = (A_{ГК})(\underline{Z}^B)(A_{ГК})^T,$$

где

$$(\underline{Z}^B) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{Z}_N \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица сопротивлений ветвей; $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N$ — сопротивления ветвей, пронумерованные по номерам столбцов матрицы главных контуров, т. е. по номерам ветвей; $N = n_B$ — количество ветвей в цепи (без ветвей с источниками тока).

Матрицы контурных э. д. с. также определяют через матрицу главных контуров:

$$(\dot{E}') = (A_{ГК})(\dot{E}^B), \quad (\dot{E}'') = (A_{ГК})(\underline{Z}^B)(\dot{I}^B),$$

где $(\dot{E}^B) = (\dot{E}_1 \dot{E}_2 \dots \dot{E}_N)^T$ — матрица-столбец э. д. с. ветвей, промаркированных по номерам ветвей, причем э. д. с. \dot{E}_k считается положительной, если она ориентирована одинаково с k -й ветвью; $(\dot{I}^B) = (\dot{I}_1 \dot{I}_2 \dots \dot{I}_N)^T$ — матрица-столбец задающих токов.

Здесь задающие токи \dot{I}_k маркируют по номерам k -х ветвей, параллельно которым подключены источники этих токов*. Знак тока \dot{I}_k берут положительным, если он ориентирован одинаково

* Если цепь содержит источники тока, не имеющие параллельных ветвей, то предварительно осуществляют расщепление и перенос таких источников (см. § 3.7.3).

с параллельной ему ветвью графа цепи, и отрицательным — при их встречной ориентации.

Проиллюстрируем описанный матричный способ на примере цепи рис. 3.53, а. Ее ориентированный граф изображен на рис. 3.53, б, где пунктиром показана ветвь с источником тока J . При выбранных главных контурах по контурным токам I_1, I_2

(см. рис. 3.53, а) получаем матрицу $(A_{гк}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, причем

$$(\underline{Z}^в) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 \end{pmatrix}, (\dot{E}^в) = (\dot{E}_1 \dot{E}_2 0 0)^T, (J^в) = (0 0 -J)^T.$$

Отсюда находим

$$(\underline{Z}_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$(\dot{E}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\dot{E}_1 \dot{E}_2 0 0)^T = \begin{pmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{E}_2 \end{pmatrix},$$

$$(\dot{E}'') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{Z}_4 J \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем матричное уравнение (3.187):

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{E}_2 - \underline{Z}_4 J \end{pmatrix}.$$

При анализе процессов в цепях можно использовать решение уравнений (3.185) или (3.187) в общем виде. При этом ток в l -м контуре определяется следующим образом:

$$I_l = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{k=1}^n \Delta_{kl} \dot{E}_k, \quad (3.188)$$

где $\Delta_z = |\underline{Z}_{kl}|$ — определитель матрицы контурных сопротивлений, называемый также определителем контурных сопротивлений или определителем сопротивлений (цепи); $\Delta_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$ — алгебраическое дополнение элемента \underline{Z}_{kl} определителя (матрицы) контурных сопротивлений; M_{kl} — минор определителя сопротивлений, полученный из него вычеркиванием k -й строки и l -го столбца; $\dot{E}_k = \dot{E}'_k + \dot{E}''_k$ — суммарная контурная э. д. с. в k -м контуре.

Следует отметить одно важное свойство определителя сопротивлений. В силу равенства сопротивлений связи $\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_{lk}$ этот

определитель симметричен относительно своей главной диагонали. Поэтому равны и алгебраические дополнения указанных элементов определителя, т. е. $\Delta_{kl} = \Delta_{lk}$.

5. Метод узловых напряжений. В этом методе подлежат определению неизвестные узловые напряжения. Для их определения составляют уравнения (3.9) относительно токов ветвей I_k , которые выражают через узловые напряжения согласно закону Ома (3.19).

Количество уравнений (3.9), составляемых по первому закону Кирхгофа, равно $n_1 = n_d$ и определяется по формуле (2.59) или (2.60). Однако здесь требуется уточнение. Если между некоторыми k -м и l -м узлами включен идеальный источник напряжения \dot{U}_k становится известным и узловое напряжение $\dot{U}_l = \dot{U}_k + \dot{E}$. Аналогично по найденному \dot{U}_l определяется $\dot{U}_k = \dot{U}_l - \dot{E}$. Поэтому количество неизвестных узловых напряжений уменьшается на число n_e идеальных источников напряжения, включенных между узлами цепи. Соответственно должно быть уменьшено и количество составляемых уравнений, определяемое по формулам (2.59), (2.60):

$$n_1 = n_y - (n_e + 1), \quad n_1 = n_y - (n_e + n_n). \quad (3.189)$$

Если ветвь с источником содержит также сопротивление $Z = 1/Y$ (рис. 3.54, б), то для составления уравнений (3.9) целесообразно наметить «промежуточный узел» с «узловым» напряжением $\dot{U} = \dot{U}_k + \dot{E}^*$. Тогда удобно определить ток ветви $I = Y(\dot{U}_l - \dot{U}) = Y(\dot{U}_l - \dot{U}_k - \dot{E})$.

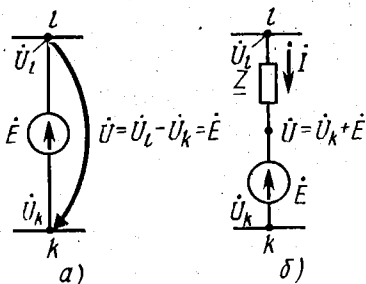


Рис. 3.54. Включение источника между узлами цепи

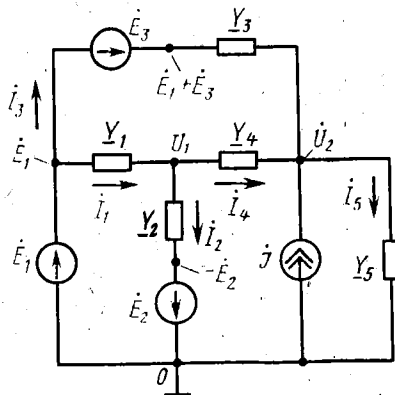


Рис. 3.55. Схема цепи, иллюстрирующая метод узловых напряжений

Рассмотрим для примера цепь, изображенную на рис. 3.55. Для нее согласно первой формуле (3.189) надо составить два уравнения. Выбрав в заземленной точке базисный узел 0, намечаем узловые напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , подлежащие определению, и известное узловое напряжение \dot{E}_1 . Затем намечаем «узловые» напряжения $-\dot{E}_2$ и $\dot{E}_1 + \dot{E}_3$ в «промежуточных узлах». Наконец, произвольно размечаем токи ветвей I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 .

* Этот «узел» является устраненной вершиной на графе цепи.

Выражаем токи ветвей через узловые напряжения:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1(\dot{E}_1 - \dot{U}_1), \quad I_2 = Y_2[\dot{U}_1 - (-\dot{E}_2)] = Y_2(\dot{U}_1 + \dot{E}_2), \\ I_3 &= Y_3(\dot{E}_1 + \dot{E}_3 - \dot{U}_2), \quad I_4 = Y_4(\dot{U}_1 - \dot{U}_2), \quad I_5 = Y_5\dot{U}_2. \end{aligned}$$

Для узлов с неизвестными узловыми напряжениями \dot{U}_1, \dot{U}_2 составляем уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$-I_1 + I_2 + I_4 = 0, \quad -I_3 - I_4 + I_5 = J,$$

или

$$\begin{aligned} -Y_1(\dot{E}_1 - \dot{U}_1) + Y_2(\dot{U}_1 + \dot{E}_2) + Y_4(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) &= 0, \\ -Y_3(\dot{E}_1 + \dot{E}_3 - \dot{U}_2) - Y_4(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + Y_5\dot{U}_2 &= J. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2 + Y_4)\dot{U}_1 - Y_4\dot{U}_2 &= Y_1\dot{E}_1 - Y_2\dot{E}_2, \\ -Y_4\dot{U}_1 + (Y_3 + Y_4 + Y_5)\dot{U}_2 &= J + Y_3\dot{E}_1 + Y_3\dot{E}_3. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Полученные уравнения имеют вполне определенную структуру. Как и в методе контурных токов, этой структуре соответствует определенный алгоритм, по которому должны составляться уравнения для $n = n_1$ узловых напряжений произвольной цепи. Для произвольного k -го узла

$$\sum_{l=1}^n \underline{Y}_{kl}\dot{U}_l = J_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.191)$$

Здесь $\underline{Y}_{kl} = \underline{Y}_{lk}$ — взаимные проводимости k -го и l -го узлов, которые всегда входят в уравнение (3.191) с отрицательным знаком, каково бы ни было выбранное направление токов. В первом уравнении (3.190) $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_4$, во втором $\underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_4$.

При $k = l$ в уравнении (3.191) вместо взаимной проводимости фигурирует собственная проводимость \underline{Y}_{kk} k -го узла. Эта проводимость складывается из проводимостей всех ветвей, сходящихся в k -м узле. В первом уравнении (3.190) $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4$, а во втором уравнении $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5$. Собственная и взаимные проводимости узлов объединяются под общим названием узловых проводимостей.

Ток J_k в уравнении (3.191), называемый узловым задающим током, складывается из трех составляющих.

Первая составляющая этого тока представляет собой сумму всех задающих токов ветвей, сходящихся в k -м узле. В первом уравнении (3.190) эта составляющая равна нулю, а во втором — J .

Вторая составляющая тока J_k представляет собой сумму произведений взаимной проводимости на э. д. с. источника, включенного в ветви с этой взаимной проводимостью. Знак такого произведения положителен, если э. д. с. направлена в сторону рассматриваемого узла. В первом уравнении (3.190) вторая составляющая равна $-\underline{Y}_2\dot{E}_2$, а во втором уравнении — $\underline{Y}_3\dot{E}_3$.

Третья составляющая тока J_k представляет собой сумму произведений взаимной проводимости на известное узловое напряжение смежного узла, т. е. на э. д. с. идеального источника напряжения, подключенного к этому узлу. Знак такого произведения положителен, если э. д. с. направлена в сторону узла. В первом уравнении (3.190) третья составляющая равна $Y_1 \dot{E}_1$, а во втором уравнении — $Y_3 \dot{E}_1$.

Эта третья составляющая учитывается достаточно просто только в тех случаях, когда все ветви с идеальными источниками напряжения подключены к базисному узлу. В противном случае во избежание усложнения алгоритма освобождаются от ветвей с идеальными источниками напряжения, применив метод переноса и расщепления таких источников, описанный в § 3.7.2.

При твердом усвоении введенных здесь понятий можно приобрести навыки в непосредственном составлении уравнений (3.191) без предварительного выражения токов ветвей через узловые напряжения. Это существенно упрощает использование метода узловых напряжений. Сами же уравнения (3.191) решаются достаточно просто.

6. Матричный метод узловых напряжений. Метод узловых напряжений, как и метод контурных токов, можно использовать при решении задач на ЭВМ. При этом предварительно устраняют все ветви с идеальными источниками напряжения и уравнения (3.191) представляют в матричной форме:

$$(Y_{kl})(\dot{U}^y) = (J^y) + (J'^y).$$

Здесь (Y_{kl}) — матрица узловых проводимостей, равная

$$(Y_{kl}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{pmatrix},$$

$(\dot{U}^y) = (\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dots \ \dot{U}_n)^T$ — матрица-столбец узловых напряжений;
 $(J^y) = (J_1^y \ J_2^y \ \dots \ J_n^y)^T$ — матрица узловых задающих токов;
 $(J'^y) = (J_1'^y \ J_2'^y \ \dots \ J_n'^y)^T$ — матрица эквивалентных узловых задающих токов.

Матрицы узловых проводимостей и узловых задающих токов могут быть определены через узловую матрицу:

$$(Y_{kl}) = (A_y)(\underline{Y}^a)(A_y)^T, \quad (J^y) = -(A_y)(J^a), \quad (J'^y) = -(A_y)(\underline{Y}^a)(\dot{E}^a),$$

где

$$(\underline{Y}^a) = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Y_N \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица проводимостей ветвей; Y_1, Y_2, \dots, Y_N — проводимости ветвей, пронумерованные соответственно номерам столбцов узловой матрицы (номерам ветвей); $N = n_n$ — количество ветвей в цепи (без ветвей с источниками тока); $(J^a) =$

$= (J_1 J_2 \dots J_N)^T$ — матрица-столбец задающих токов (такая же, как в матричном методе контурных токов, § 3.6.4); $(\dot{E}^B) = (\dot{E}_1 \dot{E}_2 \dots \dot{E}_N)^T$ — матрица-столбец э. д. с. ветвей (такая же, как в матричном методе контурных токов, § 3.6.4).

Проиллюстрируем описанный матричный способ на примере цепи, изображенной на рис. 3.53, а. По графу этой цепи (см.

рис. 3.53, б) составляем узловую матрицу $(A_y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, а также задаем матрицы

$$(Y^B) = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix}, (J^B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J \end{pmatrix}, (\dot{E}^B) = \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$(Y_{kl}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix},$$

$$(J^y) = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix}, (J^{y'}) = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем искомое матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2 \\ J \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений (3.191) может быть записано также в общем виде, аналогично решению (3.188) уравнений (3.185), (3.187). Такое решение выражается через определитель матрицы узловых проводимостей $\Delta_y = |Y_{kl}|$, называемый также определителем узловых проводимостей или определителем проводимостей (цепи).

7. Метод наложения. К основным законам токопрохождения относится также закон суперпозиции для линейных цепей (см. § 1.4.2). Соответственно к прямым методам расчета цепей следует отнести метод наложения, основанный на принципе суперпозиции.

Для произвольной линейной цепи, содержащей несколько источников, любой ток или напряжение определяют по методу наложения в несколько этапов. Сначала выключают все источники, кроме первого, и определяют напряжение или ток в том участке цепи, где это необходимо. Затем выключают первый, включают второй источник и находят напряжение или ток в том

же участке цепи под воздействием этого источника. Далее операцию повторяют аналогичным образом для всех остальных источников. При этом искомое напряжение или ток определяют как сумму напряжений или токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности.

При использовании метода *под выключением источника тока* понимают размыкание ветви с этим источником (рис. 3.56, а), а *под выключением источника напряжения* — исключение задающего напряжения при коротком замыкании зажимов идеального источника (рис. 3.56, б).

Для примера рассмотрим определение методом наложения напряжения \dot{U} в цепи, изображенной на рис. 3.57, а. При выключении источника тока (рис. 3.57, б) напряжение \dot{U}' на сопротивлении Z_2 определяется по второй формуле (3.67): $\dot{U}' = \dot{E}Z_2/(Z_1 + Z_2)$. При выключении источника напряжения (рис. 3.57, в) на сопротивлениях Z_1, Z_2 получается одинаковое напряжение \dot{U}'' , определяемое по закону Ома (3.19) с учетом второй формулы (3.26): $\dot{U}'' = ZJ = J/Y = J/(Y_1 + Y_2) = JZ_1Z_2/(Z_1 + Z_2)$.

Складывая \dot{U}' и \dot{U}'' , находим искомое напряжение $\dot{U} = Z_2(\dot{E} + Z_1J)/(Z_1 + Z_2)$.

Применение метода наложения для расчета токов в линейных цепях наглядно иллюстрируется формулой (3.188), которую можно переписать в следующем виде:

$$I_l = I_{l1} + I_{l2} + \dots + I_{kl} + \dots + I_{ln} + \dots + I_{nl}, \quad (3.192)$$

где

$$I_{kl} = \dot{E}_k/Z_{(kl)}, \quad Z_{(kl)} = \Delta_Z/\Delta_{kl}. \quad (3.193)$$

Согласно формуле (3.192) контурный ток в l -м контуре является суммой токов I_{kl} , проходящих в этом контуре под действием э.д.с. \dot{E}_k в k -х контурах ($k = 1, 2, \dots, n$). Сопротивление $Z_{(kl)}$ называется *сопротивлением передачи из k -го контура в l -й контур*.

В частном случае, когда $k=l$, составляющая тока I_{ll} обусловлена э.д.с. \dot{E}_l , действующей в этом же l -м контуре. При этом вторая формула (3.193) определяет сопротивление $Z_{(ll)} = \Delta_Z/\Delta_{ll}$,

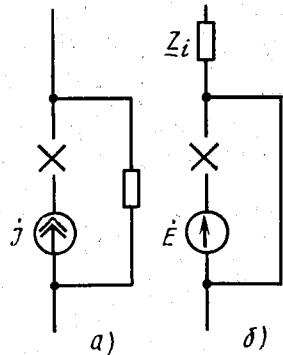


Рис. 3.56. Выключение источников и тока напряжения

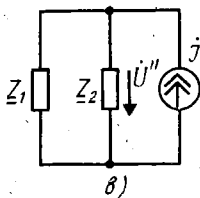
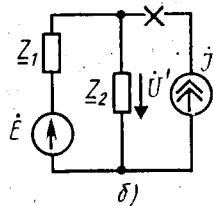
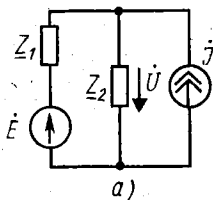


Рис. 3.57. Схемы цепей, иллюстрирующие метод наложения

которое по смыслу является *входным сопротивлением* цепи со стороны зажимов источника \dot{E}_i .

В заключение заметим, что равенство (3.192) можно рассматривать как доказательство справедливости принципа суперпозиции для контурных токов в линейной цепи. Аналогично можно трактовать и решение уравнений (3.191) относительно узловых напряжений.

§ 3. 7. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Пользуясь основными законами токопрохождения, можно устанавливать различные свойства цепей и находить вспомогательные соотношения, описывающие эти свойства. Косвенные методы расчета цепей основаны на использовании таких вспомогательных соотношений. При косвенных методах расчета цепь подвергается различным эквивалентным преобразованиям.

1. Преобразование источников напряжения и тока. Ранее были получены схемы замещения источника электрической энергии (источника сигналов) в виде источника напряжения (см. рис. 3.39, а) и источника тока (см. рис. 3.39, б). Они отображают свойства одного и того же устройства при заданных значениях напряжения U и тока I . Поэтому схемы источников напряжения и тока являются эквивалентными друг другу. Следовательно, *при эквивалентных преобразованиях любых сложных цепей источник напряжения может заменяться источником тока и наоборот*. Найдем условия такой эквивалентности.

Перепишем соотношения (3.145) в сопоставимом виде:

$$\dot{U} = \dot{E} - Z_i I, \quad \dot{U} = J / Y_i - I / Y_i.$$

Отсюда следует, что при одинаковых токах I напряжения равны, если

$$Z_i = 1 / Y_i, \quad \dot{E} = J / Y_i, \quad Y_i = 1 / Z_i, \quad J = \dot{E} / Z_i. \quad (3.194)$$

Первые два равенства (3.194) позволяют осуществить эквивалентное преобразование источника тока в источник напряжения, а последние два равенства — обратное преобразование источника напряжения в источник тока. Такие эквивалентные преобразования могут упрощать использование методов контурных токов и узловых напряжений (см. § 3.6.3, 3.6.5).

2. Перенос и расщепление источников напряжения. Если две цепи отличаются друг от друга только идеальными источниками напряжения, то они являются эквивалентными при условии, что во всех независимых контурах этих цепей сумма контурных э. д. с. одинакова. Это непосредственно вытекает из равенств (3.188), которые получаются одинаковыми для обеих цепей, если выполняется оговоренное условие. Поэтому все контурные токи в таких цепях являются одинаковыми.

Указанная эквивалентность лежит в основе эквивалентного преобразования цепей, называемого методом переноса и расщепления источников. Рассмотрим этот метод на примере цепей, изображенных на рис. 3.58.

Перенесем идеальный источник э.д.с. \dot{E} (рис. 3.58, а) из ветви с сопротивлением Z_1 в ветвь с сопротивлением Z_2 (рис. 3.58, б)*. При этом в контурах Z_1, Z_2 будет действовать одинаковая э.д.с. Однако в контуре Z_2, Z_3 первой цепи э.д.с. отсутствует, а в том же контуре второй цепи появилась э.д.с. \dot{E} . Поэтому такой перенос источника не является эквивалентным преобразованием цепи.

Поступим теперь иным образом. При переносе идеального источника э.д.с. \dot{E} через узел а расцепим его на два одинаковых источника, которые внесем в каждую из присоединенных к узлу ветвей с сопротивлениями Z_2 и Z_3 (рис. 3.58, в). При таком расщеплении источника по количеству присоединенных к узлу ветвей в любом контуре, замыкающемся через этот узел, суммарная э.д.с. не изменится. Действительно, в контуре Z_2, Z_3 (рис. 3.58, в) суммарная э.д.с. равна нулю, как и в исходной цепи рис. 3.58, а. Поэтому указанные цепи описываются одинаковыми уравнениями для контурных токов:

$$(Z_1 + Z_2)\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 = \dot{E},$$

$$-Z_2\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2 = 0 (= \dot{E} - \dot{E}).$$

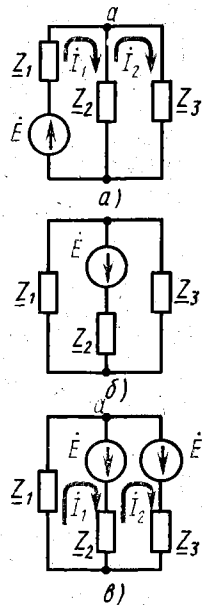


Рис. 3.58. Схемы цепей, иллюстрирующие метод переноса и расщепления источника напряжения

Таким образом, цепи, изображенные на рис. 3.58, а, в, являются эквивалентными. Такое эквивалентное преобразование упрощает использование метода узловых напряжений (см. § 3.6.5).

3. Расщепление и перенос источников тока. Если две цепи отличаются друг от друга только идеальными источниками тока, то они являются эквивалентными при условии, что во всех «независимых» узлах этих цепей сумма задающих токов одинакова. Это непосредственно вытекает из равенств (3.191), согласно которым такие цепи имеют одинаковые узловые напряжения.

На указанной эквивалентности основано преобразование цепей по методу расщепления и переноса источников тока. Сущность этого метода иллюстрируется рис. 3.59.

Источник тока \dot{J} в исходной цепи (рис. 3.59, а) расщепляем на два последовательно соединенных источника тока \dot{J} (рис. 3.59, б). Такое преобразование не может являться окончательным, по-

* Если цепь содержит реальный источник напряжения, то следует говорить о переносе (и расщеплении) его э. д. с.

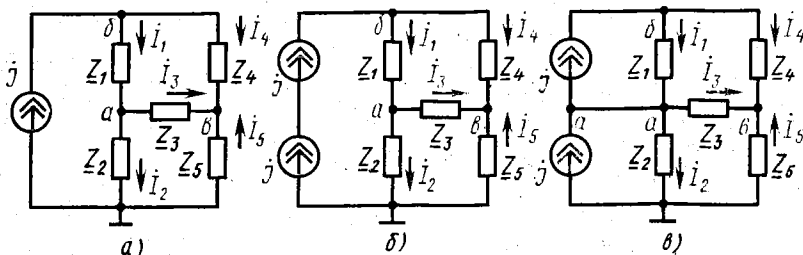


Рис. 3.59. Схемы цепей, иллюстрирующие метод расщепления и переноса источника тока

сколько последовательное соединение источников тока лишено смысла (см. § 2.3.1). Завершающим преобразованием является присоединение («перенос») точки контакта двух полученных источников к какому-либо узлу. На рис. 3.59, в сделано такое присоединение к узлу *a*, но можно было бы присоединить указанную точку к узлу *в*.

Произведенное преобразование не затрагивает уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа для узлов *б* и *в*. Однако и уравнение для узла *a* остается неизменным:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 (= J - j).$$

Таким образом, цепи, изображенные на рис. 3.59, *a*, *в*, являются эквивалентными. В то же время они обладают разными свойствами. В цепи рис. 3.59, *в* источники тока могут быть преобразованы в источники напряжения, а в цепи рис. 3.29, *a* такое преобразование невозможно. Кроме того, расщепление и перенос источников тока упрощает использование методов контурных токов и узловых напряжений (см. § 3.6.3, 3.6.5).

4. Метод эквивалентного источника. Схемы замещения реальных источников энергии (источников сигналов), показанные на рис. 3.39, составлены для источников произвольной физической природы и конструкции. Такими источниками могут быть, в частности, любые активные цепи. Таким образом, *любая активная цепь-двухполюсник может быть заменена эквивалентным источником напряжения или тока. В этом и заключается метод эквивалентного источника.*

Для определения двух параметров эквивалентного источника напряжения проведем мысленно два эксперимента. Разомкнем выходные зажимы активной цепи (АЦ) и эквивалентного источника (рис. 3.60, *a*, *б*), т. е. поставим их в режим холостого хода, при котором $I_x = 0$. Выходное напряжение активной цепи равно при этом напряжению холостого хода \dot{U}_x (рис. 3.60, *a*). На зажимах же эквивалентного источника $\dot{U} = \dot{U}_x = \dot{E}$ (рис. 3.60, *б*), как это следует из первого равенства (3.145) при $I_x = 0$.

Если теперь выключить все задающие напряжения и токи, как показано на рис. 3.56, то в активной цепи (рис. 3.60, *в*) и в эквивалентном источнике (рис. 3.60, *г*) можно определить их входные

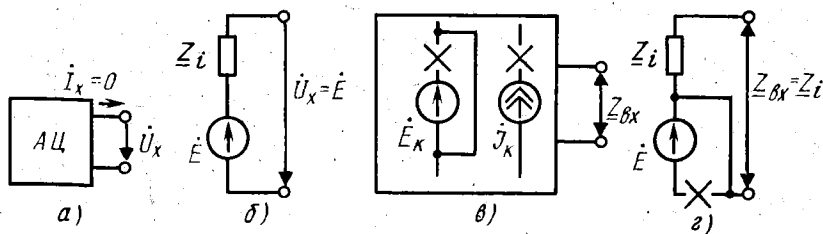


Рис. 3.60. Определение параметров эквивалентного источника напряжения

сопротивления $Z_{вх}$. В силу эквивалентности рассматриваемых цепей найденные напряжения и сопротивления должны быть соответственно равны:

$$\dot{E} = \dot{U}_x, \quad Z_i = Z_{вх}. \quad (3.195)$$

Эти параметры и являются искомыми параметрами эквивалентного источника напряжения, которым может быть замещена любая активная цепь. Соотношения (3.195) составляют содержание теоремы об эквивалентном источнике напряжения.

Для определения двух параметров эквивалентного источника тока режим холостого хода должен быть заменен режимом короткого замыкания, при котором $\dot{U}_k = 0$ (рис. 3.61, а, б), а выходной ток равен току короткого замыкания \dot{I}_k . На втором этапе надо по-прежнему разомкнуть выходные зажимы и выключить задающие напряжения и токи (рис. 3.61, в, г). При этом измерения подлежат не входные сопротивления, а входные проводимости. Из указанных двух измерений определяются искомые параметры эквивалентного источника тока:

$$\dot{J} = \dot{I}_k, \quad Y_i = Y_{вх}. \quad (3.196)$$

Параметры (3.196) могут быть также определены через параметры (3.195) по формулам (3.194). Соотношения (3.196) составляют содержание теоремы об эквивалентном источнике тока.

5. Изменение направления передачи сигнала. Расчет цепи при изменении направления передачи сигнала может производиться так называемым методом обращения (взаимности). При этом цепь должна содержать только один источник. Рассмотрим пассивный четырехполюсник, на входе которого включен источник э. д. с. \dot{E} (рис. 3.62, а). Согласно формулам (3.192), (3.193)

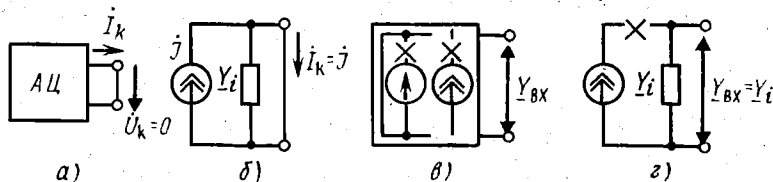


Рис. 3.61. Определение параметров эквивалентного источника тока

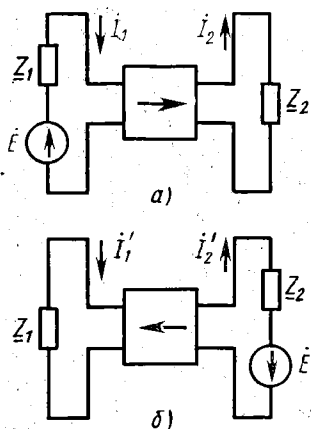


Рис. 3.62. Изменение направления передачи сигнала через пассивный четырехполюсник

выходной ток I_2 определяется через сопротивление передачи $Z_{(12)}$ из входного (первого) контура в выходной (второй) контур четырехполюсника:

$$I_2 = \dot{E} / Z_{(12)}, \quad Z_{(12)} = \Delta_Z / \Delta_{12}. \quad (3.197)$$

Здесь Δ_Z — определитель сопротивлений всей цепи, включающей четырехполюсник и сопротивления Z_1 , Z_2 , а Δ_{12} — алгебраическое дополнение элемента Z_{12} этого определителя.

Перенесем задающее напряжение \dot{E} из входного в выходной контур, что означает изменение направления передачи сигнала через четырехполюсник (рис. 3.62, б). При этом все токи в цепи изменятся. В частности, бывший входной ток I_1 изменится до некоторого значения I_1' и приобретает смысл нового выходного тока.

При изменении направления передачи сопротивления Z_1 , Z_2 остаются в своих контурах. Поэтому определитель Δ_Z сохраняет прежнее значение. Таким образом, новый выходной ток определяется следующим образом:

$$I_1' = \dot{E} / Z_{(21)}, \quad Z_{(21)} = \Delta_Z / \Delta_{21}. \quad (3.198)$$

В силу отмеченного свойства симметричного определителя сопротивлений цепи (см. § 3.6.4) в рассматриваемом случае соблюдается равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{12}. \quad (3.199)$$

Из вторых равенств (3.197), (3.198) и равенства (3.199) следует, что при изменении направления передачи через четырехполюсник сопротивление передачи не меняется:

$$Z_{(21)} = Z_{(12)}. \quad (3.200)$$

Из первых равенств (3.197), (3.198) и свойства (3.200) находим, что

$$I_1 = I_2. \quad (3.201)$$

Это равенство определяет свойство (принцип) взаимности пассивных цепей и составляет содержание теоремы взаимности, или обратимости. Согласно этому свойству при изменении направления передачи сигнала новый выходной ток получается равным прежнему выходному току. Цепи, обладающие таким свойством, называются обратимыми, а в противном случае — необратимыми. По смыслу доказательства соотношения (3.201) любые линейные пассивные четырехполюсники являются обратимыми цепями.

6. Взаимное преобразование пассивной звезды и пассивного треугольника. Выше уже рассматривалась эквивалентность пассивных двухполюсников. Пассивные многополюсники также могут быть эквивалентными. В частности, *трехлучевая звезда и треугольник*

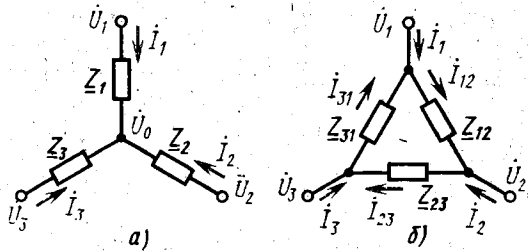


Рис. 3.63. Взаимное преобразование пассивной звезды и пассивного треугольника

(рис. 3.63) могут стать эквивалентными, если по общему критерию эквивалентности в этих цепях обеспечить одинаковые токи I_1 , I_2 , I_3 при одинаковых узловых напряжениях \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , \dot{U}_3 . Для этого надо соответствующим образом выбрать сопротивления в этих схемах. Схемы, которые могут стать эквивалентными при соответствующем выборе параметров их элементов, называют потенциально эквивалентными, а указанное свойство этих схем — потенциальной эквивалентностью.

Для нахождения условия эквивалентности треугольника и звезды определим для нее (рис. 3.63, а) токи лучей:

$$I_1 = Y_1(\dot{U}_1 - \dot{U}_0), \quad I_2 = Y_2(\dot{U}_2 - \dot{U}_0), \quad I_3 = Y_3(\dot{U}_3 - \dot{U}_0). \quad (3.202)$$

Сложив эти равенства, найдем из первого закона Кирхгофа ($I_1 + I_2 + I_3 = 0$) узловое напряжение центрального узла:

$$\dot{U}_0 = (Y_1 \dot{U}_1 + Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 \dot{U}_3) / Y, \quad (3.203)$$

где $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ — собственная проводимость центрального узла.

Из соотношений (3.202) и (3.203) можно определить токи звезды:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 Y_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) / Y + Y_1 Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) / Y, \\ I_2 &= Y_2 Y_1 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) / Y + Y_2 Y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_3) / Y, \\ I_3 &= Y_3 Y_1 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) / Y + Y_3 Y_2 (\dot{U}_3 - \dot{U}_2) / Y. \end{aligned}$$

С другой стороны, токи в треугольнике (рис. 3.63, б) связаны соотношениями

$$I_1 = I_{12} - I_{31}, \quad I_2 = I_{23} - I_{12}, \quad I_3 = I_{31} - I_{23},$$

где

$$I_{12} = Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2), \quad I_{23} = Y_{23}(\dot{U}_2 - \dot{U}_3), \quad I_{31} = Y_{31}(\dot{U}_3 - \dot{U}_1).$$

Сравнивая эти токи с найденными токами звезды, устанавливаем, что они получаются одинаковыми при соблюдении следующих условий:

$$Y_{12} = Y_1 Y_2 / Y, \quad Y_{23} = Y_2 Y_3 / Y, \quad Y_{31} = Y_3 Y_1 / Y. \quad (3.204)$$

Эти равенства являются условиями эквивалентности треугольника и звезды. Они позволяют преобразовать звезду в треугольник.

Для обратного преобразования треугольника в звезду следует решить совместно систему нелинейных уравнений (3.204) относительно $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$. С этой целью найдем из этих уравнений произведения $\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}, \underline{Z}_{21}\underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}\underline{Z}_{32}$ и сумму $\underline{Z} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}$, которая является собственным сопротивлением контура треугольника. Упрощение выражения для \underline{Z} достигается применением формулы квадрата трехчлена. Разделив найденные произведения сопротивлений на указанную сумму, получим

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}/\underline{Z}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{Z}_{23}/\underline{Z}, \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{31}\underline{Z}_{32}/\underline{Z}. \quad (3.205)$$

В формулах (3.205) для большей наглядности переставлены некоторые индексы с учетом равенства $\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_{lk}$.

7. Взаимное преобразование активной звезды и активного треугольника. Активную трехлучевую звезду (рис. 3.64, а) можно преобразовать в эквивалентный активный треугольник. Для этого сначала преобразуем пассивную звезду в пассивный

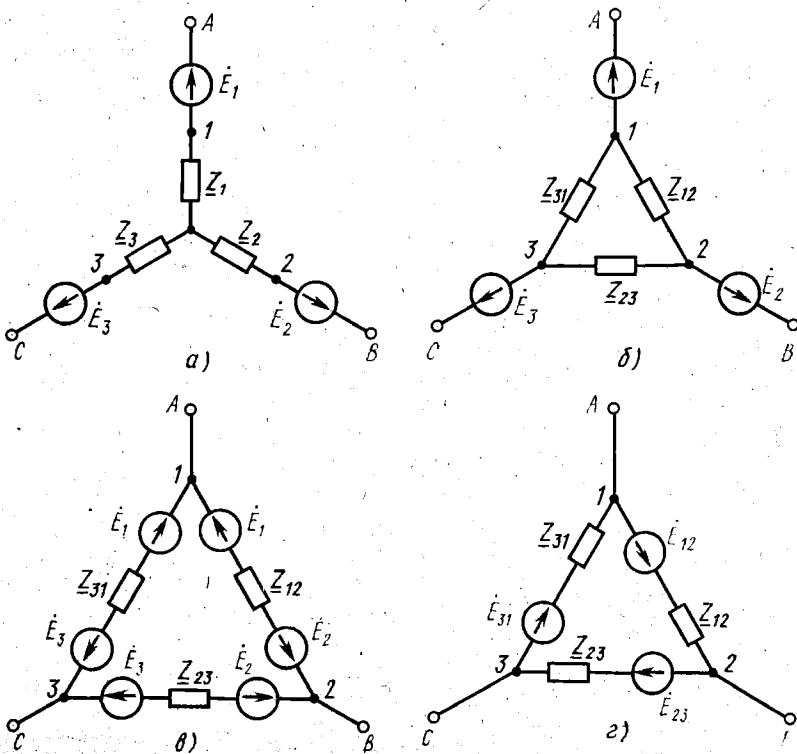


Рис. 3.64. Преобразование активной звезды в активный треугольник

треугольник в соответствии с формулами (3.204), как показано на рис. 3.64, б. Затем в соответствии с методом переноса и расщепления источников напряжения, (см. § 3.7.2) все три э. д. с. перенесем в ветви треугольника (рис. 3.64, в). Теперь остается объединить последовательно включенные идеальные источники напряжения, как показано на рис. 3.64, г. При этом определяются эквивалентные параметры:

$$\dot{E}_{12} = \dot{E}_2 - \dot{E}_1, \dot{E}_{23} = \dot{E}_3 - \dot{E}_2, \dot{E}_{31} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3. \quad (3.206)$$

Расчет эквивалентного активного треугольника производится по формулам (3.204) и (3.206).

Обратное преобразование активного треугольника (рис. 3.65, а) в активную трехлучевую звезду можно произвести в пять этапов. На первом этапе источники напряжения преобразуются в источники тока (рис. 3.65, б) в соответствии с формулами (3.194). На втором этапе пассивный треугольник преобразуется в пассивную звезду (рис. 3.65, в) в соответствии с формулами (3.205). На третьем этапе в соответствии с методом расщепления и переноса источников тока (см. § 3.7.3) источники тока расщепляются и переносятся к центральному узлу (рис. 3.65, г). На четвертом этапе объединяются параллельно включенные идеальные источники тока (рис. 3.65, д). На пятом этапе источники тока преобразуются в источники напряжения (рис. 3.65, е) в соответствии с формулами (3.204). При этом с помощью формул (3.205) опре-

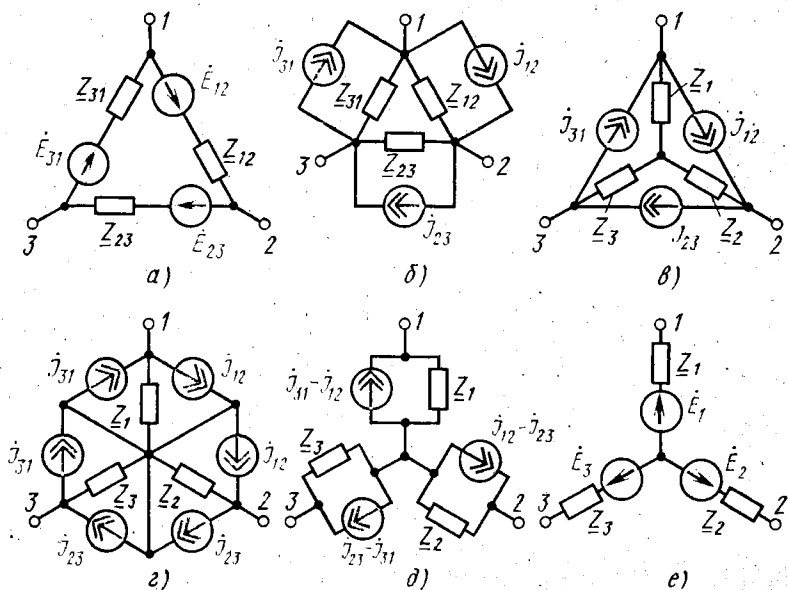


Рис. 3.65. Преобразование активного треугольника в активную звезду

деляются эквивалентные параметры:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= (\underline{Z}_{12}\dot{E}_{31} - \underline{Z}_{31}\dot{E}_{12})/\underline{Z}, & \dot{E}_2 &= (\underline{Z}_{23}\dot{E}_{12} - \underline{Z}_{12}\dot{E}_{23})/\underline{Z}, \\ \dot{E}_3 &= (\underline{Z}_{31}\dot{E}_{23} - \underline{Z}_{23}\dot{E}_{31})/\underline{Z}. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Расчет эквивалентной активной звезды производится по формулам (3.205) и (3.207).

§ 3.8. РАСЧЕТ ПОСТОЯННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

Рассмотренные методы расчета цепей, как уже отмечалось, пригодны и в случае постоянных напряжений и токов. Однако в этом случае имеется несколько особенностей, которые требуют специального подхода к расчету некоторых цепей. Эти особенности и подходы рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Расчет цепей с реактивными элементами. Как отмечалось, при использовании любых расчетных соотношений для постоянных напряжений и токов комплексные сопротивления и проводимости следует заменять диссипативными сопротивлениями и проводимостями. При постоянных напряжениях и токах существуют и другие правила расчета цепей, содержащих реактивные элементы. Такие цепи характеризуются тремя особенностями.

Сопротивление индуктивности для постоянного тока равно нулю: $X = \omega L = 0$, поскольку $\omega = 0$. Это эквивалентно короткому замыканию как самой индуктивности, так и всех элементов, подключенных параллельно к индуктивности. За счет этого цепи упрощаются, как показано на рис. 3.66. В этом заключается первая особенность.

Емкость не пропускает постоянного тока. За счет этого цепь может содержать обесточенные диссипативные элементы. Для

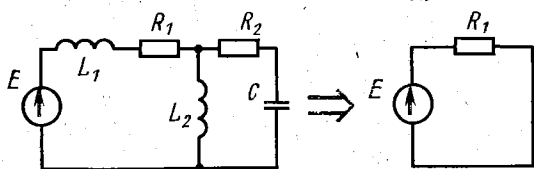


Рис. 3.66. Упрощение цепи с индуктивностями на постоянном токе

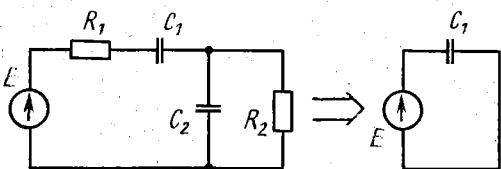


Рис. 3.67. Упрощение цепи с обесточенными диссипативными элементами

таких элементов $U = RI = 0$, поскольку $I = 0$. Равенство нулю напряжения на элементе эквивалентно короткому замыканию как самого этого элемента, так и всех других элементов, подключенных к нему параллельно. За счет этого цепи упрощаются, как показано на рис. 3.67. В этом заключается вторая особенность.

Третья особенность заключается в существовании изолированных узлов (см. рис. 2.23).

Цепи с такими узлами нельзя рассчитывать методом токов ветвей и методом контурных токов, поскольку сами эти токи равны нулю. Вместо этих методов используют методы зарядов ветвей и контурных зарядов.

2. Метод зарядов ветвей. Если ветвь цепи состоит из емкости, то статический заряд на этой емкости называют зарядом ветви (по аналогии с током ветви).

При наличии изолированных узлов в цепи заряды ветвей могут являться неизвестными величинами, подлежащими определению. Их определение составляет содержание метода зарядов ветвей. В этом методе уравнения составляют по закону сохранения зарядов (2.41) или (2.42), которые заменяют уравнения по первому закону Кирхгофа. Недостающие уравнения, как и в методе токов ветвей, составляют по второму закону Кирхгофа (2.48). При этом напряжения на емкостях выражают через заряды ветвей по формуле (2.5):

$$\sum_{k=1}^m Q_k / C_k = E, \quad (3.208)$$

где E — суммарная э. д. с. в контуре (контурная э. д. с.); m — количество емкостей в контуре.

При использовании уравнений (2.41), (2.42) и (3.208) во избежание путаницы в знаках рекомендуется размечать предварительно полярность зарядов, подобно тому как в методе токов ветвей размечают направление токов.

Рассмотрим для примера схему, в которой емкости C_1, C_2 имели начальные заряды Q_{01}, Q_{02} заданной полярности (рис. 3.68).

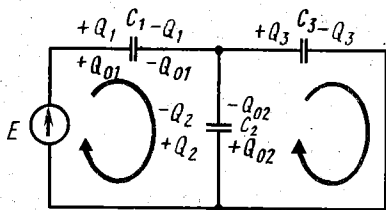


Рис. 3.68. Схема цепи, иллюстрирующая метод зарядов ветвей

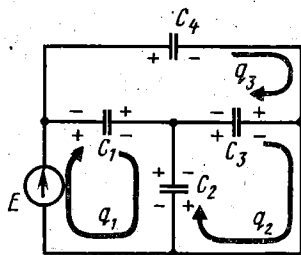


Рис. 3.69. Схема цепи, иллюстрирующая метод контурных зарядов

Размечаем произвольно полярность зарядов ветвей Q_1, Q_2, Q_3 . Для их определения составляем одно уравнение (2.42) и два уравнения (3.208). Выбрав для этого верхний узел и контуры с направлениями обхода, показанными стрелками, получаем

$$-Q_1 - Q_2 + Q_3 = -Q_{01} - Q_{02}, \quad Q_1/C_1 - Q_2/C_2 = E, \\ Q_2/C_2 + Q_3/C_3 = 0.$$

Решение этой системы уравнений дает искомые значения зарядов ветвей Q_1, Q_2, Q_3 , по которым определяются и напряже-

ния на емкостях $U_1 = Q_1/C_1$, $U_2 = Q_2/C_2$, $U_3 = Q_3/C_3$. Если искомыми величинами являются указанные напряжения, то можно модифицировать систему уравнений:

$$\begin{aligned} -C_1U_1 - C_2U_2 + C_3U_3 &= -Q_{01} - Q_{02}, & U_1 - U_2 &= E, \\ U_2 + U_3 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь начальные заряды могут определяться по заданным начальным напряжениям на емкостях.

3. Метод контурных зарядов. *Под контурным зарядом следует понимать часть полного заряда ветви, которая является одинаковой для всех емкостей, входящих в замкнутый контур.* При этом полный заряд на любой емкости выражается через алгебраическую сумму соответствующих контурных зарядов.

В методе контурных зарядов определяют эти заряды. Для их определения составляют уравнения (3.208), где заряды ветвей Q_k выражают через контурные заряды q_k .

Например, для схемы с тремя независимыми контурами (рис. 3.69) намечаем три контурных заряда q_1 , q_2 , q_3 . Их полярность определяется выбранным направлением стрелок, по которым обходятся контуры. Составляем систему уравнений (3.208):

$$\begin{aligned} (q_1 - q_3)/C_1 + (q_1 - q_2)/C_2 &= E, & (q_2 - q_1)/C_2 + (q_2 - q_3)/C_3 &= 0, \\ q_3/C_4 + (q_3 - q_2)/C_3 + (q_3 - q_1)/C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, находим заряды на емкостях (заряды ветвей): $Q_1 = q_1 - q_3$, $Q_2 = q_1 - q_2$, $Q_3 = q_2 - q_3$, $Q_4 = q_3$.

Рассмотренный метод не применяется при наличии начальных зарядов на емкостях, поскольку здесь не используются уравнения (2.42).

§ 3.9. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

Трехфазными цепями называют цепи, в которых действуют три источника гармонических колебаний одинаковой амплитуды и частоты с фиксированным сдвигом фаз между ними, равными $2\pi/3$. В трехфазном машинном генераторе применяют три одинаковые обмотки якоря, расположенные под углом 120° относительно друг друга. При вращении обмоток в магнитном поле статора в них возбуждаются задающие напряжения с соответствующим сдвигом фаз.

Трехфазные системы, предложенные в 1891 г. М. О. Доливо-Добровольским, обладают рядом технических и экономических преимуществ. Поэтому их широко используют в электроэнергетических установках, в частности в цепях питания устройств электросвязи.

1. Соединения фаз цепи. *Фазами трехфазной цепи называют участки цепи с напряжениями и токами разных фаз.* Зажимы фаз цепи обозначают буквами A , B , C , в направлении отставания фаз колебаний.

Если бы каждая фаза нагрузки соединялась с фазными обмотками генератора отдельной парой проводов, то у трехфазных цепей не было бы никаких преимуществ по сравнению с обычными (однофазными) цепями питания. Эти преимущества обуслов-

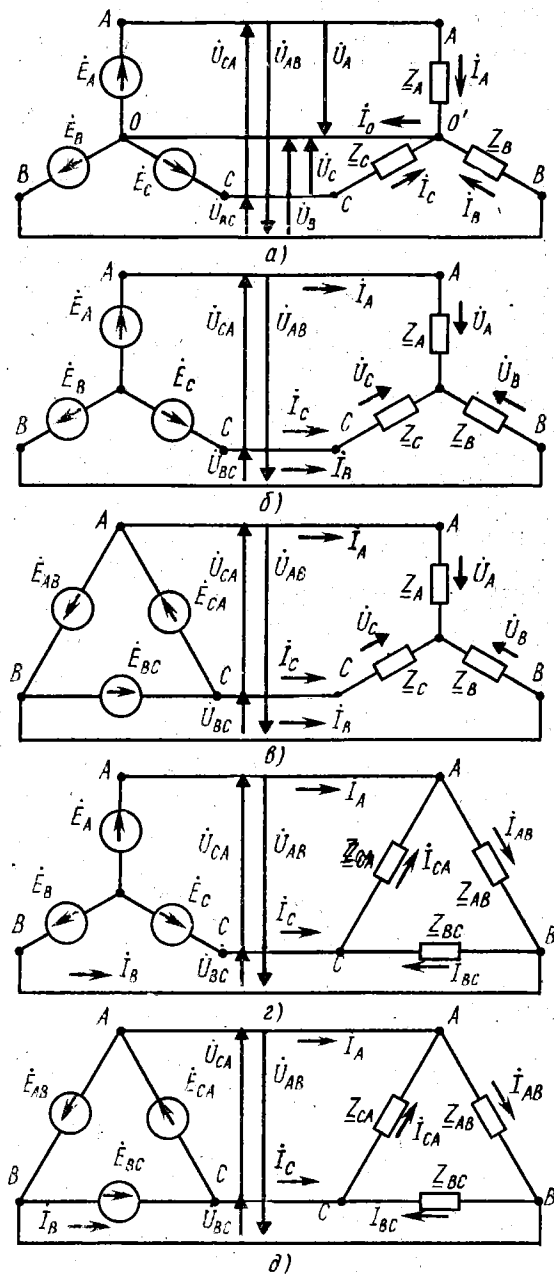


Рис. 3.70. Способы соединения трехфазных цепей

лены соединением фаз нагрузки и генератора в один общий узел или узлы. При этом требуется четыре или даже три провода для соединения трех фаз нагрузки с тремя фазами генератора, что приводит к экономии в числе проводов и в количестве меди, т. е. в общих затратах на сооружение и эксплуатацию линии передачи.

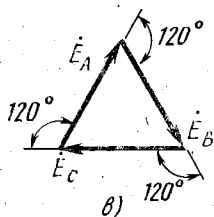
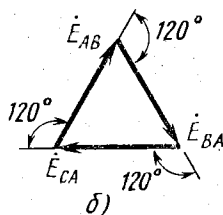
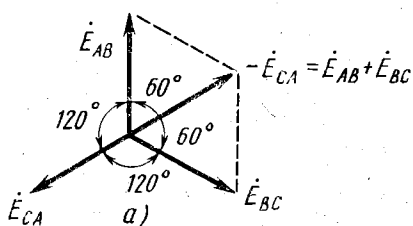
Необходимое число проводов зависит прежде всего от способа соединения фаз нагрузки и генератора. Эти фазы могут соединяться звездой или треугольником. При этом возможны пять вариантов соединений (рис. 3.70).

Из рис. 3.70 видно, что при всех способах соединения, кроме первого (рис. 3.70, а), требуется только три провода. Их называют фазами линии передачи или линейными проводами. При первом способе соединения используется также четвертый провод, соединяющий центральные узлы O, O' генератора и нагрузки. Его называют нулевым или нейтральным проводом.

При любых способах соединения фаз цепи напряжения на фазах источника называют фазными напряжениями генератора или фазными э. д. с., или фазными задающими напряжениями. Напряжения и токи фаз нагрузки называют фазными напряжениями и токами. Напряжения между линейными проводами и токи в них называют линейными напряжениями и токами.

В отношении соединения фаз генератора треугольником (рис. 3.70, в, д) возникает вопрос: не замыкается ли каждая из этих фаз двумя другими фазами с нулевым сопротивлением идеальных источников напряжения? И если даже учесть, что фазы генератора являются реальными источниками напряжения, то возникает вопрос: не будет ли трехфазный генератор работать вхолостую, не посылая тока в нагрузку?

Этого опасаться не приходится. С учетом потерь в источниках



трехфазные цепи на рис. 3.70, в, д эквивалентны трехфазным цепям на рис. 3.70, б, г при соответствующем выборе фазных э.д.с., как было показано ранее (см. § 3.7.7, рис. 3.64 и 3.65). Однако и при идеальных источниках в фазах генератора законы токопрохождения не нарушаются, так как в треугольном контуре генератора суммарная контурная э.д.с. равна нулю (см. вопрос 2.12 для самоконтроля). Такой результат получается вследствие сдвига фаз между фазными э.д.с.

Рис. 3.71. Векторные диаграммы фазных э. д. с

на угол $2\pi/3$. Это наглядно видно из векторной диаграммы фазных э.д.с., построенной на рис. 3.71, а, б, в двух вариантах.

Вследствие отсутствия контурной э.д.с. ток в треугольном контуре генератора равен нулю в режиме холостого хода, когда фазы нагрузки разомкнуты. При нагруженном же генераторе в его фазах возникают токи, обусловленные потреблением мощности нагрузкой.

Отметим, что при соединении фаз генератора звездой (см. рис. 3.70, а, б, г) сумма фазных э.д.с. также равна нулю: $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$. Это наглядно видно из векторной диаграммы рис. 3.71, в.

Из рис. 3.70, а видно, что при соединении типа «звезда — звезда» с нейтральным проводом фазные напряжения равны фазным э.д.с.:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A, \dot{U}_B = \dot{E}_B, \dot{U}_C = \dot{E}_C. \quad (3.209)$$

При соединениях фаз генераторов треугольником (см. рис. 3.70, в, д) линейные напряжения определяются следующим образом (ср. с рис. 2.10, а):

$$\dot{U}_{AB} = -\dot{E}_{AB}, \dot{U}_{BC} = -\dot{E}_{BC}, \dot{U}_{CA} = -\dot{E}_{CA}. \quad (3.210)$$

При соединении фаз генератора звездой (см. рис. 3.70, а, б, г)

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A. \quad (3.211)$$

Из равенств (3.210) и (3.211) вытекает, что при одинаковых линейных напряжениях

$$\dot{E}_{AB} = \dot{E}_B - \dot{E}_A, \dot{E}_{BC} = \dot{E}_C - \dot{E}_B, \dot{E}_{CA} = \dot{E}_A - \dot{E}_C. \quad (3.212)$$

Соотношения (3.212) сохраняются и при реальных источниках напряжения в фазах генератора, как это следует из формул (3.206).

Из рис. 3.70 и законов Кирхгофа можно установить связь между фазными и линейными напряжениями и токами:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A, \quad (3.213)$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (3.214)$$

Равенства (3.213) относятся к соединению фаз нагрузки звездой (см. рис. 3.70, а—в), а равенства (3.214) — треугольником (см. рис. 3.70, г, д).

Из рис. 3.70 видно также, что для любой фазы нагрузки

$$\dot{U}_\phi \triangleq \dot{U}_\lambda, \dot{I}_\phi \triangleq \dot{I}_\lambda. \quad (3.215)$$

Здесь индексами «ф» и «л» отмечены соответственно фазные и линейные напряжения и токи, а значок над знаком равенства указывает, при каком соединении фаз нагрузки справедливо это равенство.

2. Симметричные трехфазные цепи. Симметричными называют трехфазные цепи с одинаковыми фазами нагрузки: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$ или $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}$.

В силу такой симметрии фазные напряжения и токи получаются во всех фазах нагрузки одинаковыми по амплитуде. По фазе же эти напряжения и токи в разных фазах нагрузки сдвинуты на угол $2\pi/3$, как и фазные э. д. с. Поэтому в симметричной цепи суммы фазных токов, в частности, равна нулю (ср. с рис. 3.71):

$$I_A + I_B + I_C = 0, I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = 0. \quad (3.216)$$

Первое равенство (3.216) относится к соединению фаз нагрузки звездой (см. рис. 3.70, а—в), а второе — треугольником (см. рис. 3.70, г, д).

Из первого равенства (3.216) следует, в частности, что в симметричной цепи с нейтральным проводом (см. рис. 3.70, а) ток $I_0 = 0$, поскольку по первому закону Кирхгофа $I_0 - I_A - I_B - I_C = 0$. Таким образом, в симметричной трехфазной цепи при соединении типа «звезда — звезда» нейтральный провод не нужен, и эта схема соединения (см. рис. 3.70, а) без нарушения режима работы цепи может быть заменена аналогичной схемой без нейтрального провода (см. рис. 3.70, б).

Векторные диаграммы фазных напряжений и токов в симметричных трехфазных цепях получаются также симметричными, подобно векторным диаграммам фазных э. д. с. (рис. 3.71). Из таких симметричных диаграмм устанавливают соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами. Например, первым равенством (3.213), (3.214) соответствуют векторные диаграммы, показанные соответственно на рис. 3.72, а, б. Аналогичные диаграммы получаются и для других фаз симметричной нагрузки.

Из графического построения на рис. 3.72, а видно, что отрезок $OM = U_{AB}/2 = U_A \cos \pi/3 = \sqrt{3} U_A/2$.

Аналогичные соотношения получаются и для токов на векторной диаграмме рис. 3.72, б, а также для напряжений и токов в других фазах нагрузки. Таким образом, в симметричной трехфазной цепи линейные и фазные напряжения и токи связаны формулами

$$U_L \triangleq \sqrt{3} U_\phi, I_L \triangleq \sqrt{3} I_\phi. \quad (3.217)$$

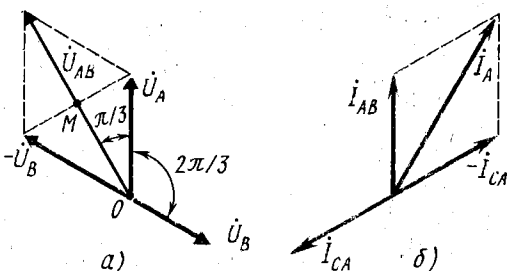


Рис. 3.72. Векторные диаграммы напряжений и токов в симметричной трехфазной цепи

Из соотношений (3.215), (3.217) следует, что в симметричных цепях при любом типе соединения фаз нагрузки

$$U_L I_L = \sqrt{3} U_\phi I_\phi. \quad (3.218)$$

При соединении фаз нагрузки звездой согласно первому равенству (3.217) получаются, в частности, следующие

щие значения напряжений, используемые на практике: $U_L = 220$ В, если $U_\phi = 127$ В, и $U_L = 381$ В, если $U_\phi = 220$ В.

3. Несимметричные трехфазные цепи. В несимметричных трехфазных цепях $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ и $Z_{AB} \neq Z_{BC} \neq Z_{CA}$. При этом соединение фаз нагрузки звездой без нейтрального провода (рис. 3.70, б, в) приводит к неодинаковым по амплитуде фазным напряжениям, что является недостатком таких соединений.

При наличии нейтрального провода (см. рис. 3.70, а) асимметрия нагрузочных сопротивлений не нарушает равенства амплитуд фазных напряжений, как это следует из формул (3.209). При соединении фаз нагрузки треугольником (см. рис. 3.70, г, д) амплитуды фазных напряжений несимметричной цепи также получаются одинаковыми, что видно из общих соотношений (3.210) — (3.212).

Предельным случаем асимметрии трехфазной цепи является отключение фаз нагрузки. Такое отключение получается, в частности, при «выбивании» предохранителя в одном из линейных проводов. При этом фазные напряжения изменяются различным образом в зависимости от способа соединения фаз нагрузки.

При соединении фаз нагрузки звездой с нейтральным проводом (см. рис. 3.70, а) размыкание, например, линейного провода А приводит к полному отключению фазы А. При этом нормальный режим работы фаз В и С не нарушается, как это видно из рис. 3.70, а и формул (3.209).

При соединении фаз нагрузки звездой без нейтрального провода (см. рис. 3.70, б, в) размыкание линейного провода А также приводит к полному отключению фазы А. Однако режим работы остальных фаз при этом нарушается. Например, при $Z_B = Z_C$ напряжение на них будет равно $U_\phi = U_L/2$, поскольку фазы В и С получаются подключенными последовательно друг с другом к линейным проводам В и С. Это видно из рис. 3.70, б, в. В нормальном же режиме согласно первой формуле (3.217) $U_\phi = U_L/\sqrt{3}$. Таким образом, лампы, например, в фазах В и С будут светиться при этом «вполнакала».

При соединении фаз нагрузки треугольником (см. рис. 3.70, г, д) размыкание линейного провода А приводит к такому же нарушению режима работы фаз Z_{AB} и $Z_{CA} = Z_{AB}$, какой получался в предыдущем случае для фаз В и С. Это видно из сравнения рис. 3.70, г, д и 3.70, б, в. Однако при этом для фазы Z_{BC} сохраняется нормальный режим работы.

Таким образом, по характеру изменения режима работы трех фаз нагрузки при размыкании одного линейного провода однозначно определяется способ включения этих фаз.

4. Энергетические соотношения. При рассмотрении мощности в трехфазной цепи будем исходить из соединения фаз нагрузки звездой, поскольку треугольник может быть преобразован в звезду. Активная мощность в одной из фаз нагрузки может быть определена по формуле (3.50):

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi. \quad (3.219)$$

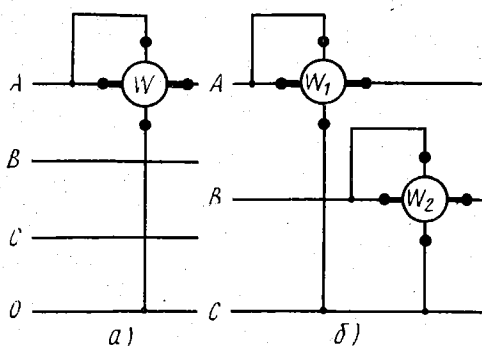


Рис. 3.73. Включение ваттметров в трехфазной цепи

Чтобы измерить эту мощность с помощью ваттметра, его токовую обмотку надо включить в линейный провод, а обмотку напряжения — под фазное напряжение. Такое включение возможно при наличии нейтрального провода, как показано на рис. 3.73, а. При этом в случае симметричной цепи показания ваттметра необходимо утроить, чтобы определить суммарную активную мощность в трехфазной цепи.

В случае несимметричной цепи для этого потребуется три ваттметра, включенных в разные фазы, и суммирование их показаний. Такой способ громоздок, к тому же нейтральный провод не всегда доступен.

Измерение мощности можно упростить, если учесть, что произведение $U_\phi I_\phi$ в формуле (3.219) может быть выражено через произведение $U_\Delta I_\Delta$ согласно соотношению (3.218). Переход к измерению линейного напряжения вместо фазного позволяет обойтись без нейтрального провода. При этом обмотка напряжения ваттметра должна быть включена между линейными проводами. Кроме того, при таком включении суммарная активная мощность может быть измерена с помощью двух, а не трех ваттметров (способ двух ваттметров). Подобное измерение возможно не только в симметричной цепи, для которой справедлива формула (3.218), но и в любой трехфазной цепи.

Чтобы показать указанную возможность, рассмотрим суммарную комплексную мощность в трехфазной цепи. Согласно последней формуле (3.52)

$$\dot{P}_S = \dot{P}_{SA} + \dot{P}_{SB} + \dot{P}_{SC} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* \quad (3.220)$$

При отсутствии нейтрального провода $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, $\dot{I}_A^* + \dot{I}_B^* + \dot{I}_C^* = 0$ и $\dot{I}_C^* = -(\dot{I}_A^* + \dot{I}_B^*)$. Подставив последнее равенство в соотношение (3.220), получим

$$\dot{P}_S = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{I}_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) \dot{I}_B^*$$

или с учетом равенств (3.213)

$$\dot{P}_S = \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^*$$

Отсюда по первой формуле (3.51) определяется искомая активная мощность:

$$P = \text{Re} \dot{P}_S = \text{Re} \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \text{Re} \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \quad (3.221)$$

Таким образом, суммарная активная мощность произвольной трехфазной цепи может быть определена через линейные напря-

жения как сумма двух слагаемых. Для измерения этой мощности согласно соотношению (3.221) надо включить два ваттметра, как показано на рис. 3.73, б, и сложить их показания. Существуют трехфазные ваттметры, которые конструктивно объединяют в себе два обычных ваттметра, включаемых по схеме рис. 3.73, б. Размещение их подвижных обмоток на одной оси позволяет сразу получать показания для суммарной мощности (3.221).

При расчете активной мощности в фазе нагрузки можно использовать формулу (3.50), переписав ее для фазных напряжения и тока:

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi,$$

где φ — угол сдвига фаз между напряжением \dot{U}_{ϕ} и током \dot{I}_{ϕ} .

Если трехфазная цепь симметрична, то суммарная активная мощность в нагрузке

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi.$$

Этой же величине должна равняться суммарная мгновенная мощность в нагрузке симметричной трехфазной цепи.

Вопросы для самоконтроля

3.1. Почему при анализе уравнений (2.6) и (2.11) в комплексной форме надо пользоваться символическим методом и нельзя применить метод комплексных амплитуд?

3.2. Почему комплексный характер величин \dot{U} , \dot{I} , \dot{P}_s и \underline{Z} , \underline{Y} обозначают различным образом?

3.3. Подчиняются ли комплексные величины \dot{U} , \dot{I} , \dot{P}_s и \underline{Z} , \underline{Y} одинаковым правилам действия с комплексными числами?

3.4. Какой физический смысл имеют произведения $\dot{U}\dot{I}$, $\dot{U}\dot{I}^*$ и $\dot{u}\dot{i}$?

3.5. Почему нельзя складывать непосредственно сопротивления $R = 1 \text{ Ом}$ и $X = 1 \text{ Ом}$?

3.6. Если задано комплексное сопротивление $\underline{Z} = (A + jB)/(C + jD)$, надо ли для определения $Z = |\underline{Z}|$ и $\varphi = \arg \underline{Z}$ находить вещественную и мнимую части этого сопротивления?

3.7. Почему мгновенная мощность при гармонических колебаниях может быть представлена бесчисленным количеством способов в виде суммы активной и реактивной мгновенных мощностей, хотя заданной мгновенной мощности соответствует определенная комплексная мощность, которая однозначно выражается через активную и реактивную мощности?

3.8. Чем отличаются резонансы в цепях без потерь и с потерями?

3.9. Как можно объяснить физически влияние частоты на сопротивление потерь конденсатора и отсутствие такого влияния на его сопротивление утечки?

3.10. Почему добротность катушек индуктивности получается значительно ниже, чем добротность конденсаторов?

3.11. Какое устройство эквивалентно реальному индуктивному элементу со столь же высокой добротностью, как и у конденсатора?

3.12. Почему в трансформаторе вносимое сопротивление пропорционально квадрату, а не первой степени сопротивления взаимной индукции?

3.13. Почему с физической точки зрения совершенный трансформатор не обладает свойствами идеального трансформатора?

3.14. Почему схемы замещения реальных источников сигналов (см. рис. 3.39) в энергетическом смысле не могут быть эквивалентны реальным источникам?

3.15. Почему при согласовании по полной мощности отсутствуют частотные и фазовые искажения сигнала?

3.16. В каких безындуктивных цепях можно получить резонанс?

3.17. Как можно реализовать D -элемент с помощью гираторов?

3.18. Почему при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа задающие токи в методе токов ветвей не учитываются, а в методе контурных токов учитываются?

3.19. Почему при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа токи идеальных источников напряжения учитываются в методе токов ветвей и не учитываются в методе узловых напряжений?

3.20. Чем отличается метод переменных состояния от метода токов ветвей и в чем сходятся эти методы?

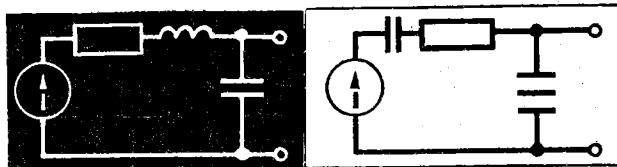
3.21. В каких случаях эквивалентные преобразования источников напряжения и тока и их перенос упрощают решение задач?

3.22. Чем отличаются входные сопротивления пассивного и активного двух-полюсников?

3.23. Какому условию должны удовлетворять э. д. с. \dot{E}_{12} , \dot{E}_{23} и \dot{E}_{31} в схеме активного треугольника (см. рис. 3.65, а), чтобы преобразования (3.207) и (3.206) были взаимно однозначными?

3.24. Почему в трехфазных линиях передачи нейтральный провод имеет меньшее сечение, чем линейные провода?

3.25. Как и почему изменяется суммарная мгновенная мощность в нагрузке симметричной трехфазной цепи?



Резонансные цепи

Выше было установлено существование двух видов резонанса (см. § 3.2.4, 3.2.6). Резонансные явления широко используются в технике связи и нуждаются в глубоком изучении. В настоящей главе эти явления рассматриваются на примере простейших резонансных цепей.

Важнейшим свойством резонансных цепей является их способность подавлять помехи. Поэтому анализ резонансных цепей предваряется обзором способов количественной оценки степени ослабления помех.

§ 4.1. МЕРЫ ОЦЕНКИ УРОВНЯ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

В канале связи всегда действуют различные помехи, которые нарушают информацию, передаваемую полезным сигналом (см. § 1.4.1). Поэтому важной задачей является подавление помех.

Селективностью (от лат. *selectio* — выбор, выделение), или *избирательностью*, цепи называют ее способность выделять полезный сигнал и ослаблять помехи. Такое выделение сигнала означает, что уровень помех на выходе цепи снижается по сравнению с уровнем сигнала до допустимого значения. При этом на входе цепи помехи могут даже превышать полезный сигнал.

Цепи, обладающие избирательными свойствами, называют *селективными цепями* или *фильтрами* (от лат. *filtrum* — войлок). При этом говорят о фильтрации (ослаблении) помех, селекции (выделении) сигнала и об отфильтрованном (очищенном от помех) сигнале.

Селекция сигнала основывается на каком-либо различии между сигналом и помехой. В частности, сигнал и помеха могут различаться по частоте. Селекцию, основанную на этом различии называют частотной селекцией, а устройства частотной селекции — частотными фильтрами. К ним относятся и резонансные цепи.

Частотная селекция основана на совмещении полосы пропускания цепи ΔF (см. § 1.4.5) с полосой частот ΔF_c , занимаемой спектром сигнала (см. рис. 1.9). Если в этой полосе коэффициент передачи цепи имеет некоторое максимальное значение K_{\max} , а за ее пределами коэффициент передачи $K < K_{\max}$, то это и означает ослабление помех, не совпадающих по частоте с полезным сигналом.

1. Ослабление помех. Степень ослабления помехи можно измерять величиной, называемой относительным коэффициентом передачи $A = K/K_{\max}$ на частоте помехи. Значение этой величины меньше единицы, что создает неудобства в ее использовании. Поэтому для оценки степени ослабления помехи применяют обратную величину

$$H = 1/A. \quad (4.1)$$

Эту величину называют *ослаблением цепи* и говорят, что помеха ослабляется в H раз. Например, при $A = 0,001$, $H = 10^3$ помеха ослабляется в 1000 раз.

С большими ослаблениями цепи неудобно обращаться на практике. Поэтому предпочитают пользоваться логарифмическими единицами измерения ослабления. Для этого величину (4.1) представляют в показательной форме:

$$H = e^a, \quad a = \ln H. \quad (4.2)$$

Величина a называется *затуханием цепи*, а единицей затухания в формулах (4.2) является *непер* (Нп). 1 Нп соответствует ослаблению помехи в $e = 2,7183$ раза, поскольку $\ln H = \ln e = 1$.

Оценка ослабления величиной (4.1) означает сравнение уровней сигнала и помехи по напряжению или току. Аналогичное сравнение можно производить также по мощности. Поскольку мощность пропорциональна квадрату напряжения или тока, при этом следует рассматривать величину $H^2 = 1/A^2$, которую называют *квадратичным ослаблением*.

При оценке ослабления по мощности величину H^2 представляют в виде не показательной, а степенной функции с основанием «10». При этом соотношения (4.2) заменяются другими:

$$H^2 = 10^a, \quad a = \lg H^2 = 2 \lg H. \quad (4.3)$$

Единицей затухания a в формулах (4.3) является *бел* (Б). 1 Б соответствует ослаблению помехи по мощности в 10 раз и по напряжению или току в $\sqrt{10}$ раз, поскольку $\lg 10 = 2 \lg \sqrt{10} = 1$.

На практике используют более мелкую единицу затухания — *децибел* (дБ). Поскольку 1 дБ = 0,1 Б, в этом случае формулы (4.3) видоизменяются:

$$H^2 = 10^{0,1a}, \quad a = 10 \lg H^2 = 20 \lg H. \quad (4.4)$$

Затухание в 1 дБ соответствует ослаблению помехи по мощности приблизительно в 1,26 раза, а по напряжению или току приблизительно в 1,122 раза, поскольку $\lg 1,26 \approx 0,1$ и $\lg 1,122 \approx 0,05$.

Учитывая, что $\lg e \approx 0,4343$, из вторых формул (4.2) и (4.4) при $H = e$ находим связь между непером и децибелами: 1 Нп = 8,686 дБ, 1 дБ $\approx 0,115$ Нп.

Следует заметить, что логарифмические меры сравнения величин по формулам (4.1) — (4.4) являются универсальными единицами, которые можно использовать не только для оценки степени

ослабления помех. Их применяют, например, и при сравнении механических величин — сил, давлений, мощностей механических колебаний и т. п.

В частности, при измерении в логарифмических единицах громкости и интенсивности звука (акустических колебаний) во вторую формулу (4.4) подставляют соответственно $H = p/p_0$ или $H^2 = I/I_0$, где p — звуковое давление, Н/м²; $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Н/м² — пороговое значение звукового давления, соответствующее округленно порогу слышимости гармонических колебаний с частотой 1 кГц; $I = p^2/Z_a$ — интенсивность звука, Вт/м²; Z_a — удельное акустическое сопротивление среды, Н·с/м³; $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² — нулевой уровень, соответствующий пороговому звуковому давлению p_0 при стандартном значении $Z_a = 400$ Н·с/м³ (приблизительно такое акустическое сопротивление имеет воздух при температуре 25°C и атмосферном давлении 740 мм рт. ст.). Единица громкости звука, совпадающая численно с децибелом, называется *фоном*.

2. Оценка селективности. О степени ослабления помех в резонансной цепи можно судить по ее частотной характеристике $A(\Delta f)$, где Δf — расстройка (3.108). Такая характеристика, показанная на рис. 4.1, *а* подобна резонансной кривой последовательного резонансного двухполюсника (см. рис. 3.31, *а*). Полосу пропускания $\Delta F = 2\Delta f_r$ отсчитывают по частотной характеристике на некотором заданном уровне $A_r < 1$, как показано на рис. 4.1, *а*. Выбор этого уровня рассматривается ниже. Обычно $A_r = 1/\sqrt{2}$, что соответствует $H_r = 1/A_r = \sqrt{2}$ и $\Delta a_0 = 20 \lg H_r = 3$ дБ или $\Delta a_0 = \ln H_r = 0,346$ Нп.

Степень ослабления помехи на некоторой частоте оценивают по частотным характеристикам в логарифмическом масштабе, т. е. по характеристикам затухания (4.1) или (4.4), показанным соответственно на рис. 4.1, *б*, *в*. Однако указанное ослабление зависит от расстройки, соответствующей частоте помехи. Например, на рис. 4.1, *б*, *в* при расстройке Δf_0 помеха ослабляется на 30 дБ $\approx 3,45$ Нп, а при расстройке Δf_1 — только на 20 дБ $\approx 2,3$ Нп. Поэтому возникает неопределенность в оценке селективности.

Указанная неопределенность устраняется в случаях, когда

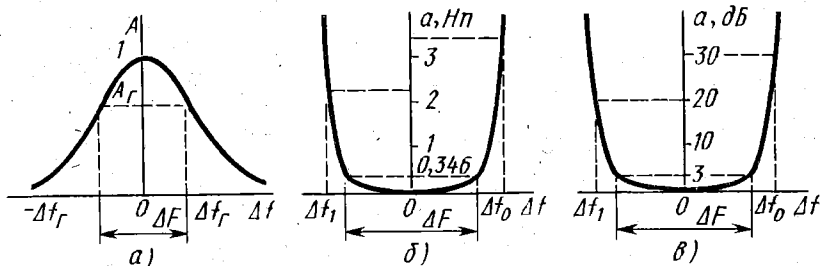


Рис. 4.1. Частотные характеристики ослабления помех и затухания цепи

помеха фиксирована по частоте, т. е. известна расстройка, соответствующая этой помехе. Например, при наличии двух смежных по частоте каналов связи сигналы одного канала являются помехами для другого канала связи. В этом случае разнос частот Δf_0 между каналами связи является фиксированным (заданным). Тогда говорят об избирательности по соседнему каналу связи. При этом *селективность оценивают степенью подавления помехи при заданной расстройке*. Поэтому формулировка «избирательность по соседнему каналу не хуже, например, 40 дБ» означает, что при известной расстройке Δf_0 помеха ослабляется не менее чем на 40 дБ, т. е. не менее чем в 10^4 раз по мощности или в 100 раз по напряжению.

В общем случае следует оговаривать значение расстройки: при расстройке Δf_0 селективность цепи равна a децибел. Однако и при такой формулировке нет полной определенности в оценке селективности. Причиной тому является изменение степени ослабления помехи при одной и той же заданной расстройке в случае, когда меняется полоса пропускания селективной цепи, поскольку при этом изменяется частотная характеристика $A(\Delta f)$.

Такая неопределенность не позволяет сравнивать по избирательности различные селективные системы с неодинаковыми полосами пропускания. Чтобы освободиться от этой неопределенности, вводят понятие идеального фильтра, с которым сравнивают реальное селективное устройство. Идеальный фильтр имеет в полосе пропускания постоянный коэффициент передачи $A=1$, а за ее пределами полностью подавляет помехи, т. е. $A=0$ (рис. 4.2, а). Получающаяся при этом частотная характеристика идеального фильтра является прямоугольной. Указанным коэффициентам передачи соответствует нулевое затухание в полосе пропускания, а за ее пределами — бесконечно большое затухание (рис. 4.2, б).

Об избирательности селективной цепи судят по степени отклонения реальной частотной характеристики от идеальной прямоугольной характеристики. Степень этого отклонения оценивают коэффициентом прямоугольности (рис. 4.2, б):

$$K_{\text{ПД}a_0} = \Delta F_0 / \Delta F, \quad (4.5)$$

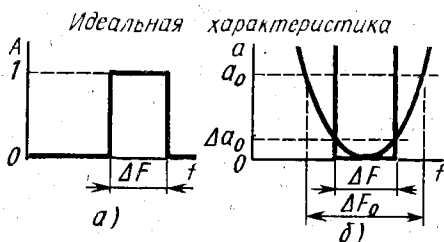


Рис. 4.2. Идеальная и реальная характеристики селективной цепи

где частотный интервал ΔF_0 измеряется на заданном уровне затухания (ослабления помехи) a_0 , а полоса пропускания ΔF отсчитывается на заданном уровне Δa_0 . При этом уровень отсчета полосы пропускания задается стандартным, например прежний уровень $\Delta a_0 = 3$ дБ или 6 дБ. Уровень же затухания a_0 может задаваться различным в

зависимости от назначения селективной цепи. При сравнении избирательности различных селективных цепей выбирают стандартный уровень $a_0 = 40$ дБ или 60 дБ.

Селективность цепи получается тем выше, чем меньше ее коэффициент прямоугольности. Для цепи с идеальной прямоугольной характеристикой (рис. 4.2, а) $K_{\Pi} = 1$ при отсчете ΔF и ΔF_0 на любых уровнях. Реальные селективные цепи всегда имеют $K_{\Pi} > 1$. Если $\Delta a_0 = 3$ дБ и $a_0 = 40$ дБ, то селективность цепи можно считать удовлетворительной при $2 < K_{\Pi} \leq 3$, хорошей при $1,5 < K_{\Pi} \leq 2$ и отличной при $K_{\Pi} \leq 1,5$.

§ 4.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Последовательный резонансный контур образуется при последовательном соединении конденсатора с катушкой индуктивности. Такой контур используют в качестве четырехполюсника. При этом обычно выходное напряжение снимают с конденсатора, как показано на рис. 4.3, а с учетом рис. 3.32, а и 3.35, а. Здесь R_i — внутреннее сопротивление источника напряжения.

Как отмечалось (см. § 3.3.2), потери в конденсаторе получаются значительно меньше, чем в катушке индуктивности ($d_C \ll d_L$), и ими можно пренебречь. При этом эквивалентная схема последовательного контура упрощается, как показано на рис. 4.3, б, где $r = R_i + r_L$ — сопротивление потерь контура, которому равно и его резонансное сопротивление.

1. Резонансные свойства. В приближенной эквивалентной схеме контура (рис. 4.3, б), как и в последовательном резонансном двухполюснике (см. рис. 3.29, а), резонанс наступает на резонансной частоте (3.102). Однако в точной эквивалентной схеме (рис. 4.3, а) резонансная частота получается другой. Дей-

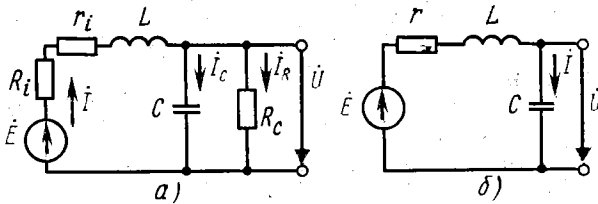


Рис. 4.3. Эквивалентные схемы последовательного контура

ствительно, в этом случае реактивное сопротивление конденсатора определяется формулой (3.88), в которой $R = R_C$. Поэтому согласно первому условию резонанса (3.119) на резонансной частоте ω_p

$$X |_{\omega = \omega_p} = \omega_p L - \omega_p C R_C^2 / (1 + \omega_p^2 C^2 R_C^2) = 0.$$

Решив это уравнение, найдем резонансную частоту для точной эквивалентной схемы контура (рис. 4.3, а):

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - d_C^2} \approx \omega_0, \quad (4.6)$$

где $d_c = \rho/R_c$ — затухание конденсатора, соответствующее определению (3.123) для частоты $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Из формулы (4.6) видно, что резонанс в последовательном контуре возможен только при $d_c < 1$. Поскольку же практически $d_c^2 \ll 1$, можно пользоваться приближенной формулой (4.6), которая соответствует приближенной эквивалентной схеме (рис. 4.3, б).

2. Частотные и фазовые характеристики: При использовании контура в качестве четырехполюсника представляют интерес его частотные и фазовые характеристики (3.29). Для их определения находим из рис. 4.3, б коэффициент передачи (3.28) по общей формуле (3.67):

$$\underline{K}(\omega) = \dot{U}/\dot{E} = \underline{Z}_C/\underline{Z} = 1/j\omega C(r + j\omega L + 1/j\omega C). \quad (4.7)$$

Добротность, затухание и характеристическое сопротивление контура определяются прежними соотношениями (3.115) и (3.105). Используя эти определения и формулы (3.117), представим иначе коэффициент передачи (4.7):

$$\underline{K} = -j\omega_0 Q/\omega(1 + jQv) = 1/(1 - \Omega^2 + jd\Omega), \quad (4.8)$$

где $\Omega = \omega/\omega_0$ — относительная частота.

Из последнего равенства (4.8) находим уравнение частотной характеристики:

$$K(\Omega) = 1/\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + d^2\Omega^2}. \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.8), (4.9) можно определить резонансное значение коэффициента передачи:

$$\underline{K}_0 = K_0 e^{i\theta_0} = -jQ, \quad K_0 = Q, \quad \theta_0 = -\pi/2. \quad (4.10)$$

Характеристика (4.9) имеет максимум, обусловленный резонансом напряжений. Однако максимум получается не на резонансной, а на некоторой оптимальной частоте ω_{opt} . Экстремальные параметры частотной характеристики (4.9) удобно определять из условия $\frac{d}{d\Omega}(1/K^2(\Omega))$. Отсюда после несложных преобразований находим

$$\omega_{\text{opt}} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2/2} < \omega_0, \quad K|_{\omega = \omega_{\text{opt}}} = K_{\text{max}} = \frac{1}{d\sqrt{1 - d^2/4}} > Q. \quad (4.11)$$

Уменьшение оптимальной частоты (4.11) по сравнению с резонансной частотой объясняется влиянием реактивного сопротивления емкости, с которой снимается выходное напряжение. В области резонанса ток I при отрицательной расстройке контура уменьшается медленнее, чем растет сопротивление $|X_C| = 1/\omega C$. Поэтому напряжение $U = I/\omega C$ возрастает при уменьшении частоты от резонансного значения. Этим же объясняется большее значение максимального коэффициента передачи (4.11) по сравнению с резонансным значением (4.10).

Сравнение характеристик при разных параметрах контура

удобно производить по относительному коэффициенту передачи, который определяется из соотношений (4.9) и (4.11):

$$A(\Omega) = K(\Omega)/K_{\max} = U(\Omega)/U_{\max} = d\sqrt{(4-d^2)/[(\Omega^2-1)^2 + d^2\Omega^2]}/2. \quad (4.12)$$

Как здесь отмечено, относительный коэффициент передачи служит также для непосредственного сравнения выходного напряжения $U(\omega) = K(\omega)E$ с его максимальным значением $U_{\max} = K_{\max}E$.

По формуле (4.12) построены частотные характеристики на рис. 4.4. Из этих графиков и формулы (4.11) видно, что заметный сдвиг максимума частотной характеристики получается только при достаточно больших затуханиях контура, т. е. при малых его добротностях.

В устройствах связи применяют обычно высокодобротные контуры ($Q \gg 1$). Для них, как следует из формул (4.11), $\omega_{\text{opt}} \approx \omega_0$ и $K_{\max} \approx Q$. При этом вместо последнего равенства (4.8) надо пользоваться первым, в котором для малых расстройк можно принять $\omega = \omega_0 + \Delta\omega \approx \omega_0$. Тогда получается относительный коэффициент передачи

$$A = \frac{U}{U_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1+Q^2v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+4Q^2(\Delta f)^2/f_0^2}}, \quad (4.13)$$

где $U_0 = U_{\max}$ — резонансное значение выходного напряжения.

Обобщенная частотная характеристика $A(\xi)$ показана на рис. 4.5.

Таким образом, в рассматриваемом случае частотные характеристики (4.13) имеют такой же вид и такие же свойства, как и резонансные кривые на рис. 3.31, а. В частности, частотные характеристики становятся тем острее, чем меньше потери в контуре. Следует также отметить четную симметрию частотных характеристик в области малых расстройк: $A(-\Delta f) = A(\Delta f)$. Это свойство обуславливает сохранение на выходе настроенного контура

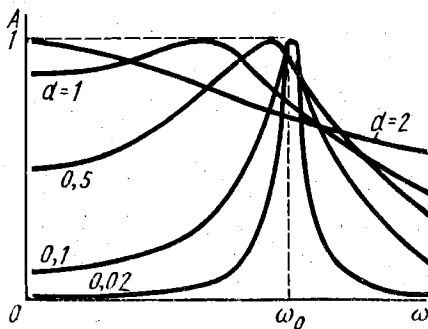


Рис. 4.4. Частотные характеристики последовательного контура

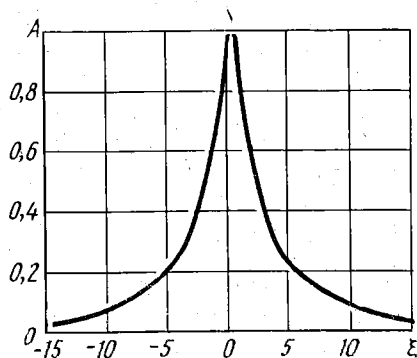


Рис. 4.5. Частотная характеристика в обобщенных координатах

симметрии амплитуд боковых спектральных составляющих АМ-сигнала, если контур настроен на его несущую частоту, т. е. резонансная частота контура равна несущей частоте АМ-сигнала.

Уравнение фазовой характеристики контура определяется из соотношения (4.8):

$$\theta = -(\pi/2 + \operatorname{arctg} Qv) \approx -(\pi/2 + \operatorname{arctg} 2Q\Delta). \quad (4.14)$$

Фазовая характеристика, построенная по этому уравнению, приведена на рис. 4.6, а. Анализ этой характеристики удобнее производить, рассматривая относительный фазовый сдвиг $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, где $\theta_0 = -\pi/2$ — резонансная фаза контура. Из уравнения (4.14) получаем

$$\Delta\theta = -\operatorname{arctg} Qv \approx -\operatorname{arctg} 2Q\Delta \approx -2Q\Delta \approx -\xi. \quad (4.15)$$

Относительный фазовый сдвиг (4.15) отличается от фазы сопротивления контура (3.117) лишь знаком. Фазовая характеристика в относительном масштабе показана на рис. 4.6, б. Она обладает свойством нечетной симметрии в области малых расстройек: $\Delta\theta(-\Delta f) = -\Delta\theta(\Delta f)$. Такое свойство обуславливает сохранение симметрии фаз боковых составляющих АМ-сигнала на выходе настроенного контура. Следует также отметить линейность фазовой характеристики, что отражается двумя последними равенствами (4.15). Ошибка этих приближенных равенств получается меньше 10% при $|\xi| < 0,57$, но превышает 27% при $\xi = \pm 1$.

3. Подключение нагрузки к контуру.

При подключении к контуру нагрузочного сопротивления R_H (рис. 4.7, а) схема контура в принципе не отличается от его точной эквивалентной схемы (см. рис. 4.3, а). Отличие заключается лишь в том, что вместо сопротивления утечки (или дополнительно к нему) в схему включено сопротивление R_H . Поэтому влияние нагрузки на параметры и характеристики контура аналогично влиянию потерь в конденсаторе.

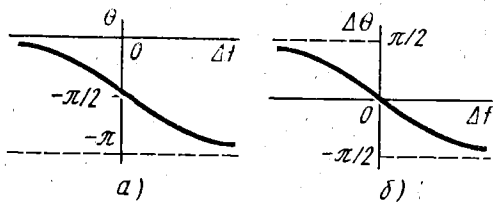


Рис. 4.6. Фазовые характеристики последовательного контура

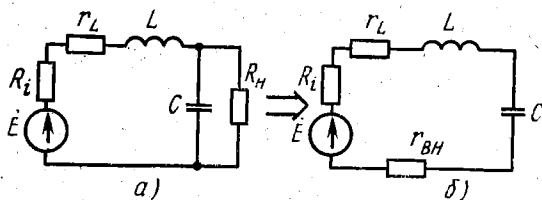


Рис. 4.7. Подключение нагрузки к последовательному контуру

Возрастание потерь в контуре при подключении нагрузки может быть учтено с помощью понятий вносимого сопротивления $r_{вн}$ (рис. 4.7, б) и вносимого затухания $d_{вн}$. При этом значение $r_{вн}$ может быть найдено по аналогии с первой формулой (3.125) на частоте $\omega = \omega_0$:

$$r = R_i + r_L + r_{вн}, \quad d = 1/Q = d_i + d_L + d_{вн}, \quad (4.16)$$

$$r_{вн} = \rho^2/R_n, \quad d_{вн} = \rho/R_n = r_{вн}/\rho. \quad (4.17)$$

Существенно отметить, что согласно формулам (4.16), (4.17) внутреннее сопротивление источника R_i и нагрузочное сопротивление R_n различным образом влияют на добротность контура.

Среди других свойств контура с нагрузкой отметим, что подключение нагрузочного сопротивления R_n приводит к расстройке контура, называемой вносимой расстройкой. По аналогии с формулой (4.6) в этом случае резонансная частота

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - d_{вн}^2}. \quad (4.18)$$

Из формул (4.18) и (4.17) следует, что вносимая расстройка контура тем меньше, чем больше ее нагрузочное сопротивление R_n .

Хотя вносимое сопротивление (4.17) входит в состав сопротивления потерь контура r , оно учитывает полезный расход мощности на нагрузочном сопротивлении R_n . Действительно, при резонансе мощность $P_{вн}$, расходуемая на вносимом сопротивлении $r_{вн}$, описывается выражением

$$P_{вн} = r_{вн} I_0^2 = \rho^2 I_0^2 / R_n = U_0^2 / R_n = P_n, \quad (4.19)$$

где P_n — активная мощность, расходуемая на нагрузочном сопротивлении R_n при напряжении U_0 .

Таким образом, схемы контура на рис. 4.7 являются эквивалентными также в энергетическом смысле.

С помощью соотношений (4.19) легко определить коэффициент полезного действия источника в контуре с нагрузкой:

$$\eta = P_n/P = P_{вн}/P = r_{вн}/r_0 = r_{вн}/(r + r_{вн}), \quad (4.20)$$

где P — активная мощность, расходуемая источником на сопротивлении потерь r_0 ; $r = R_i + r_L$ — сопротивление потерь контура без учета влияния нагрузки.

Из формул (4.20) и (4.17) следует, что для повышения к. п. д. нагрузочное сопротивление $R_n \gg \rho$ надо уменьшать. При этом получаются противоречивые требования к параметрам цепи, поскольку сопротивление R_n стремятся увеличивать для увеличения добротности контура.

Для повышения к. п. д. нагрузочное сопротивление R_n можно уменьшать лишь до определенного предела. Действительно, формулы (4.17) справедливы при $R_n \gg \rho$. При произвольных же значениях R_n возможно получение максимального к. п. д. согласно формулам (3.156), где необходимо соответственно изменить

обозначения. В этом случае согласование нагрузки с контуром по критерию максимального к. п. д., т. е. получение оптимального нагрузочного сопротивления $R_{н\text{ опт}}$ достигается на резонансной частоте, которая является и оптимальной частотой: $\omega_p = \omega_{\text{опт}} = \omega_0/2$. Тогда $R_{н\text{ опт}} = \sqrt{2\rho}$, $K_{\text{max}} = \sqrt{2}$, полоса пропускания $\Delta F \approx \approx 1,08f_p$ имеет граничные частоты $f_{r1} = \sqrt{2 - \sqrt{2}\rho}$, $f_{r2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}\rho}$, а $\eta_{\text{max}} \approx 1$, если $r \ll \rho$.

4. Полоса пропускания. Изменение коэффициента передачи в области резонанса приводит к частотным искажениям сигналов в контуре. Чтобы эти искажения не превышали допустимой нормы, спектр сигнала не должен выходить за пределы полосы пропускания контура (см. § 1.4.5).

Полоса пропускания контура может быть установлена количественно по его частотной характеристике. Для этого вводят количественный критерий допустимых частотных искажений.

Применительно к речевым сигналам экспериментально установлено, что ухо человека слабо различает двукратное изменение мощности спектральных составляющих сигнала. Согласно формуле (3.35) такому изменению мощности электрического сигнала соответствует изменение напряжения в $\sqrt{2}$ раз.

Соответственно этим количественным предпосылкам *полоса пропускания контура определяется как такая полоса частот ΔF , в которой коэффициент передачи уменьшается по сравнению с его максимальным значением не более чем в $\sqrt{2}$ раз (рис. 4.8). В ряде случаев допускают двукратное изменение коэффициента передачи в полосе пропускания.*

Для определения полосы пропускания можно воспользоваться приближенной формулой (4.13). Согласно рис. 4.8 в этой формуле надо принять $A = 1/\sqrt{2}$ при граничной расстройке $\Delta f = \Delta f_r$. Тогда с учетом формул (3.102), (3.115) и (3.105) получим ширину полосы пропускания

$$\Delta F = 2\Delta f_r = f_0/Q = r/2\pi L. \quad (4.21)$$

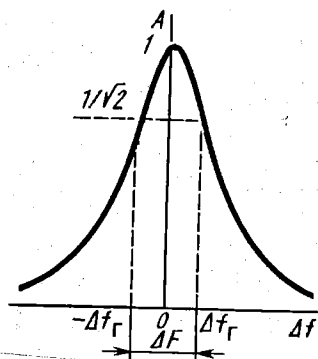


Рис. 4.8. Определение полосы пропускания контура

Отсюда видно, что уменьшение потерь (увеличение добротности) приводит к сужению полосы пропускания контура. В случае одинаковой добротности полоса пропускания получается уже при меньшей резонансной частоте. Интересно отметить также, что согласно последнему равенству (4.21) полоса пропускания контура не меняется при его перестройке конденсатором переменной емкости. Однако это свойство не относится к контуру с нагрузкой, в котором сопротивление потерь (4.16) включает в себя вносимое сопротивление (4.17), зависящее от $\rho^2 = L/C$.

Как отмечалось, ширина полосы пропускания должна равняться ширине спектра АМ-сигнала (1.23). Отсюда следует, что согласно соотношениям (4.21) и (1.24) в технике связи должны применяться контуры с высокой добротностью ($Q \gg 1$).

Используя значение полосы пропускания (4.21), находим, что обобщенная расстройка (3.116) в ее приближенном значении нормирует абсолютную расстройку по половине полосы пропускания:

$$\xi \approx \frac{\Delta f}{\Delta f_r} = \frac{\Delta f}{\Delta F/2}. \quad (4.22)$$

В этом и заключается смысл обобщенной расстройки, которая на границах полосы пропускания контура имеет значение $\xi = \pm 1$.

5. Избирательность. При оценке селективности резонансных контуров коэффициент прямоугольности (4.5) удобно выразить через обобщенную расстройку. Аналогично обозначению (4.21) можно принять $2\Delta f = 2\Delta f_0 = \Delta F_0$ (см. рис. 4.2). Тогда формула (4.5) примет вид

$$K_{\text{пл}a_0} = K_{\text{пл}H_r} = \xi_0 / \xi_r, \quad (4.23)$$

где ξ_0 — расстройка, при которой ослабление контура равно H_0 ; ξ_r — расстройка на границе полосы пропускания, отсчитываемой на уровне H_r .

Для одиночного контура уравнения частотной характеристики (4.13) можно переписать в следующем виде:

$$H = \sqrt{1 + \xi^2}, \quad \xi = \sqrt{H^2 - 1}.$$

Отсюда следует, что $\xi_0 = \sqrt{H_0^2 - 1} \approx H_0$, так как $H_0 \gg 1$. Учитывая, что $\xi_r = 1$ при $H_r = \sqrt{2}$, из формулы (4.23) получаем

$$K_{\text{пл}a_0} = K_{\text{пл}H_r} = \sqrt{H_0^2 - 1} \approx H_0. \quad (4.24)$$

Таким образом, для последовательного контура на уровне $a_0 = 40$ дБ ($H_0 = 100$) коэффициент прямоугольности равен 100, что весьма далеко от идеального значения $K_{\text{пл}} = 1$.

6. Безындуктивные контуры. В § 3.5.5 было показано, что индуктивные элементы в любой цепи могут быть заменены безындуктивными схемами замещения, которые реализуются с помощью операционных усилителей. Подобная замена особенно желательна в резонансных контурах, используемых на звуковых частотах. В этом случае для снижения резонансной частоты (3.102) индуктивность контура пришлось бы повышать до десятых долей и единиц генри. Катушки с такой индуктивностью не только имеют большие габариты, но и являются довольно низкооборотными. Указанная же замена позволяет получить при этом малогабаритные высокооборотные контуры.

Заменим индуктивность в схеме последовательного контура (см. рис. 4.3, б) эквивалентной инвертированной емкостью согласно рис. 3.50 и 3.49, б. Полученный при этом безындуктивный

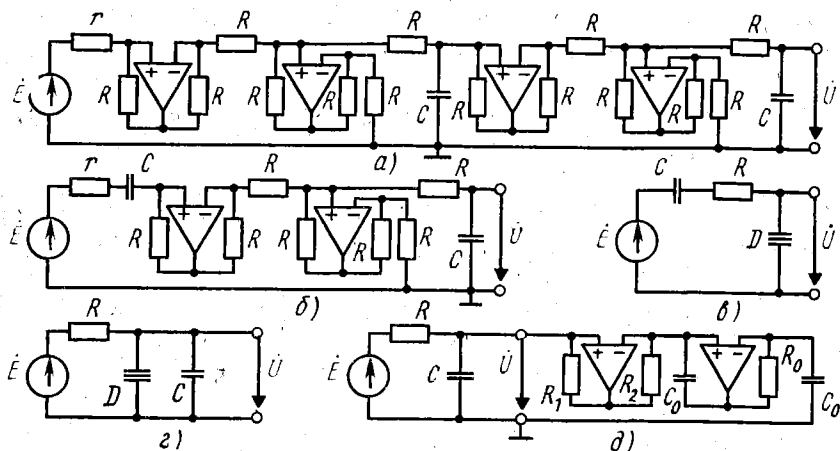


Рис. 4.9. Безындуктивные схемы последовательного контура

последовательный контур показан на рис. 4.9; а. Его параметры (3.102), (3.105), (3.115) согласно формуле (3.179) определяются следующим образом:

$$\omega_0 = 1/RC, \quad \rho = R, \quad Q = R/r. \quad (4.25)$$

Например, при необходимости получить полосу пропускания $\Delta F = 3,2$ Гц на частоте $f_0 = 1,6$ кГц ($\omega_0 = 10^4$) получаем вполне приемлемые параметры $R = 5$ кОм и $C = 0,02$ мкФ, если $r = 10$ Ом, что соответствует $Q = 500$. Однако полученная схема является излишне сложной и может быть упрощена. Если в исходной схеме контура (см. рис. 4.3, б) индуктивность и емкость поменять местами, то выходное напряжение будет сниматься с заземленной индуктивности. При этом согласно рис. 2.15, в и 3.49, б получается безындуктивный последовательный контур, показанный на рис. 4.9, б. Его параметры определяются прежними формулами (4.25).

Существует еще один способ построения безындуктивных резонансных цепей с заданным коэффициентом передачи. Если в соотношении (4.7) числитель и знаменатель дроби разделить на $j\omega$, то коэффициент передачи не изменится:

$$\underline{K}(\omega) = -1/\omega^2 C(1/j\omega G + L - 1/\omega^2 C),$$

где $G = 1/r$.

В этом выражении параметры G, L, C могут быть заменены численно равными параметрами C, R, D :

$$G \rightarrow C, \quad L \rightarrow R, \quad C \rightarrow D. \quad (4.26)$$

Тогда получается коэффициент передачи

$$\underline{K}(\omega) = -1/\omega^2 D(1/j\omega C + R - 1/\omega^2 D). \quad (4.27)$$

Нетрудно видеть, что согласно формуле (3.176) и обозначению на рис. 3.47, в коэффициент передачи (4.27) имеет схема с D -элементом, показанная на рис. 4.9, в. При реализации D -элемента с помощью КОС (см. рис. 3.47, б) полученная схема является безындуктивным последовательным контуром.

Рассмотренное D -преобразование цепи в соответствии с правилами (4.26) применимо к любым схемам, а не только к последовательному контуру. При таком преобразовании коэффициент передачи любой цепи сохраняет свое значение, хотя другие ее параметры (например, входное сопротивление) изменяются.

Реализация полученного безындуктивного контура, например, при $r = 10$ Ом потребует очень большой емкости $C = 0,1$ Ф. Однако можно обойти эту трудность. Для этого подвергнем D -преобразованию исходную схему контура (см. рис. 4.3, а), в которой примем $r = R_i + r_L = 0$. Тогда получится безындуктивный контур, изображенный на рис. 4.9, г. В соответствии с преобразованием (4.26) его параметры имеют следующие значения:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{RD}, \quad Q = C\sqrt{R/D}.$$

Если принять прежние значения $\omega_0 = 10^4$ и $Q = 500$, то при $R = 20$ кОм ($L = 20\,000$ Гн!) из последних формул находим $D = 5 \cdot 10^{-13}$ и $C = 2,5$ мкФ. Значения R и C здесь вполне приемлемы. При реализации D -элемента (см. рис. 3.47, б), приняв $C_n = C_0$, получим безындуктивный контур, показанный на рис. 4.9, д. Согласно формуле (3.176) найденное значение D может быть получено в этой схеме при приемлемом значении $C_0 = 0,05$ мкФ, если $R_0 = R_2 = 2$ кОм и $R_1 = 20$ кОм. Таким образом, при D -преобразовании цепей их исходные параметры следует выбирать специфическим образом.

§ 4.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Параллельный контур представляет собой четырехполюсник, образованный при параллельном подключении к источнику конденсатора и катушки индуктивности. С учетом их схем замещения (см. рис. 3.39, а, 3.32, а, 3.35, а) получаем схему параллельного контура, изображенную на рис. 4.10, а. При пренебрежимо малых потерях в конденсаторе схема параллельного контура упрощается, как показано на рис. 4.10, б, где $r = r_L$.

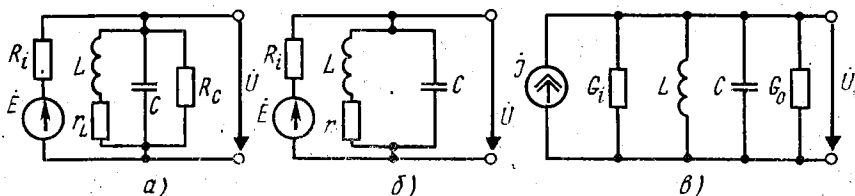


Рис. 4.10. Эквивалентные схемы параллельного контура

При использовании схемы замещения источника тока (см. рис. 3.39, б) и резонансного двухполюсника, изображенного на рис. 3.29, б, получается схема параллельного контура, показанная на рис. 4.10, в.

1. Резонансные свойства. Резонансная частота параллельного контура, показанного на рис. 4.10, а, б, отличается от значения (3.102). Согласно первому условию резонанса (3.119) и последней формуле (3.95)

$$B |_{\omega = \omega_p} = \omega_p C - \omega_p L / (r_L^2 + \omega_p^2 L^2) = 0.$$

Отсюда находим резонансную частоту

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - d_L^2} \approx \omega_0, \quad (4.28)$$

где затухание катушки $d_L = r_L / \rho$, ρ определяется прежним соотношением (3.105), а приближенное равенство справедливо при $d_L^2 \ll 1$.

Из сравнения формул (4.6) и (4.28) видно, что в отличие от последовательного контура на резонансную частоту параллельного контура влияют потери не в конденсаторе, а в катушке индуктивности.

Для приближенной схемы контура (рис. 4.10, б) его резонансное сопротивление определяется по предпоследней формуле (3.95) при $\omega = \omega_0$ и $R = r_L = r$:

$$R_0 = (\rho^2 + r^2) / r \approx \rho^2 / r = Q\rho, \quad (4.29)$$

где приближенное равенство справедливо при $Q^2 = \rho^2 / r^2 \gg 1$.

При необходимости учесть влияние потерь в конденсаторе (рис. 4.10, а) на резонансное сопротивление контура можно воспользоваться понятием вносимого сопротивления, аналогичного сопротивлению (4.17). Тогда в формуле (4.29) следует принять следующие значения сопротивления потерь контура и вносимого сопротивления:

$$r = r_L + r_{\text{вн}}, \quad r_{\text{вн}} = \rho^2 / R_C = r_C, \quad (4.30)$$

где r_C — сопротивление потерь конденсатора (3.125).

Таким образом, любые потери приводят к уменьшению резонансного сопротивления (4.29), как это следует из формулы (4.30).

В эквивалентной схеме параллельного контура, показанной на рис. 4.10, в, значение $R_0 = 1/G_0$ определяется по формулам (4.29), (4.30) или иначе: $1/R_0 = 1/R_C + 1/R_L$, где $R_L = \rho^2 / r_L$.

2. Частотные и фазовые характеристики. Сопротивление \underline{Z} параллельного резонансного двухполюсника описывается формулами (3.118), в которых резонансное сопротивление R_0 имеет значение (4.29). Для параллельного контура (см. рис. 4.10), как для делителя напряжения, коэффициент передачи (3.28) определяется в соответствии с формулами (3.67):

$$\underline{K} = \underline{Z} / (R_i + \underline{Z}), \quad \underline{K} |_{\omega = \omega_0} = K_0 = K_{\text{max}} = R_0 / (R_i + R_0). \quad (4.31)$$

Из этих соотношений находим относительный коэффициент передачи:

$$\underline{A} = \underline{K} / K_{\max} = \underline{Z} (R_i + R_0) / R_0 (R_i + \underline{Z}). \quad (4.32)$$

Подставив сюда значение сопротивления (3.118), получим

$$\underline{A} = \frac{R_i + R_0}{R_i + R_0 / (1 + jQv)} \frac{1}{1 + jQv} = \frac{1}{1 + jR_i Qv / (R_i + R_0)},$$

или

$$\underline{A} = 1 / (1 + jQ_{\text{эк}} v) = 1 / (1 + j\xi). \quad (4.33)$$

Здесь в соответствии с формулами (4.29)

$$Q_{\text{эк}} = R_i Q / (R_i + R_0), \quad d_{\text{эк}} = r_{\text{эк}} / \rho = 1 / Q_{\text{эк}} = (1 + R_0 / R_i) d = d + d_{\text{вн}}, \quad (4.34)$$

$$r_{\text{эк}} = r + r_{\text{вн}}, \quad d_{\text{вн}} = R_0 d / R_i = \rho / R_i = r_{\text{вн}} / \rho, \quad r_{\text{вн}} = \rho d_{\text{вн}} = \rho^2 / R_i, \quad (4.35)$$

а обобщенная расстройка (3.116) определяется через эквивалентную добротность (4.34).

Следует подчеркнуть, что введенные в рассматриваемом случае понятия вносимого затухания $d_{\text{вн}}$ и вносимого сопротивления $r_{\text{вн}}$ лишены того физического смысла, который имеют аналогичные параметры (4.17) в последовательном контуре. Действительно, вносимое сопротивление (4.17) можно включить в схему, убрав нагрузочное сопротивление, и процессы в цепи при этом не изменятся. Внутреннее же сопротивление R_i нельзя убрать из схемы, заменив его вносимым сопротивлением (4.35), поскольку при $R_i = 0$ выходное напряжение не будет зависеть от частоты. Кроме того, мощности на сопротивлениях R_i и $r_{\text{вн}}$ получаются неодинаковыми, в чем нетрудно убедиться при их расчете. Однако параметры (4.35) обретают такой же физический смысл, как и параметры (4.17), если в схеме параллельного контура (см. рис. 4.10) источник напряжения заменить эквивалентным источником тока (см. § 3.7.1).

Из соотношений (4.33) можно получить уравнения частотной и фазовой характеристик параллельного контура:

$$A = 1 / \sqrt{1 + Q_{\text{эк}}^2 v^2} = 1 / \sqrt{1 + \xi^2}, \quad \Delta\theta = -\arctg Q_{\text{эк}} v = -\arctg \xi. \quad (4.36)$$

Эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений (4.13) и (4.15) для последовательного контура только значением добротности. Следовательно, форма частотных и фазовых характеристик параллельного и последовательного контуров получается одинаковой. Соответственно полоса пропускания параллельного контура определяется прежними соотношениями (4.21), в которые следует подставить эквивалентные параметры $Q_{\text{эк}}$, $r_{\text{эк}}$ из формул (4.34), (4.35). Следует лишь учитывать, что в отличие от резонансной фазы $\theta_0 = -\pi/2$ последовательного контура резо-

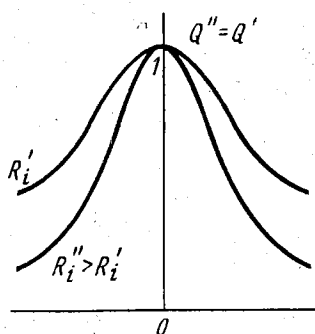


Рис. 4.11. Влияние внутреннего сопротивления источника на частотные характеристики параллельного контура

нансная фаза параллельного контура равна нулю ($\theta_0 = 0$), как это видно из соотношений (4.31). При этом $\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \theta$.

Благодаря указанному совпадению частотных и фазовых характеристик параметры параллельного контура влияют на эти характеристики так же, как и в случае последовательного контура. Отличие заключается лишь во влиянии внутреннего сопротивления источника R_i . В последовательном контуре с ростом R_i добротность уменьшается, а в параллельном контуре эквивалентная добротность увеличивается, как это видно из формул (4.34), (4.35). Поэтому, в частности, с ростом R_i полоса пропускания параллельного контура уменьшается (рис. 4.11), как следует из формулы (4.21) при подстановке в нее эквивалентной добротности (4.34).

Таким образом, если требуется частотная характеристика с резко выраженным резонансным максимумом и узкой полосой пропускания, то надо применять последовательный контур при малых R_i и параллельный контур при больших R_i . В частности, в последовательном контуре стремятся обеспечить

$$R_i \ll r, \quad (4.37)$$

а в параллельном контуре выбирают

$$R_i \gg R_0, \quad (4.38)$$

где $r = r_L + r_C$ — собственное сопротивление потерь последовательного контура, являющееся его резонансным сопротивлением, а R_0 — резонансное сопротивление (4.29) параллельного контура.

При соблюдении условия (4.37) источник сигнала близок по своим свойствам к идеальному источнику напряжения, а при соблюдении условия (4.38) — к идеальному источнику тока.

При выполнении условий (4.37), (4.38) полоса пропускания последовательного и параллельного контуров получается практически одинаковой, если они собраны из одинаковых элементов.

При соблюдении условия (4.38) соотношения (4.31) и (4.32) упрощаются:

$$\underline{K} \approx \underline{Z} / R_i, \quad K_{\max} \approx R_0 / R_i, \quad \underline{A} = \underline{Z} / R_0. \quad (4.39)$$

Из последнего равенства (4.39) и соотношений (3.118) видно, что в этом случае характеристики (4.36) совпадают с характеристиками (4.13), (4.15).

Аналогично последовательному контуру, параллельный контур сохраняет свои свойства при замене индуктивности инвертиро-

ванной емкостью. Такая замена даже удобнее, чем в последовательном контуре, поскольку здесь индуктивность может быть заземлена, а при D -преобразовании (4.26) легко замещаются проводимости $G_i = 1/R_i$ и $G_0 = 1/R_0$ вследствие больших значений R_i и R_0 .

3. Эквивалентный последовательный контур. Из совпадения частотных и фазовых характеристик параллельного и последовательного контуров следует, что в цепях, изображенных на рис. 4.12 и 4.10, может быть получено одинаковое в диапазоне частот выходное напряжение \dot{U} при соответствующем выборе параметров \dot{E}' , R_i . Такое равенство выходных напряжений цепей может быть принято в качестве критерия эквивалентности этих цепей.

Очевидно, первым условием эквивалентности является равенство эквивалентных добротностей указанных контуров. Из этого условия и равенств (4.34), (4.35) определяется внутреннее сопротивление эквивалентного источника

$$R_i = \rho^2 / R_0. \quad (4.40)$$

Для определения эквивалентной э. д. с. \dot{E}' достаточно приравнять выходные напряжения рассматриваемых контуров при резонансе:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 = \dot{E} R_0 / (R_i + R_0) = -j Q_{\text{эк}} \dot{E}'.$$

Отсюда $\dot{E}' = j R_0 \dot{E} / Q_{\text{эк}} (R_i + R_0)$, или с учетом формул (4.29) и (4.34)

$$\dot{E}' = j \dot{E} \rho / R_i. \quad (4.41)$$

При выполнении условий (4.40), (4.41) контуры, изображенные на рис. 4.12 и 4.10, имеют одинаковые выходные напряжения в диапазоне малых расстройек.

Если выходное напряжение в параллельном контуре снимается с помощью катушки связи $L_{\text{св}}$ (рис. 4.13, а), то, аналогично предыдущему, такому контуру соответствует эквивалентный последовательный контур, изображенный на рис. 4.13, б. В этом случае при резонансе ток последовательного контура должен равняться току, проходящему через катушку L параллельного контура (рис. 4.13, а):

$$\dot{I} = \dot{E}' / r_{\text{эк}} = \dot{E} R_0 / (R_i + R_0) (r + j\rho).$$

Если здесь принять $\rho \gg r$, то вместо э. д. с. (4.41) получим новую эквивалентную э. д. с.:

$$\dot{E}' \approx -j \dot{E} \rho / R_i. \quad (4.42)$$

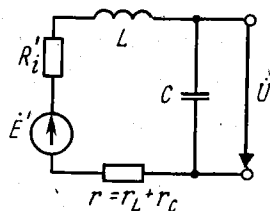


Рис. 4.12. Схема последовательного контура, эквивалентного параллельному контуру

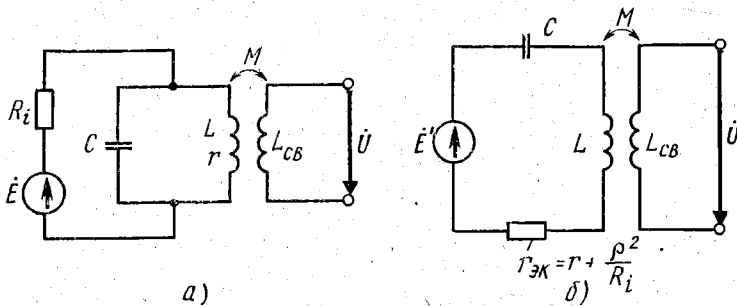


Рис. 4.13. Эквивалентное преобразование параллельного контура с катушкой связи

Таким образом, э. д. с. (4.41) и (4.42) отличаются практически только знаком.

4. Подключение нагрузки к контуру. Если к параллельному контуру (см. рис. 4.10) подключается нагрузочное сопротивление R_n , то при резонансе получается эквивалентная схема, изображенная на рис. 4.14, а. Подключение нагрузки снижает эквивалентное резонансное сопротивление контура до значения

$$R_{0эк} = R_0 R_n / (R_0 + R_n) = \rho^2 / (r + r_{вн}), \quad (4.43)$$

где вносимое сопротивление $r_{вн}$, как и в последовательном контуре, определяется по первой формуле (4.17).

Таким образом, при рассмотрении частотных и фазовых характеристик параллельного контура с нагрузкой необходимо учитывать два вносимых сопротивления — со стороны источника и со стороны нагрузки. Для этого надо соответственно изменить значение эквивалентной добротности (4.34):

$$Q_{зк} = \frac{\rho}{r + \rho^2/R_i + \rho^2/R_n}. \quad (4.44)$$

Соответственно уменьшению добротности (4.44) расширяется полоса пропускания (4.21) параллельного контура. Соответственно уменьшению резонансного сопротивления (4.43) снижается также резонансный коэффициент передачи (4.31). Чтобы осла-

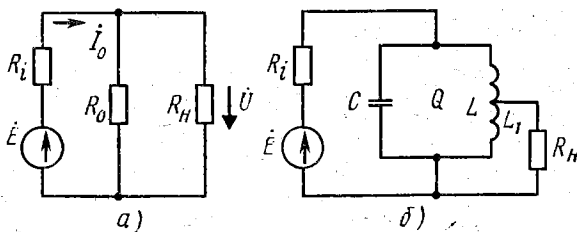


Рис. 4.14. Подключение нагрузки к параллельному контуру

бить отрицательное влияние нагрузки, стремятся увеличивать нагрузочное сопротивление R_n вплоть до значений

$$R_n \gg R_0. \quad (4.45)$$

Такой выбор нагрузочного сопротивления наряду с выполнением условия (4.38) позволяет свести к минимуму влияние внешних факторов на полосу пропускания (4.21) параллельного контура. Однако в ряде случаев нагрузочное сопротивление ограничено сверху и условие (4.45) не выполняется. При этом для сужения полосы пропускания применяют автотрансформаторное включение нагрузки, показанное на рис. 4.14, б. Это означает, что нагрузочное сопротивление R_n подключается к части витков катушки L , которые имеют индуктивность

$$L_1 = nL, \quad (4.46)$$

где n — коэффициент включения, или коэффициент автотрансформации ($0 < n < 1$).

При указанном включении сужение полосы пропускания происходит потому, что вносимое сопротивление (4.17) уменьшается до значения

$$r'_{вн} = \omega_0^2 L_1^2 / R_n = n^2 \rho^2 / R_n = n^2 r_{вн} < r_{вн}. \quad (4.47)$$

За счет этого повышается и напряжение на контуре, поскольку резонансное сопротивление (4.43) возрастает до значения

$$R'_{0 эк} = \rho^2 / (r + r'_{вн}). \quad (4.48)$$

Однако возросшее напряжение трансформируется в n раз, или делится, как в делителе напряжения. При этом резонансный коэффициент передачи дополнительно уменьшается от $K_{\max} = R_{0 эк} / (R_i + R_{0 эк})$ до $K'_{\max} = nR'_{0 эк} / (R_i + R'_{0 эк})$.

Если принять, что выполняется условие (4.38), то в знаменателях этих выражений можно пренебречь сопротивлениями $R_{0 эк}$ и $R'_{0 эк}$. Тогда найдем степень уменьшения коэффициента передачи при автотрансформаторном включении нагрузки:

$$k = K_{\max} / K'_{\max} = R_{0 эк} / nR'_{0 эк} = (r + n^2 \rho^2 / R_n) / n(r + \rho^2 / R_n).$$

Последнее равенство получено с учетом формул (4.43), (4.48) и (4.17), (4.47). Найденная степень уменьшения k имеет минимальное значение при некотором оптимальном коэффициенте автотрансформации $n = n_{\text{опт}}$. Это значение определяется из уравнения $\frac{dk}{dn} = 0$, которое является условием согласования нагрузки с контуром по максимуму резонансного коэффициента передачи. Проведя соответствующие вычисления, с учетом формулы (4.29) находим

$$n_{\text{опт}} = \sqrt{R_n / R_0}. \quad (4.49)$$

Таким образом, оптимальный выбор коэффициента включения (4.49) возможен при $R_n < R_0$. При этом, если выполняется усло-

вие (4.38), происходит двукратное расширение полосы пропускания и такое же снижение резонансного коэффициента передачи по сравнению с их значениями для контура без нагрузки. Аналогичный эффект получается и при непосредственном подключении нагрузочного сопротивления $R_n = R_0$ (рис. 4.14, а).

Для настроенного контура с нагрузкой (рис. 4.14, а) представляет также интерес к. п. д. цепи, который определяется следующим образом: $\eta = P_0 / (P_0 + P_1 + P_2)$, где $P_0 = U_0^2 / R_n$, $P_1 = U_0^2 / R_0$, $P_2 = R_i I_0^2$ — соответственно полезная мощность в нагрузочном сопротивлении R_n , активная мощность, теряемая в контуре и мощность, расходуемая на внутреннем сопротивлении источника R_i .

Из этих соотношений, учитывая, что $U_0 = R_{0 эк} I_0$, а $R_{0 эк}$ определяется первой формулой (4.43), находим к. п. д. параллельного контура с нагрузкой:

$$\eta = \frac{1}{R_i(1 + R_n/R_0)(1/R_i + 1/R_0 + 1/R_n)} \quad (4.50)$$

Отсюда видно, что к. п. д. стремится к нулю при $R_n \rightarrow 0$ и $R_n \rightarrow \infty$. Следовательно, существует оптимальное значение нагрузочного сопротивления $R_n = R_{n опл}$, при котором к. п. д. получается максимальным. Это оптимальное нагрузочное сопротивление удобно находить из равенства $\frac{d}{dR_n}(1/\eta) = 0$, которое является условием согласования нагрузки с контуром по максимуму к. п. д. После соответствующих вычислений получаем

$$R_n = R_{n опл} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + R_0/R_i}} \quad (4.51)$$

Значение к. п. д. (4.50) при оптимальном нагрузочном сопротивлении (4.51) зависит от отношения R_0/R_i .

5. Избирательность. Поскольку частотные характеристики (4.36), (4.13) описываются одинаковой функциональной зависимостью $A(\xi)$, избирательность параллельного контура получается такой же, как и у последовательного контура. В частности, коэффициент прямоугольности параллельного контура описывается прежним соотношением (4.24) и имеет столь же большое значение.

Повышение избирательности может достигаться увеличением в схеме количества резонансных контуров, что возможно, например, в резонансных усилителях. *Резонансными усилителями называют ламповые, транзисторные и другие электронные усилители, в которых нагрузкой служат резонансные контуры. В таких устройствах усиление осуществляется одновременно с селекцией сигнала.*

Идеализированный электронный усилитель может быть отображен эквивалентной схемой, содержащей идеальный преобразователь мощности (см. § 2.2.3). При использовании в таком усилителе параллельного контура в качестве нагрузки сопротив-

ление зависимого источника R_i должно удовлетворять условию (4.38). Этому условию удовлетворяет, в частности, преобразователь мощности типа ИТУН (см. рис. 2.12, в), для которого $R_i = \infty$. Поэтому резонансный усилитель может иметь эквивалентную схему, показанную на рис. 4.15, а. Данная схема является идеальным усилительным каскадом. В обобщенном виде она представлена на рис. 4.15, б, где Z — сопротивление параллельного контура (3.118).

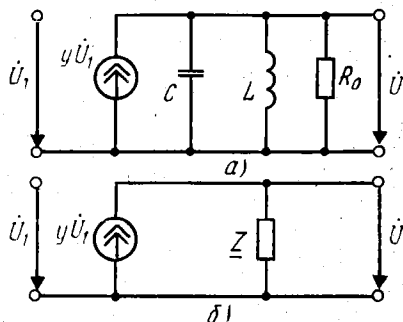


Рис. 4.15. Эквивалентные схемы усилительного каскада

Выходное напряжение усилительного каскада $\dot{U}_2 = Z \dot{I} = yZ \dot{U}_1$. Отсюда определяются коэффициент передачи (усиления) каскада и его частотная характеристика:

$$K = U_2/U_1 = yZ, \quad A = K/K_0 = U_2/U_{20} = Z/R_0 = 1/\sqrt{1 + \xi^2}, \quad (4.52)$$

где $K_0 = K|_{\xi=0} = yR_0$ — резонансный коэффициент усиления; $U_{20} = U|_{\xi=0} = yR_0 U_1$ — резонансное выходное напряжение.

Таким образом, частотная характеристика каскада резонансного усилителя совпадает с частотной характеристикой одиночного контура (4.13), (4.36). Следовательно, селективные свойства этого каскада характеризуются коэффициентом прямоугольности (4.24). Однако в резонансном усилителе можно соединить цепочкой несколько усилительных каскадов, как показано на рис. 4.16. При этом соединение контуров называют каскадным соединением.

Нетрудно видеть, что для N -каскадного усилителя, состоящего из одинаковых каскадов,

$$K_N = U_N/U_0 = K^N, \quad K_{0N} = K_0^N, \quad A_N = A^N, \quad (4.53)$$

где K , K_0 , A определяются формулами (4.52) для отдельных каскадов.

Из соотношений (4.52), (4.53) следует, что

$$H_N = 1/A_N = (1 + \xi^2)^{N/2}, \quad H_r = \sqrt{2} = (1 + \xi_r^2)^{N/2}, \quad H_0 = (1 + \xi_0^2)^{N/2}$$

и

$$\xi = \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \quad \xi_0 = \sqrt{\sqrt{H_0^2} - 1}.$$

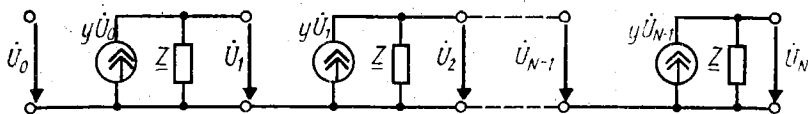


Рис. 4.16. Эквивалентная схема многокаскадного усилителя

Отсюда в соответствии с определением (4.23) находим коэффициент прямоугольности N -каскадного резонансного усилителя:

$$K_{ПЗдБ}^{a_0} = K_{П\sqrt{2}}^{a_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{N/H_0^2} - 1}{\sqrt{2} - 1}}. \quad (4.54)$$

Таким образом, при каскадном соединении контуров коэффициент прямоугольности уменьшается с ростом числа контуров. Однако при этом его уменьшение происходит не до значения $K_{П} = 1$, а до большего значения. Раскрыв неопределенность в формуле (4.54) при $N \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{ПЗдБ}^{a_0} = \sqrt{\frac{a_0}{3}}. \quad (4.55)$$

Значения $K_{П}$, рассчитанные по формулам (4.54), (4.55), приведены в табл. П.3. Учитывая незначительный выигрыш в избирательности и усложнение настройки контуров при увеличении числа каскадов, на практике обычно не используют больше двух-трех каскадов резонансного усилителя.

6. Фильтрация гармоник. В выходных каскадах радиопередатчиков используются усилители большой мощности. В таких усилителях за счет большого размаха колебаний резко сказываются нелинейные свойства электронного прибора, приводящие к появлению высших гармоник на частотах $\omega_k = k\omega_0$ (см. § 1.4.1). Эти гармоники, будучи излученными, создают помехи в других каналах связи. Поэтому возникает задача фильтрации гармоник в самом передатчике. Эта задача полностью или частично решается применением в выходном каскаде резонансного усилителя, обладающего селективными свойствами.

Частотам высших гармоник ω_k соответствуют расстройки $\xi_k = Qv_k = Q(\omega_k/\omega_0 - \omega_0/\omega_k) = Q(k - 1/k) \gg 1$. При этом согласно формуле (4.52) для k -й гармоники получается ослабление

$$H_k = 1/A_k = U_{20}/U_{2k} \approx \xi_k = (k^2 - 1)Q/k. \quad (4.56)$$

В выходном резонансном усилителе радиопередатчика антенна может включаться в одну из ветвей параллельного контура. В этом случае представляет интерес ослабление гармоник по току, а не по напряжению (4.56).

Если пренебречь потерями, то токи в индуктивной и емкостной ветвях контура можно определить следующим образом:

$$I_{L0} = I_{C0} = U_{20}/\rho$$

— на резонансной частоте ω_0 , где $X_L = |X_C| = \rho$;

$$I_{Lk} = \frac{U_{2k}}{k\rho}, \quad I_{Ck} = \frac{U_{2k}}{(\rho/k)}$$

— на частоте $\omega_k = k\omega_0$, где $X_L = \omega_k L = k\rho$ и $|X_C| = 1/\omega_k C = \rho/k$.

Отсюда с учетом формулы (4.56) получаем ослабление, или коэффициент фильтрации гармоник по току:

$$H_L = I_{L0}/I_{Lk} = kH_k = (k^2 - 1)Q, \quad (4.57)$$

$$H_C = I_{C0}/I_{Ck} = H_k/k = (k^2 - 1)Q/k^2.$$

Из формул (4.57) видно, что ослабление высших гармоник в индуктивной ветви контура в k^2 раз больше, чем в емкостной. Если и это ослабление является недостаточным, то в антенной цепи передатчика применяют дополнительные фильтры.

§ 4.4. СЛОЖНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Сложными называют такие параллельные контуры, в одной или двух ветвях которых содержатся разноименные реактивные элементы. Различные виды сложных параллельных контуров показаны на рис. 4.17, а—в, а обобщенная схема — на рис. 4.17, г. Здесь под сопротивлениями r_1 , r_2 подразумеваются сопротивления потерь катушек индуктивности в предположении, что потерями в конденсаторах можно пренебречь.

1. Резонансные явления. Главной особенностью сложных контуров является наличие в них нескольких резонансов. Как и в простом параллельном контуре, здесь имеется резонанс токов. Кроме того, в контурах с тремя реактивными элементами (рис. 4.17, а, б) образуется резонанс напряжений в одной из ветвей за счет последовательного соединения соответственно L_2 , C и C_1 , L . В контуре с четырьмя реактивными элементами (рис. 4.17, в) каждая из ветвей имеет последовательный резонанс, т. е. всего в контуре наблюдается три резонанса.

Последовательные резонансы образуются на частотах, которые определяют приблизительно по формуле (3.102). В эту формулу надо подставлять соответствующие параметры последовательно соединенных реактивных элементов. Частоту параллельного резонанса можно определить по обобщенной схеме сложного контура (рис. 4.17, г). Сопротивление этого контура

$$Z = (r_1 + jX_1)(r_2 + jX_2)/(r + jX) \approx -X_1X_2/(r + jX). \quad (4.58)$$

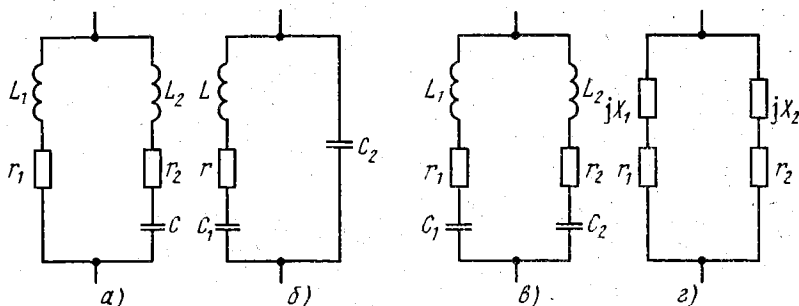


Рис. 4.17. Схемы сложных параллельных контуров

Здесь $r = r_1 + r_2$, $X = X_1 + X_2$, а приближенное равенство написано для области параллельного резонанса, где $r_1 \ll |X_1|$ и $r_2 \ll |X_2|$. Действительно, хотя X_1 и (или) X_2 обращаются в нуль при последовательном резонансе, на частоте параллельного резонанса эти сопротивления достаточно велики по модулю, чтобы можно было пренебречь малыми сопротивлениями потерь.

Из приближенного равенства (4.58) определяется условие параллельного резонанса:

$$X = X_1 + X_2 = 0, \quad -X_2 = X_1 = X_0. \quad (4.59)$$

Учитывая значения X_1 и X_2 , из первого равенства (4.59) найдем резонансную частоту ω_0 для сложных контуров трех видов (рис. 4.17, а—в). Для этих же контуров частоты (3.102) последовательных резонансов обозначим через ω_1 и (или) ω_2 и сравним их значения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C}} > \omega_0 \quad (4.60)$$

— для сложного контура первого вида (рис. 4.17, а);

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1C_2/(C_1 + C_2)}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} < \omega_0 \quad (4.61)$$

— для сложного контура второго вида (рис. 4.17, б);

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C_1C_2/(C_1 + C_2)}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} < \omega_0, \quad (4.62)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} > \omega_0$$

— для сложного контура третьего вида (рис. 4.17, в).

Неравенства в соотношениях (4.60) и (4.61) являются очевидными. Неравенства же в соотношении (4.62) нуждаются в разъяснении. В этом соотношении частота ω_0 может быть представлена в различных формах:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1 \frac{a}{b}}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2 \frac{1-a}{1-b}}}, \quad (4.63)$$

где $a = C_2/(C_1 + C_2)$; $b = L_1/(L_1 + L_2)$.

Заметим, что равенство $a = b$ не должно выполняться в рассматриваемом случае, поскольку при этом $L_1C_1 = L_2C_2$. Это означает одинаковую настройку ветвей контура, при которой все три резонанса сливаются в один, как следует из соотношений (4.63). Поскольку этот случай не представляет интереса, примем произвольно $a < b$. Это не нарушает общности результата, так как обозначения на рис. 4.17, а являются произвольными. Из принятого неравенства следует, что $-a > -b$ и $1 - a > 1 - b$. При этих условиях из формул (4.63) вытекают неравенства в соотношениях (4.62).

2. Сопротивление контура. Характер изменения сопротивления сложных контуров в области каждой из резонансных частот (4.60) — (4.62) остается таким же, как в простых контурах при параллельном и последовательном резонансах (см. рис. 3.30). Это свойство является достаточно очевидным для области последовательного резонанса, где резонансная ветвь имеет малое сопротивление и сильно шунтирует другую ветвь контура (см. § 3.2.1). Поэтому нерезонансную ветвь можно отбросить, так что в области резонанса напряжений сложный контур превращается в обычный последовательный контур.

Для области параллельного резонанса сопротивление сложного контура (4.58) определяют с учетом второго соотношения (4.59):

$$Z = X_0^2 / (r + jX) = X_0^2 / (r + j\rho v) = X_0^2 / r (1 + jQv). \quad (4.64)$$

Полагая значение X_0 практически постоянным в области малых расстроек, находим, что сопротивление (4.64) отличается от сопротивления (3.118) простого параллельного контура лишь величиной резонансного сопротивления

$$R'_0 = X_0^2 / r. \quad (4.65)$$

Для качественного построения частотных характеристик сопротивления сложного контура необходимо на оси частот отметить резонансные частоты (4.60) — (4.62). Затем надлежит изобразить характеристики в области каждой из резонансных частот в соответствии с рис. 3.30. Наконец, в промежутках между областями малых расстроек следует соединить полученные фрагменты характеристики непрерывной кривой, поскольку между резонансами эта характеристика не имеет никаких особенностей.

Построенные таким образом характеристики сложных контуров трех видов (см. рис. 4.17, *а—в*) показаны на рис. 4.18, *а—в*.

Точное построение частотных характеристик сопротивления (4.58) является достаточно громоздким. Поэтому расчет и построение таких характеристик целесообразно осуществлять с помощью ЭВМ.

3. Частотные характеристики. Сложные параллельные контуры могут использоваться в схеме четырехполюсника, как пока-

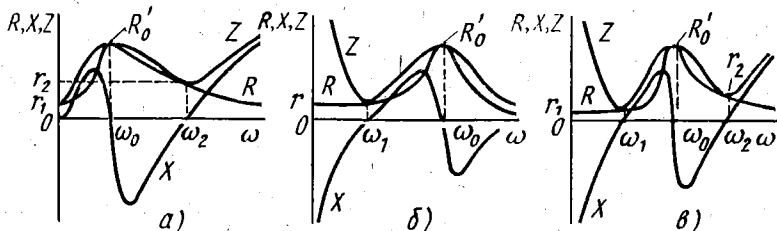


Рис. 4.18. Частотные характеристики сопротивлений сложных контуров

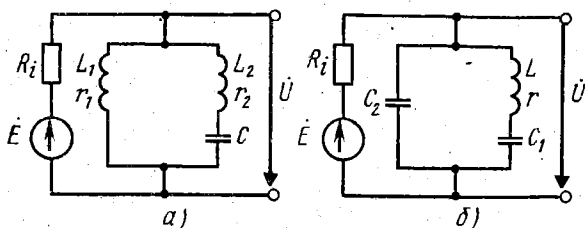


Рис. 4.19. Включение сложных контуров в схемах четырехполюсника

зано на рис. 4.19. При этом внутреннее сопротивление источника R_i следует выбирать из тех же соображений, что и для простого параллельного контура. В частности, при этом можно руководствоваться критерием (4.38), где $R_0 = R'_0$.

Если соблюдается условие (4.38), то частотная характеристика сложного контура описывается прежними уравнениями (4.39), т. е. повторяет характеристику его сопротивления (см. рис. 4.18). В этом случае имеется особенность лишь вблизи нулевой частоты, где может выполняться неравенство $Z \gg R_i$ (см. рис. 4.18, б, в). При этом согласно общему выражению (4.31) $K \approx 1$.

Частотные характеристики сложных контуров, показанных на рис. 4.19, а, б, должны соответствовать с учетом оговоренных условий характеристикам полного сопротивления, изображенным на рис. 4.18, а, б. Эти частотные характеристики показаны на рис. 4.20, а, б.

Сложные контуры могут использоваться для подавления специфических помех на фиксированных частотах. Резонансные частоты этих контуров можно выбирать независимо друг от друга. Поэтому в сложном контуре, настроенном на частоту полезного сигнала ω_0 , резонансная частота ω_1 или ω_2 может быть выбрана равной частоте помехи. При этом за счет малого коэффициента передачи на частоте последовательного резонанса достигается особенно сильное подавление помехи.

Например, в радиопередатчике за счет нелинейных процессов могут возникать паразитные колебания на частотах высших гармоник полезного сигнала (см. § 1.4.1). В этом случае в передатчике можно применить сложный контур с частотной характеристикой, показанной на рис. 4.20, а, и выбрать $\omega_2 = 2\omega_0$ или $\omega_2 = 3\omega_0$. Тогда будет обеспечено эффективное подавление соответствующей высшей гармоники.

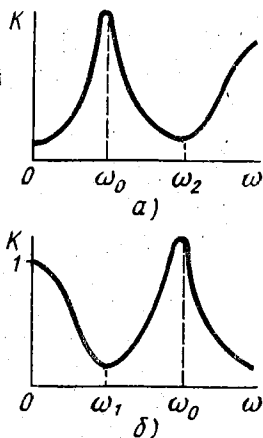


Рис. 4.20. Частотные характеристики сложных контуров

В контуре с характеристикой рис. 4.20, б можно выбрать $\omega_0 = 2\omega_1$ или $\omega_0 = 3\omega_1$. При этом, наоборот, можно выделить колебания с повышенной частотой ω_0 и подавить помеху на пониженной частоте ω_1 . Такой способ выделения колебаний повышенных частот применяют в умножителях частоты (см. § 1.4.1). В этих нелинейных устройствах при подведении задающих колебаний с частотой ω_1 возникают высшие гармоники, одна из которых и выделяется сложным контуром. Одновременно этот контур подавляет задающие колебания, которые для умножителя частоты являются помехой.

4. Регулировка резонансного сопротивления. Активная мощность, отдаваемая источником в параллельный контур (см. рис. 4.10), зависит от резонансного сопротивления контура R_0 . Если $R_0 > R_i$, то для получения полезной мощности максимум максимум надо согласовать контур с источником, снизив резонансное сопротивление до значения $R_0 = R_i$ (см. § 3.4.2). Такая задача возникает, например, в радиопередатчиках, при каждой перестройке которых требуется одновременно осуществлять согласование выходного контура.

Указанное согласование достигается, например, в сложном контуре, изображенном на рис. 4.19, а. Для него резонансное сопротивление (4.65) получается меньше сопротивления (4.29):

$$R'_0 = n^2 R_0, \quad (4.66)$$

где коэффициент включения $n < 1$ определяется соотношением (4.46), поскольку $X_0 = \omega_0 L_1$ и $\rho = \omega_0 L$. При $R_0 > R_i$ согласование обеспечивается таким выбором n , при котором $R'_0 = R_i$.

Для согласования контура его резонансное сопротивление надо изменять в некоторых пределах, пока не будет обеспечено выполнение условия согласования. При этом настройка контура не должна нарушаться. Подобную регулировку резонансного сопротивления удобно осуществлять в схеме контура с подвижным контактом, как показано на рис. 4.21, а. Этот контур имеет эквивалентную схему, изображенную на рис. 4.21, б, которая несколько отличается от схемы рис. 4.17, а. Количественные соотношения здесь видоизменяются за счет индуктивной связи между составными частями L'_1 и L'_2 катушки. Тем не менее при этом остается справедливой формула (4.66), в которой

$$n = L_1/L, \quad L_1 = L'_1 + M. \quad (4.67)$$

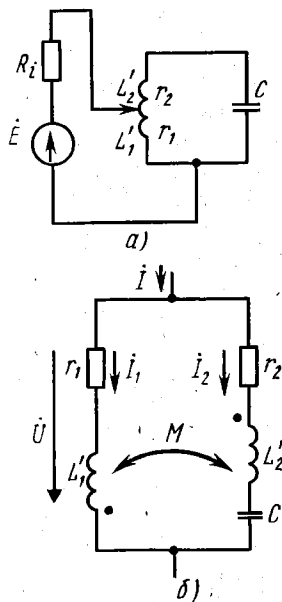


Рис. 4.21. Частичное включение параллельного контура и его эквивалентная схема

Справедливость данных соотношений вытекает из уравнений для рассматриваемого сложного контура (рис. 4.21, б):

$$\begin{aligned}(r_1 + jX_1)I_1 - jX_M I_2 &= \dot{U}, \\ -jX_M I_1 + (r_2 + jX_2)I_2 &= \dot{U},\end{aligned}$$

где $X_1 = \omega L_1$; $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C$; $X_M = \omega M$.

Решив эти уравнения, найдем (при $\dot{I} = I_1 + I_2$)

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{(r_1 + jX_1)(r_2 + jX_2) + X_M^2}{r + jX} \approx \frac{-X_1 X_2 + X_M^2}{r + jX},$$

где $r = r_1 + r_2$; $X = X_1 + X_2 + 2X_M$.

Отсюда при $X = 0$ и $-X_2 = X_1 + 2X_M$ получаем

$$-X_1 X_2 + X_M^2 = X_1(X_1 + 2X_M) + X_M^2 = (X_1 + X_M)^2 = X_0^2.$$

Тем самым подтверждается справедливость формул (4.65) — (4.67) для сложного контура с подвижным контактом.

В таком контуре (рис. 4.21, а) перемещением контакта достигается изменение коэффициента включения (4.67) и резонансного сопротивления (4.66), а настройка контура не изменяется, поскольку $L = L_1 + L_2 + 2M = \text{const}$ и частота параллельного резонанса $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \text{const}$.

При отсутствии рассеяния магнитных потоков индуктивности L_1 , L_2 пропорциональны квадрату чисел витков катушки N_1 , N_2 , а $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Тогда $L_1 = aN_1^2$, $L_2 = aN_2^2$, $M = aN_1 N_2$, откуда $L_1/L = (L_1 + M)/(L_1 + L_2) = (N_1^2 + N_1 N_2)/(N_1 + N_2)^2 = N_1/(N_1 + N_2)$. При этом $r_1/r = r_1/(r_1 + r_2) = N_1/(N_1 + N_2)$, или $r_1/r = L_1/L$, если катушка намотана проводом неизменного сечения.

§ 4.5. СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

Связанными контурами называют систему из нескольких резонансных контуров, в которых колебания передаются из одного контура в другие. Здесь рассматриваются простейшие системы из двух связанных контуров, получившие наибольшее распространение. Такую пару связанных контуров образуют, например, цепи первичной и вторичной обмоток трансформатора (см. рис. 3.36, а), если их дополнить емкостями, как показано на рис. 4.22. При этом связанные резонансные контуры L_1 , C_1 и L_2 , C_2 называют соответственно первичным и вторичным контурами.

Первичный контур может быть как последовательным, так и параллельным. Однако нет надобности рассматривать эти две разновидности связанных контуров, поскольку они обладают одинаковыми свойствами. Такой вывод вытекает из эквивалентности параллельного и последовательного контуров по выходному напряжению (см. § 4.3.3). Выходное напряжение первичного контура является входным напряжением для вторичного контура. Следовательно, процессы во вто-

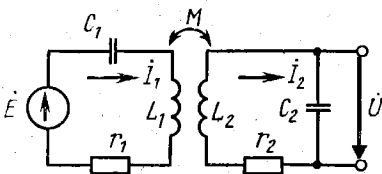


Рис. 4.22. Схемы контуров с трансформаторной связью

ричном контуре и его выходное напряжение не зависят от способа включения источника в первичном контуре. Поэтому в дальнейшем рассматриваются связанные контуры только с последовательным первичным контуром.

1. Виды связи. Связь между контурами может обеспечиваться различными образом. В связанных контурах на рис. 4.22 связь является трансформаторной. При этом сопротивление взаимной индукции (3.131) называется сопротивлением связи.

Трансформаторная связь является разновидностью индуктивной связи, другой вариант которой, показанный на рис. 4.23, а называется автотрансформаторной связью. Помимо нее возможна емкостная связь между контурами (рис. 4.23, б). На рис. 4.23 элементы связи $L_{св}$ и $C_{св}$ входят в состав каждого из связанных контуров. Такая связь называется внутренней, а сопротивления элементов связи $Z_{св} = j\omega L_{св}$ и $Z_{св} = 1/j\omega C_{св}$ являются, по определению, сопротивлениями связи (см. § 3.6.3).

Возможна также внешняя индуктивная и емкостная связь, при которой элементы связи $L_{св}$ и $C_{св}$ не входят в состав контуров, как показано на рис. 4.24, а, б. В этих схемах имеется три

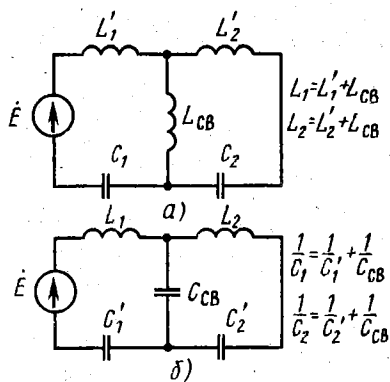


Рис. 4.23. Схемы контуров с внутренней связью

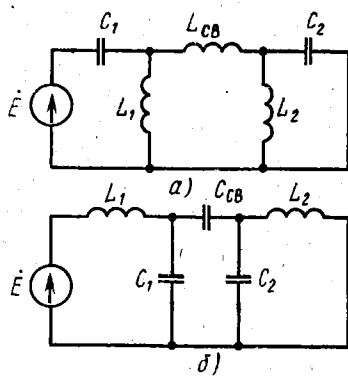


Рис. 4.24. Схемы контуров с внешней связью

независимых контура, но только два из них (L_1, C_1 и L_2, C_2) являются резонансными. Поэтому указанные схемы рассматриваются как двухконтурные связанные системы. При этом имеется в виду возможность пересчета треугольников $L_1, L_{св}, L_2$ и $C_1, C_{св}, C_2$ на соответствующую эквивалентную звезду (см. § 3.7.6). После пересчета получаются эквивалентные схемы с внутренней связью (см. рис. 4.23).

Для контуров с внешней связью сопротивления элементов связи не являются сопротивлениями связи. Использование понятия сопротивления связи для этих контуров становится возможным после их эквивалентного преобразования к схемам с внутренней связью.

2. Коэффициент и фактор связи. Сопротивление связи, непригодное для характеристики контуров с внешней связью, не является универсальным параметром. Поэтому вводят понятие коэффициента связи, который можно использовать для количественной оценки связи любого вида.

С этой целью рассматриваются четырехполюсники, образованные элементом связи и реактивными элементами связанных контуров, одноименными с элементом связи. Такие четырехполюсники связи для контуров, изображенных на рис. 4.22, 4.23, а, б и 4.24, а, б, показаны соответственно на рис. 4.25, а—д.

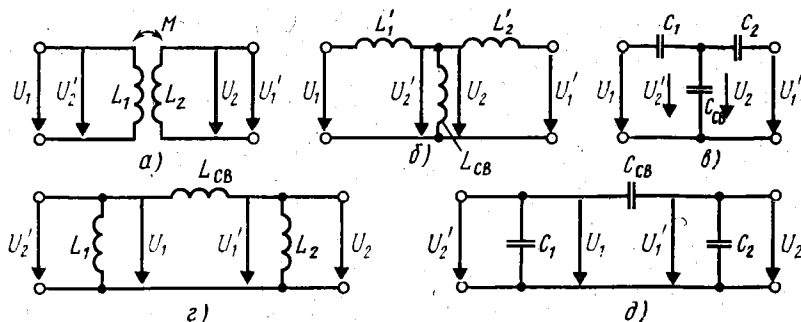


Рис. 4.25. Схемы четырехполюсников связи

Коэффициентом связи называют среднегеометрическое значение коэффициентов трансформации по напряжению (3.135), которые определены для четырехполюсников связи при передаче слева направо и справа налево в режиме холостого хода:

$$k_{св} = \sqrt{n_{Ux} n'_{Ux}}, \quad n_{Ux} = U_2/U_1, \quad n'_{Ux} = U'_2/U'_1. \quad (4.68)$$

На рис. 4.25 и в формулах (4.68) штрихами отмечены напряжения при передаче сигнала справа налево. Для трансформаторной связи (рис. 4.25, а) коэффициенты трансформации (4.68) определяются из формул (3.127)—(3.131) при условии $I_2 = 0$, когда передача осуществляется слева направо, и $I_1 = 0$, когда передача происходит справа налево. Для остальных четырехполюсников связи (рис. 4.25, б—д) коэффициенты трансформации (4.68) определяются по формулам (3.69), (3.89).

Зная коэффициенты трансформации в режиме холостого хода, из определения (4.68) находим значения коэффициентов связи:

$$k_{св} = M/\sqrt{L_1 L_2} \quad (4.69)$$

— для трансформаторной связи (см. рис. 4.22),

$$k_{св} = \frac{L_{св}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + L_1'/L_{св})(1 + L_2'/L_{св})}} \quad (4.70)$$

— для автотрансформаторной связи (см. рис. 4.23, а),

$$k_{св} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{св}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_{св}/C_1)(1 + C_{св}/C_2)}} \quad (4.71)$$

— для внутреннеемкостной связи (см. рис. 4.23, б),

$$k_{св} = \frac{1}{\sqrt{(1 + L_{св}/L_1)(1 + L_{св}/L_2)}} \quad (4.72)$$

— для внешнеиндуктивной связи (см. рис. 4.24, а),

$$k_{св} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_1/C_{св})(1 + C_2/C_{св})}} \quad (4.73)$$

— для внешнеемкостной связи (см. рис. 4.24, б).

Из формул (4.69) — (4.73) видно, что при трансформаторной, автотрансформаторной и внешнеемкостной связи коэффициент связи увеличивается с ростом параметра элемента связи (M , $L_{св}$, $C_{св}$). Наоборот, в случае внешнеиндуктивной и внутреннеемкостной связей коэффициент связи уменьшается с ростом параметра элемента связи ($L_{св}$, $C_{св}$).

Ниже показывается, что характеристики связанных контуров можно описать с помощью коэффициента связи. Поэтому при одинаковом коэффициенте связи свойства связанных контуров с любым видом связи получаются идентичными. Отсюда следует, что нет надобности анализировать процессы в различных системах связанных контуров. Достаточно изучить свойства связанных контуров с каким-либо одним видом связи. Здесь рассматриваются связанные контуры с трансформаторной связью. При этом используются рассмотренные ранее свойства трансформатора (см. § 3.3.3).

Наряду с параметром (4.68) используют также понятие нормированного коэффициента связи, или фактора связи

$$\kappa = k_{св} / \sqrt{d_1 d_2} = X_{св} / \sqrt{r_1 r_2}. \quad (4.74)$$

Здесь $d_1 = r_1 / \omega L_1$, $d_2 = r_2 / \omega L_2$ — затухания (3.126) связанных контуров, а последнее равенство написано в соответствии с формулами (3.131) и (4.69), поскольку $X_{св} = X_M$.

При одинаковых параметрах связанных контуров ($r_1 = r_2 = r$, $d_1 = d_2 = d = 1/Q$) формулы (4.74) упрощаются:

$$\kappa = k_{св} / d = Q k_{св} = X_{св} / r. \quad (4.75)$$

Следует иметь в виду, что выражение фактора связи через сопротивление связи, как в последних равенствах (4.74), (4.75), возможно также для схем с автотрансформаторной и внутреннеемкостной связью.

3. Резонансные явления. В связанных контурах наблюдается несколько различных резонансов. При этом резонансы возникают не на резонансных частотах первичного и вторичного контуров $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Более того, связанные контуры могут иметь несколько резонансов даже при одинаковой их

настройке, когда $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. Происходит это за счет взаимного влияния связанных контуров.

При рассмотрении трансформатора было найдено, что в цепь его первичной обмотки вносится комплексное сопротивление (3.141). Такое же явление наблюдается в связанных контурах. Для схем с трансформаторной связью (см. рис. 4.22) указанное вносимое сопротивление может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вн1} &= r_{вн1} + jX_{вн1} = X_{св}^2 / \underline{Z}_2, \\ r_{вн1} &= X_{св}^2 r_2 / Z_2^2, \quad X_{вн1} = -X_{св}^2 X_2 / Z_2^2, \end{aligned} \quad (4.76)$$

где $Z_2 = r_2 + jX_2$ — сопротивление вторичного контура.

С учетом вносимых сопротивлений связанные контуры можно отобразить эквивалентной схемой, показанной на рис. 4.26, а. Входящее в нее реактивное вносимое сопротивление должно быть учтено при настройке первичного контура в резонанс.

Аналогично, в связанных контурах можно настраивать в резонанс вторичный контур, учитывая при этом влияние первичного контура. Это влияние можно учесть также с помощью вносимого сопротивления, но вносимого из первичного контура во вторичный. В силу симметричного воздействия связанных контуров друг на друга указанное вносимое сопротивление может быть найдено из формул (4.76) путем перестановки индексов:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вн2} &= r_{вн2} + jX_{вн2} = X_{св}^2 / Z_1, \\ r_{вн2} &= X_{св}^2 r_1 / Z_1^2, \quad X_{вн2} = -X_{св}^2 X_1 / Z_1^2, \end{aligned} \quad (4.77)$$

где $Z_1 = r_1 + jX_1$ — сопротивление первичного контура.

С учетом этих вносимых сопротивлений может быть построена вторая эквивалентная схема связанных контуров, показанная на рис. 4.26, б. Здесь \dot{E}_2 — э. д. с., наводимая во вторичном контуре током \dot{I}_1 . Эта э. д. с. определяется из второй формулы (3.132):

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_2 |_{I_2=0} = \mp Z_M \dot{I}_1 = \mp \dot{E} Z_{св} / Z_1.$$

Таким образом, учитывая взаимное влияние связанных контуров и принимая во внимание возможность настройки как первичного, так и вторичного контура, необходимо записать два сле-

дующих условия резонанса для полного (входного) реактивного сопротивления контуров:

$$X_{вх1} = X_1 + X_{вн1} = 0, \quad (4.78)$$

$$X_{вх2} = X_2 + X_{вн2} = 0,$$

где $X_{вх1}$ и $X_{вх2}$ измеряются со стороны зажимов источников э. д. с. \dot{E} и \dot{E}_2 (рис. 4.26).

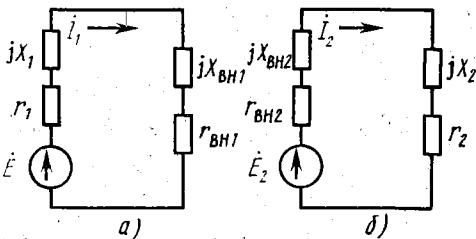


Рис. 4.26. Эквивалентные схемы связанных контуров

Резонансы, достигаемые настройкой либо первичного, либо вторичного контура, называют соответственно резонансами. При такой настройке изменяется либо X_1 , либо X_2 до достижения первого или второго условия резонанса (4.78). В результате

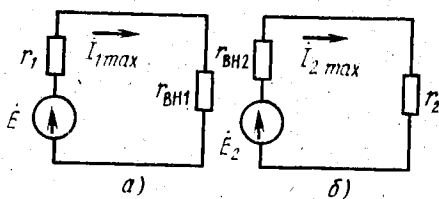


Рис. 4.27. Эквивалентные схемы связанных контуров при резонансе

компенсируются реактивные сопротивления в эквивалентных схемах связанных контуров (рис. 4.26), и схемы упрощаются, как показано на рис. 4.27.

Если последовательно настраивать первичный и вторичный контуры, поочередно изменяя X_1 и X_2 , то можно получить резонансы в обоих контурах при условии, что

$$X_1 = X_2 = 0. \quad (4.79)$$

Действительно, при выполнении этого условия вносимые реактивные сопротивления (4.76) и (4.77) обращаются в нуль. Следовательно, при выполнении условия (4.79) соблюдаются оба условия резонанса (4.78). Резонанс, получающийся при одновременной настройке обоих контуров, когда выполняется условие (4.79), называется *полным резонансом*. При полном резонансе можно пользоваться любой эквивалентной схемой связанных контуров, изображенной на рис. 4.27, а, б.

Практический интерес представляет случай одинаковых контуров, когда $Z_1 = Z_2 = Z = r + jX$ и $X_{вн1} = X_{вн2} = X_{вн} = -X_{св}^2 X / Z^2$. При этом условия резонанса (4.78) сводятся к одному критерию:

$$X_{вх1} = X_{вх2} = X_{вх} = 0, \quad (4.80)$$

где

$$X_{вх} = X + X_{вн} = X(1 - X_{св}^2 / Z^2). \quad (4.81)$$

Из этого соотношения видно, что условие (4.80) выполняется в двух случаях:

$$X = 0, \quad Z = X_{св}. \quad (4.82)$$

Здесь первое равенство соответствует условию полного резонанса (4.79). При соблюдении же второго равенства (4.82) получаются частные резонансы.

При фиксированных параметрах L , C , r контуров указанные резонансы возникают на определенных частотах. Найдем эти резонансные частоты при условии, что в области малых расстройек можно пренебречь изменением сопротивления связи, т. е. принять $X_{св}(\omega) \approx \text{const}$. При этом для удобства будем пользоваться обобщенной расстройкой (3.116). Однако следует иметь в виду, что для связанных контуров значение обобщенной расстройки

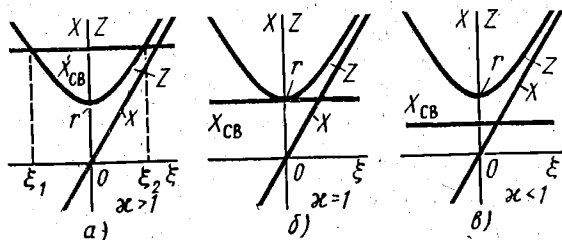


Рис. 4.28. Графики изменения сопротивлений связанных контуров

(4.22) является недействительным, поскольку одиночный и связанные контуры имеют разные полосы пропускания.

На рис. 4.28, а в соответствии с рис. 3.30, а показано изменение сопротивлений X и Z при заданном $X_{св} > r$, т. е. при $\kappa > 1$, как следует из определения (4.75). Из графиков видно, что в оговоренных условиях связанные контуры имеют три резонанса. При $\xi = \xi_0 = 0$, когда $X = 0$, по первому критерию (4.82) получается полный резонанс. При расстройках же ξ_1 и ξ_2 , когда $Z = X_{св}$, вносимые реактивные сопротивления компенсируют собственные реактивные сопротивления каждого из контуров. При этом по второму критерию (4.82) получаются частные резонансы. Учитывая, что $X_{св} = Z = r\sqrt{1 + \xi_{1,2}^2}$, находим с учетом формулы (4.75) расстройки ξ_1 и ξ_2 . Таким образом, получаем три резонансных значения расстроек и соответствующих им резонансных частот, которые определяются с учетом приближенной формулы (3.116):

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = -\sqrt{\kappa^2 - 1}, \quad \xi_2 = \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad (4.83)$$

и

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \omega_1 = \omega_0(1 - \sqrt{\kappa^2 - 1}/2Q), \quad \omega_2 = \omega_0(1 + \sqrt{\kappa^2 - 1}/2Q). \quad (4.84)$$

Если сопротивление связи уменьшить до значения $X_{св} = r$ (рис. 4.28, б), то фактор связи (4.75) станет равным $\kappa = \kappa_{кр} = 1$. Из формул (4.83), (4.84) и рис. 4.28, б видно, что при этом три резонанса сольются в один полный резонанс:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_0 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (4.85)$$

Связь, при которой происходит указанное слияние резонансов, называют критической.

Если продолжать уменьшение фактора связи по сравнению с критическим значением, как показано на рис. 4.28, в, то в связанных контурах останется один полный резонанс. При этом частные резонансы окажутся невозможными, поскольку вносимые реактивные сопротивления не могут скомпенсировать собственные реактивные сопротивления контуров. Как видно из

формул (4.83), (4.84), этому случаю соответствуют мнимые значения ξ_1 , ξ_2 и комплексные значения ω_1 , ω_2 .

Установим, какие типы резонансов получаются на частотах (4.84) при $\kappa > 1$. Для этого необходимо проверить, какие из условий (3.103), (3.104) выполняются для этих частот. При этом в указанных условиях под величиной X следует понимать входное сопротивление (4.81). Для этого сопротивления с помощью графиков рис. 4.28, а находим:

$$\begin{aligned} \omega < \omega_1 \rightarrow Z > X_{св}, 1 - X_{св}^2/Z^2 > 0, X < 0 \rightarrow X_{вх} < 0, \\ \omega_1 < \omega < \omega_0 \rightarrow Z < X_{св}, 1 - X_{св}^2/Z^2 < 0, X < 0 \rightarrow X_{вх} > 0, \\ \omega_0 < \omega < \omega_2 \rightarrow Z < X_{св}, 1 - X_{св}^2/Z^2 < 0, X > 0 \rightarrow X_{вх} < 0, \\ \omega > \omega_2 \rightarrow Z > X_{св}, 1 - X_{св}^2/Z^2 > 0, X > 0 \rightarrow X_{вх} > 0. \end{aligned}$$

В соответствии с найденными знаками сопротивления $X_{вх}$ на рис. 4.29, а показан характер изменения этого сопротивления. Таким образом, согласно условиям (3.103) частные резонансы на частотах ω_1 и ω_2 являются последовательными резонансами. Полный же резонанс на частоте ω_0 является параллельным резонансом, как следует из условий (3.104).

Подобно предыдущему, с помощью графиков рис. 4.28, б, в находим, что при $\kappa \leq 1$ в области резонансной частоты (4.85) сопротивление (4.81) удовлетворяет условиям (3.103). При этом лишь за счет влияния $X_{вн}$ усложняется характер изменения $X_{вх}$ по сравнению с изменением X , как показано на рис. 4.29, б. Таким образом, полный резонанс при связи, равной или меньшей критической, является последовательным резонансом.

Установив тип резонансов в связанных контурах, с помощью рис. 3.30 можно качественно построить графики изменения полного сопротивления $Z_{вх}$ связанных контуров. Такое построение сходно с качественным построением графика со-

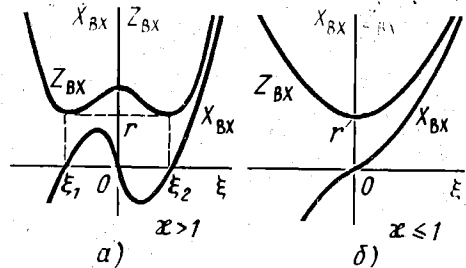


Рис. 4.29. Графики изменения полного сопротивления связанных контуров

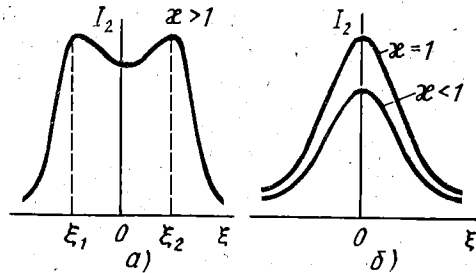


Рис. 4.30. Резонансные кривые связанных контуров

противления сложных контуров (см. § 4.4.2). Поскольку последовательному резонансу соответствует минимум полного сопротивления, а параллельному резонансу — его максимум, получаем трехэкстремальную кривую полного сопротивления при $\kappa > 1$ (рис. 4.29, а). Для случая же $\kappa \leq 1$ получаем график изменения полного сопротивления (рис. 4.29, б), подобный аналогичному графику для последовательного контура.

Интересно отметить, что в связанных контурах, содержащих четыре реактивных элемента, и в сложном контуре с таким же количеством реактивных элементов (см. рис. 4.17, в) получаются сходные графики изменения реактивного и полного сопротивлений контура (см. рис. 4.29, а и 4.18, в).

Зная характер изменения сопротивления связанных контуров (рис. 4.29), можно качественно построить графики изменения тока. Учитывая, что ток обратно пропорционален сопротивлению, получаем, например, частотные характеристики тока $I_2(\omega)$, или резонансные кривые для случаев $\kappa > 1$ (рис. 4.30, а) и $\kappa \leq 1$ (рис. 4.30, б).

Заметим, что ток I_2 во вторичном контуре при $\kappa < 1$ должен быть меньше тока при $\kappa = 1$, как показано на рис. 4.30, б. Это обусловлено уменьшением э. д. с., наводимой во вторичном контуре, когда связь становится слабее.

Чтобы указанные уменьшение тока I_2 и соответствующее уменьшение выходного напряжения $U_2 = Z_C I_2$ не были чрезмерными, связь между контурами ограничивают снизу. Практически используют значения фактора связи $\kappa > \kappa_{\min} = 0,1$.

4. Энергетические соотношения. Активная мощность, расходуемая на сопротивлении $r_{вн1}$ в эквивалентной схеме связанных контуров (см. рис. 4.26, а), имеет значение

$$P_{вн1} = r_{вн1} I_1^2 = r_2 (I_1 X_{св} / Z_2)^2 = r_2 I_2^2. \quad (4.86)$$

Здесь второе равенство получено на основании второй формулы (4.76), а последнее равенство — на основании формулы (3.137), из которой следует, что $I_2 = I_1 / n_1 = I_1 X_{св} / Z_2$.

Соотношения (4.86) означают, что *на вносимом в первичный контур диссипативном сопротивлении расходуется численно как раз та мощность P_2 , которая передается во вторичный контур.* Следовательно, здесь диссипативное вносимое сопротивление имеет определенный энергетический смысл, как и вносимое сопротивление (4.17), смысл которого определяется соотношениями (4.19). В рассматриваемом случае этот смысл заключается в том, что диссипативное вносимое сопротивление характеризует расход мощности в первичном контуре, происходящий за счет передачи энергии во вторичный контур.

Учитывая энергетический смысл вносимого сопротивления, на основании эквивалентной схемы связанных контуров (см. рис. 4.26, а) можно сделать вывод, что *условия первого частного резонанса (4.78) и полного резонанса (4.79) являются условиями передачи максимальной активной мощности во вторичный контур*

(см. § 3.4.2). При их выполнении в эквивалентной схеме связанных контуров, показанной на рис. 4.27, а, собственное сопротивление первичного контура r_1 можно рассматривать как внутреннее сопротивление источника. Вносимое же сопротивление может рассматриваться здесь как полезное нагрузочное сопротивление.

Таким образом, к. п. д. связанных контуров при резонансе и максимальная активная мощность, передаваемая во вторичный контур, должны изменяться в соответствии с рис. 3.41, где $R_n = r_{вн 1}$. Согласно критерию (3.149) указанная мощность имеет значение $\max_{\text{имит}} \max_{\text{огит}} (P_{2 \max \max})$ при соблюдении одного из следующих условий:

$$r_{вн 1} = X_{св}^2 r_2 / Z_2^2 = r_1, \quad r_{вн 1} = X_{св}^2 / r_2 = r_1. \quad (4.87)$$

Первое из этих условий относится к первому частному резонансу, а второе — к полному резонансу.

Активная мощность $P_{2 \max \max}$ может быть получена и при втором частном резонансе. Условие ее получения может быть найдено из второй эквивалентной схемы связанных контуров (см. рис. 4.27, б). В этой схеме роль внутреннего сопротивления источника э. д. с. играет вносимое сопротивление $r_{вн 2}$, а сопротивление r_2 является нагрузочным. При этом критерий (3.149) получения мощности $P_{2 \max \max}$ записывается в виде

$$r_2 = r_{вн 2} = X_{св}^2 r_1 / Z_1^2, \quad r_2 = r_{вн 2} = X_{св}^2 / r_1. \quad (4.88)$$

Здесь второе условие относится к полному резонансу.

Из условий (4.87), (4.88) видно, что мощность $P_{2 \max \max}$ передается во вторичный контур при любом виде резонанса, если соответствующим образом подобрана связь между контурами. *Связь, при которой получается мощность $P_{2 \max \max}$, называется оптимальной.* Оптимальное сопротивление связи определяется из соотношений (4.87), (4.88):

$$X_{св \text{ opt}}^I = Z_2 \sqrt{r_1 / r_2}, \quad X_{св \text{ opt}}^{II} = Z_1 \sqrt{r_2 / r_1}, \quad X_{св \text{ opt}} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (4.89)$$

Первое из этих равенств относится к первому частному резонансу, второе — ко второму частному резонансу, а третье — к полному резонансу.

При одинаковых контурах формулы (4.89) принимают вид

$$X_{св \text{ opt}}^I = X_{св \text{ opt}}^{II} = Z, \quad X_{св \text{ opt}} = r. \quad (4.90)$$

Любой из резонансов при оптимальной связи между контурами называют оптимальным или сложным резонансом.

Подставив в формулу (3.150) значение $R_i = r_1$, найдем активную мощность во вторичном контуре при оптимальном резонансе:

$$P_{2 \max \max} = E^2 / 4r_1.$$

Этой мощности соответствует ток во вторичном контуре

$$I_{2 \max \max} = \sqrt{P_{2 \max \max} / r_2} = E / 2 \sqrt{r_1 r_2} = E / 2r. \quad (4.91)$$

Такой же результат получается при использовании эквивалентной схемы рис. 4.27, б.

Последняя формула (4.91) относится к случаю одинаковых контуров, когда оптимальная связь определяется вторым равенством (4.90). Из этого равенства и формулы (4.75) следует, что $\kappa_{opt} = 1$. Таким образом, при одинаковых контурах оптимальная связь является критической, поскольку $\kappa_{кр} = 1$. Отсюда вытекает, что резонансный ток при $\kappa = \kappa_{кр} = 1$ на рис. 4.30, б является током (4.91).

Существенно отметить, что при полном резонансе в одинаковых контурах, когда этот резонанс достигается изменением частоты источника (см. рис. 4.28, б, в, 4.29, б и 4.30, б), оптимальный резонанс и наибольший ток (4.91) могут быть получены только путем подбора оптимальной связи в соответствии со вторым условием (4.90). В этом случае при частных резонансах, когда $\kappa > 1$ и выполняется второе равенство (4.82), оптимальный резонанс устанавливается автоматически при экстремальных расстройках $\xi = \xi_{1,2}$, как следует из рис. 4.28, а, 4.29, а и первого условия (4.90). Таким образом, максимальный ток на рис. 4.30, а является током (4.91).

5. Частотные и фазовые характеристики. Уравнения частотных и фазовых характеристик определяются значением коэффициента передачи связанных контуров. Этот коэффициент, который находят аналогично коэффициенту трансформации по напряжению для схемы трансформатора, может быть получен непосредственно из соотношения (3.138) путем соответствующего изменения обозначений:

$$K = \dot{U}/\dot{E} = \mp \underline{Z}_{св} \underline{Z}_{C2} / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{св}^2), \quad (4.92)$$

где $\underline{Z}_{св} = jX_{св}$; $\underline{Z}_{C2} = 1/j\omega C_2$; $\underline{Z}_1 = r_1(1 + jQ_1 v_1)$; $\underline{Z}_2 = r_2(1 + jQ_2 v_2)$.

Используя эти обозначения и определение (4.74), после несложных преобразований получаем

$$K = \mp \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{\sqrt{Q_1 Q_2 \kappa}}{1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 v_1 v_2 + j(Q_1 v_1 + Q_2 v_2)}. \quad (4.93)$$

Этому коэффициенту передачи соответствуют несимметричные характеристики $K(\omega)$, $\theta(\omega)$, использование которых нецелесообразно, так как они приводят к искажениям модулированных сигналов, нарушая симметрию их спектра. При необходимости эти характеристики следует рассчитывать с помощью ЭВМ, поскольку их анализ в общем виде является достаточно громоздким.

Практический интерес представляет случай одинаковойстройки контуров, когда $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$, $v_1 = v_2 = v$. При этом соотношение (4.93) упрощается:

$$K = \mp \sqrt{Q_1 Q_2 \kappa} / (1 + \kappa^2 - Q_1 Q_2 v^2 + j(Q_1 + Q_2)v). \quad (4.94)$$

Этому коэффициенту передачи соответствуют при малых расстройках симметричные характеристики $K(\omega)$, $\theta(\omega)$. Такие же симметричные характеристики получаются при одинаковых добротностях $Q_1 = Q_2 = Q$. При этом, используя обобщенную расстройку (3.116), представим коэффициент передачи (4.94) в виде

$$\underline{K} = \mp Q\kappa / (1 + \kappa^2 - \xi^2 + j2\xi). \quad (4.95)$$

Отсюда получаем уравнение частотной характеристики:

$$K = Q\kappa / \sqrt{(1 + \kappa^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2} = Q\kappa / \sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}. \quad (4.96)$$

Здесь второе равенство получено перегруппировкой слагаемых после раскрытия скобок.

Из уравнения (4.96) видно, что частотные характеристики повторяют форму резонансных кривых, построенных качественно на рис. 4.30. В частности, при расстройках (4.83), когда $\kappa > 1$, из уравнения (4.96) получаем следующие значения коэффициента передачи:

$$K|_{\xi = \xi_{1,2}} = K_{\max \max} = Q/2, \quad K|_{\xi = \xi_0} = K_0 = Q\kappa / (1 + \kappa^2) \leq K_{\max \max}. \quad (4.97)$$

Соотношения (4.97) свидетельствуют о наличии у частотной характеристики двух «горбов» при экстремальных расстройках $\xi = \xi_{1,2}$, когда $\kappa > 1$. Такие характеристики называют *двугорбыми*. Они полностью соответствуют двугорбой резонансной кривой на рис. 4.30, а. При этом значение $K_{\max \max}$ получается при токе $I_{2 \max \max}$, а значение K_0 определяет минимум частотной характеристики. С ростом κ этот минимум уменьшается и достигает значения $Q/2\sqrt{2} = K_{\max \max}/\sqrt{2}$ при $\kappa = \kappa_{\max} = 1 + \sqrt{2} = 2,41$.

При $\kappa \leq 1$ частотные характеристики имеют только один максимум $K_{\max} = K_0$ («горб»), определяемый вторым соотношением (4.97), где неравенство переходит в равенство при $\kappa = 1$. Из этого соотношения и уравнения (4.96) видно, что одnogорбые частотные характеристики подобны одnogорбым резонансным кривым на рис. 4.30, б. В частности, значение максимума таких характеристик становится меньше при уменьшении κ .

Рассмотрим частотные характеристики в относительном масштабе. Такие характеристики находим из соотношений (4.96), (4.97):

$$A|_{\kappa \geq 1} = K/K_{\max \max} = 2\kappa / \sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}, \quad (4.98)$$

$$A|_{\kappa \leq 1} = K/K_{\max} = K/K_0 = (1 + \kappa^2) / \sqrt{(1 - \kappa^2 + \xi^2)^2 + 4\kappa^2}. \quad (4.99)$$

Обобщенные частотные характеристики, построенные по этим уравнениям, показаны на рис. 4.31, а, б. Здесь же для сравнения изображена пунктирной линией частотная характеристика одиночного контура (рис. 4.31, б).

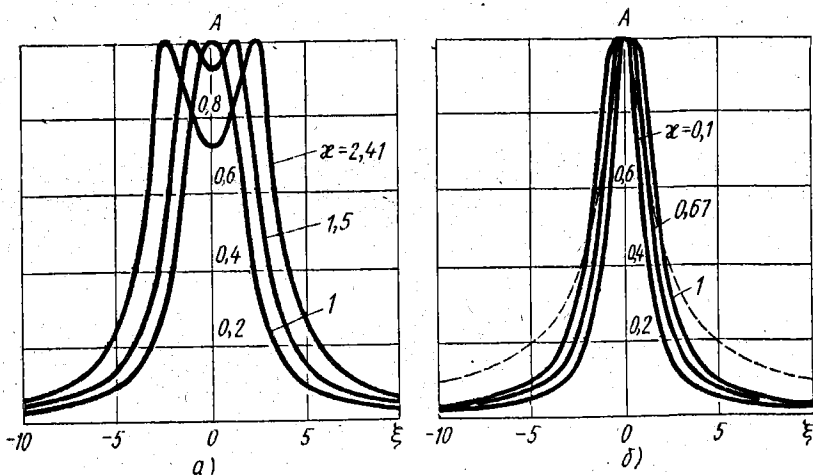


Рис. 4.31. Частотные характеристики связанных контуров

Рассмотрим теперь фазовые характеристики одинаковых связанных контуров. Из соотношения (4.95) находим уравнение фазовой характеристики:

$$\theta = \theta_0 - \arctg 2\xi / (1 + \kappa^2 - \xi^2),$$

где

$$\theta_0 = \theta |_{\xi=0} = \arg(\mp 1) = \begin{cases} \pi \\ 0 \end{cases},$$

— резонансная фаза связанных контуров.

Отсюда определяется относительная фаза связанных контуров:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = -\arctg 2\xi / (1 + \kappa^2 - \xi^2). \quad (4.100)$$

Фазовые характеристики связанных контуров, построенные по уравнению (4.100), показаны на рис. 4.32. Эти характеристики симметричны в области малых расстроек, как и фазовые характеристики (4.15), (4.36). При $\kappa \leq 1$ в полосе пропускания они значительно меньше отклоняются от прямой линии, чем фазовые характеристики (4.15) одиночного контура. Однако с ростом фактора связи нелинейность фазовых характеристик увеличивается. При $\kappa = 2,41$ отклонение фазовой характеристики от прямой линии получается существенно больше, чем у одиночного контура.

6. Полоса пропускания. Поскольку при разной связи частотные характеристики описываются различными уравнениями (4.98) и (4.99), для полосы пропускания в этих случаях получаются неодинаковые формулы. Эти формулы можно найти из уравнений, образованных приравнованием коэффициентов пере-

дачи (4.98), (4.99) величине $A = A_r = 1/\sqrt{2}$. Отсюда становится ясным, что упомянутое ранее значение $\kappa = \kappa_{\max}$ не должно превышать, чтобы впадина двухгорбой частотной характеристики не опускалась ниже уровня отсчета полосы пропускания.

Решив полученные уравнения, с учетом формулы (4.22) находим нормированное значение полосы пропускания связанных контуров $\xi_r = \Delta F_{св} / \Delta F$, где ΔF — полоса пропускания (4.21) одиночного контура:

$$\xi_r \Big|_{\kappa \geq 1} = \sqrt{\kappa^2 + 2\kappa - 1},$$

$$\xi_r \Big|_{\kappa \leq 1} = \sqrt{2(1 + \kappa^4) - (1 - \kappa^2)}. \quad (4.101)$$

Зависимость нормированной полосы пропускания связанных контуров от фактора связи показана на рис. 4.33. Из этого графика и формул (4.101) видно, что при изменении фактора связи в пределах $\kappa_{\min} \leq \kappa \leq \kappa_{\max}$ нормированная полоса пропускания меняется от $\xi_{r \min} = \xi_r \Big|_{\kappa = 0,1} = 0,65$ до $\xi_{r \max} = \xi_r \Big|_{\kappa = 2,41} = 3,1$, т. е.

$\xi_{r \max} / \xi_{r \min} = 4,77$ при $\kappa_{\max} / \kappa_{\min} = 24,1$. В частности, при $\kappa = 0,67$ получается $\xi_r = 1$, т. е. полосы пропускания связанных контуров и такого же одиночного контура получаются одинаковыми.

Пользуясь графиком рис. 4.33, не следует забывать, что фактор связи (4.75) зависит не только от коэффициента связи, но и от добротности контуров, причем от этих двух параметров абсолютное значение $\Delta F_{св}$ зависит различным образом. Если фактор связи увеличивается за счет возрастания коэффициента связи, то $\Delta F = \text{const}$ и полоса пропускания связанных контуров расширяется в соответствии с графиком рис. 4.33. Если же фактор связи увеличивается за счет возрастания добротности, то ширина полосы пропускания $\Delta F_{св} = \xi_r \Delta F$ уменьшается. Это происходит за счет уменьшения полосы пропускания (4.21) одиночного контура, которое происходит быстрее, чем увеличение параметра ξ_r .

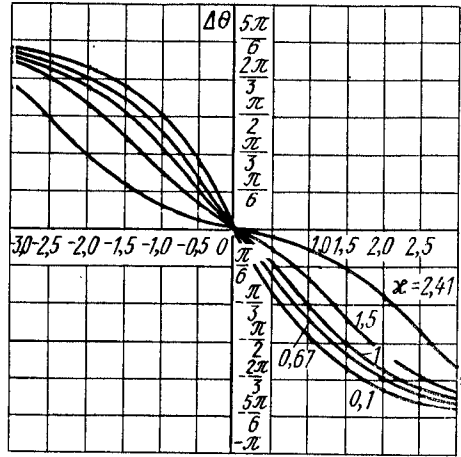


Рис. 4.32. Фазовые характеристики связанных контуров

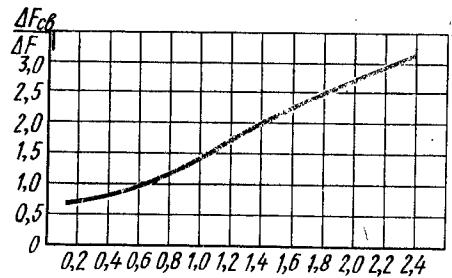


Рис. 4.33. График зависимости нормированной полосы пропускания связанных контуров от фактора связи

Например, при увеличении Q и κ в 24,1 раза полоса пропускания (4.21) уменьшается во столько же раз, а параметр ξ_0 увеличивается при этом только в 4,77 раза, как отмечалось выше. Таким образом, указанному увеличению добротности и фактора связи соответствует уменьшение полосы пропускания $\Delta F_{св}$ в $24,1/4,77 \approx 5,05$ раза.

7. Избирательность. Сравнение частотных характеристик одиночного и связанных контуров на рис. 4.31, б показывает, что избирательность связанных контуров получается лучше, поскольку при больших расстройках помехи ослабляются сильнее. Для количественной оценки селективности связанных контуров определим для них коэффициент прямоугольности (4.23). При определении $\xi_0 \gg 1$ в уравнениях (4.98), (4.99) можно пренебречь под радикалом всеми слагаемыми по сравнению с $\xi^4 = \xi_0^4$. Тогда с достаточной точностью определяется значение ξ_0 , соответствующее заданному ослаблению $H_0 = 1/A_0 \gg 1$:

$$\xi_0 |_{\kappa \gg 1} = \sqrt{2\kappa H_0}, \quad \xi_0 |_{\kappa \leq 1} = \sqrt{(1 + \kappa^2)H_0}. \quad (4.102)$$

В соответствии с определением (4.23) из соотношений (4.101) и (4.102) находим

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{H_2} |_{\kappa \geq 1} = \sqrt{2\kappa H_0 / (\kappa^2 + 2\kappa - 1)}, \quad (4.103)$$

$$K_{\Pi \sqrt{2}}^{H_2} |_{\kappa \leq 1} = \sqrt{(1 + \kappa^2)H_0 / [\sqrt{2(1 + \kappa^4)} - (1 - \kappa^2)]}.$$

Таким образом, существенной особенностью связанных контуров в отличие от одиночного контура с коэффициентом прямоугольности (4.24) является не только более высокая избирательность (H_0 стоит под радикалом!), но и зависимость коэффициента прямоугольности от параметров схемы. График зависимости $K_{\Pi}(\kappa)$, построенный по формулам (4.103) для уровня ослабления $H_0 = 100$ ($a_0 = 40$ дБ), показан на рис. 4.34.

Увеличение избирательности связанных контуров по сравнению с одиночным контуром обусловлено, очевидно, увеличением числа контуров, ослабляющих помехи. Однако и селективность

связанных контуров является неудовлетворительной. Из рис. 4.34 видно, что даже наиболее высокая избирательность связанных контуров при $\kappa = \kappa_{\max} = 2,41$ характеризуется слишком большим коэффициентом прямоугольности $K_{\Pi} > 7$.

Естественным способом дальнейшего повышения избирательности является увеличение количества связанных контуров. При этом коэффициент прямоугольности уменьшается в соответствии

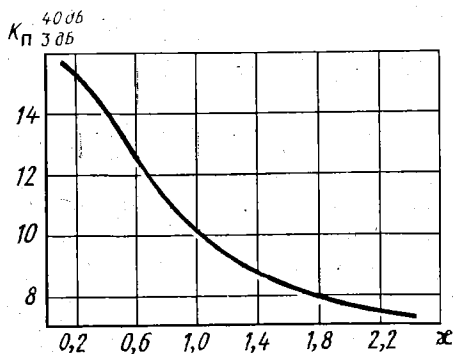


Рис. 4.34. Избирательность связанных контуров

с ростом числа контуров N . Обобщая формулы (4.24) и (4.103), получаем следующую зависимость:

$$K_{\Pi} = \alpha^N \sqrt{H_0}, \quad (4.104)$$

где α — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров контуров, в частности от коэффициента связи.

На рис. 4.35, *а* показана схема многоконтурной системы с трансформаторной связью между контурами, которой эквивалентны связанные контуры с внутреннеемкостной и внешнеемкостной связями, показанные соответственно на рис. 4.35, *б*, *в*. Здесь внутренние контуры показаны без потерь в предположении,

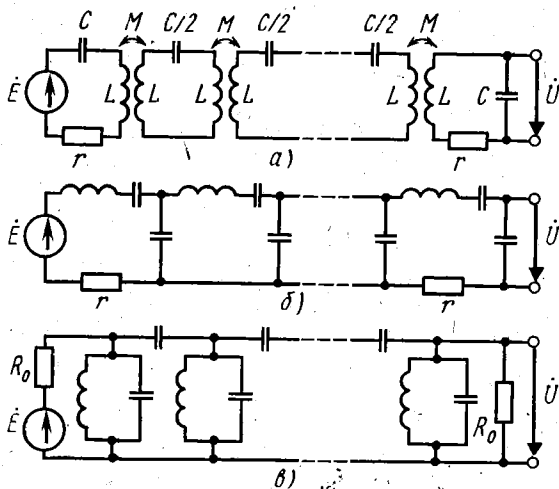


Рис. 4.35. Схемы многоконтурных фильтров из связанных контуров

что они являются пренебрежимо малыми. Такое пренебрежение потерями возможно в тех случаях, когда полоса пропускания связанных контуров ΔF и их параметры f_0 , Q удовлетворяют неравенству

$$Q\Delta F/f_0 > 15 \div 20. \quad (4.105)$$

Это условие не всегда можно соблюсти для электрических связанных контуров. Однако существуют электромеханические фильтры, которые имеют эквивалентные электрические схемы, показанные на рис. 4.35. Для них условие (4.105) выполняется с запасом. Такие фильтры рассматриваются ниже.

Согласно формулам (4.103), (4.104) селективность многоконтурных связанных систем (рис. 4.35) зависит от параметров контуров. При соответствующем выборе этих параметров избирательность связанных контуров получается наилучшей. Такая предельная избирательность характеризуется коэффициентами прямоугольности, расчетные значения которых приведены в

табл. П.4. Эти значения получены для связанных контуров с регулярной структурой, которая характеризуется, в частности, одинаковыми связями между контурами. Данные табл. П.3 подтверждают закономерность, выраженную в формуле (4.104).

Из табл. П.4 наглядно видно, что с ростом числа связанных контуров уменьшение коэффициента прямоугольности замедляется. С другой стороны, при большом числе контуров усложняется настройка связанных контуров. По этим и некоторым другим соображениям в электрических связанных контурах практически не используют больше трех-четырёх контуров, которые имеют удовлетворительную избирательность.

Если в связанных контурах используется не максимальная, а критическая связь, то их селективность становится меньше предельно возможной, но упрощается настройка контуров. Избирательность связанных контуров с критической связью характеризуется коэффициентами прямоугольности, расчетные значения которых приведены в табл. П.5.

Связанные контуры можно применять также в резонансных усилителях вместо одиночных нагрузочных контуров (см. рис. 4.15, а). Такие усилители называются *полосовыми*. Селективность полосового усилителя, как и резонансного, повышается с ростом числа каскадов.

Уравнение частотной характеристики N -каскадного полосового усилителя можно получить из соотношений (4.53) и (4.98):

$$H |_{\kappa \geq 1} = [\xi^4 - 2(\kappa^2 - 1)\xi^2 + (\kappa^2 + 1)^2]^{N/2} / (2\kappa)^N. \quad (4.106)$$

Решая это уравнение относительно ξ , находим ξ_r при $H = H_r = \sqrt{2}$ и ξ_0 при $H = H_0 \gg 1$. Отсюда в соответствии с определением (4.23) получаем коэффициент прямоугольности N -каскадного полосового усилителя:

$$K_{\text{ПЗдБ}}^{a_0} = K_{\text{П}\sqrt{2}}^{H_0} = \sqrt{\frac{\kappa^2 + 2\kappa\sqrt{\sqrt{N}H_0^2 - 1} - 1}{\kappa^2 + 2\kappa\sqrt{\sqrt{N/2} - 1} - 1}}. \quad (4.107)$$

Предельное значение избирательности полосовой усилитель имеет при максимальной связи между контурами. Исследуя на экстремум функцию (4.106), находим максимальный фактор связи, при котором провал в частотной характеристике достигает уровня $A = 1/\sqrt{2}$:

$$\kappa_{\text{max}} = \sqrt[2N]{2} + \sqrt{\sqrt[2N]{2} - 1}. \quad (4.108)$$

Раскрыв неопределенность в формуле (4.107) при $N \rightarrow \infty$ получим предельный коэффициент прямоугольности, который превышает единицу:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{\text{ПЗдБ}}^{a_0} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{a_0}{3}} \right)}. \quad (4.109)$$

Предельные значения коэффициентов прямоугольности N -каскадного полосового усилителя с $2N$ контурами, рассчитанные по формулам (4.107) — (4.109), приведены в табл. П.6.

На практике часто используют полосовые усилители с критической связью между контурами, которые проще в настройке. Для них формулы (4.107), (4.109) принимают вид

$$K_{\Pi} \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt{H_0^2 - 1}) / (\sqrt{2} - 1)},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{\Pi \text{ д.в.}} \frac{a_0}{3} = \sqrt[4]{\frac{a_0}{3}}. \quad (4.110)$$

Результаты расчета по формулам (4.110) сведены в табл. П.7. Таким образом, при критической связи между контурами избирательность полосового усилителя получается меньше предельной.

Вопросы для самоконтроля

- 4.1. Как изменяются частотные и фазовые характеристики последовательного контура при увеличении внутреннего сопротивления источника напряжения?
- 4.2. При каких условиях частотные и фазовые характеристики последовательного контура можно считать симметричными?
- 4.3. Как изменяется полоса пропускания последовательного и параллельного контуров при уменьшении внутреннего сопротивления источника напряжения?
- 4.4. Как изменяется полоса пропускания одиночного контура при подключении нагрузки?
- 4.5. Как изменяется полоса пропускания одиночного контура при увеличении нагрузочного сопротивления?
- 4.6. Как можно учесть в одиночном контуре одновременное влияние на полосу пропускания нагрузочного сопротивления и сопротивления утечки конденсатора?
- 4.7. Сколько эквивалентных схем можно построить для параллельного контура?
- 4.8. Какие безындуктивные параллельные контуры можно построить на основе их эквивалентных схем, представленных на рис. 4.10?
- 4.9. Почему в резонансном усилителе не применяется в качестве нагрузки последовательный контур?
- 4.10. Как можно повысить избирательность резонансного усилителя с заданным числом каскадов, не применяя в качестве нагрузки связанные контуры?
- 4.11. Почему в резонансном усилителе ослабление высших гармоник по току в индуктивной ветви контура получается в k^2 раз больше, чем в емкостной ветви?
- 4.12. Какой резонанс получается в сложном параллельном контуре с четырьмя реактивными элементами (см. рис. 4.17, в) при $L_1 C_1 = L_2 C_2$?
- 4.13. Чему равна частота последовательного резонанса в сложном контуре с подвижным контактом (см. рис. 4.21, а)?
- 4.14. Почему в четырехполюсниках связи коэффициенты трансформации по напряжению в режиме холостого хода являются вещественными величинами?
- 4.15. Как можно получить в связанных контурах полный резонанс, осуществив только две операции настройки контуров?
- 4.16. Как зависит от частоты ток I_1 в одинаковых связанных контурах при $x > 1$ и $x \leq 1$?
- 4.17. Как изменяется ток I_1 одинаковых связанных контуров при расстройке вторичного контура?
- 4.18. Чему равно резонансное сопротивление параллельного первичного контура в одинаковых связанных контурах при оптимальном резонансе?
- 4.19. Как с помощью уравнения (4.92) можно прийти к понятию сопротивлений, вносимых в первичный и вторичный контуры?

4.20. Какими двумя способами можно получить уравнение (4.92), не составляя уравнений по второму закону Кирхгофа, а используя лишь закон Ома?

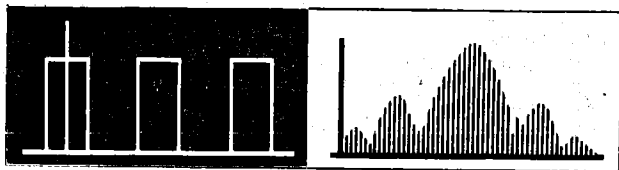
4.21. Что произойдет с полосой пропускания связанных контуров при $\kappa > 2,41$?

4.22. Как объясняется физически уменьшение коэффициента прямоугольности связанных контуров при увеличении фактора связи?

4.23. Почему в многоконтурном частотном фильтре (рис. 4.35, а) крайние и внутренние контуры имеют разные емкости (C и $C/2$)?

4.24. Как объясняется физически увеличение избирательности связанных контуров по сравнению с избирательностью каскадно соединенных контуров?

4.25. Почему избирательность полосового усилителя при критической связи между контурами получается меньше предельной?



Сигналы и их спектры

Любые цепи, используемые в устройствах электросвязи, предназначены для целенаправленной обработки сигналов. Один из видов такой обработки — селекция сигналов — рассмотрен на примере резонансных цепей. Однако и в этом простейшем случае для рассмотрения изменений, происходящих с сигналом в процессе селекции, требуется изучение свойств сигналов.

В § 1.3 было показано, что сложный сигнал может быть представлен в виде совокупности гармонических колебаний, которая называется спектром сигнала. Подобное представление часто упрощает анализ линейных цепей, которые подчиняются закону суперпозиции (см. § 1.4). Рассмотрение в линейных цепях вместо самих сигналов их спектров является одним из основных методов анализа процессов в линейных цепях.

§ 5.1. ВИДЫ СПЕКТРОВ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Спектры сигналов при всем их многообразии могут быть разделены на два основных вида — дискретные и сплошные. Они различаются между собой принципиально, хотя и имеют некоторые общие свойства. Возможны также некоторые разновидности названных спектров. В частности, суперпозиция сплошного и дискретного спектров образует смешанный спектр.

1. Дискретные спектры. *Дискретные спектры* (от лат. *discretus* — разделенный, прерывистый) состоят из дискретного ряда гармонических колебаний вида (1.20). Сигнал с дискретным спектром описывается выражением

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{k=0}^N U_{mk} \cos(\omega_k t + \psi_k) = \\
 &= U_0 + \sum_{k=1}^N U_{mk} \cos(\omega_k t + \psi_k),
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

где U_0 — постоянная составляющая, а число N может иметь как конечное, так и бесконечно большое значение.

Здесь имеется в виду дискретность по частоте, так что характерной особенностью данного ряда являются конечные интервалы между смежными спектральными составляющими: $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k > 0$. Сумма дискретных спектральных составляющих (5.1) образует сигнал бесконечной длительности.

Дискретные спектры можно изображать графически на временной диаграмме, как показано на рис. 5.1, а. Однако это неудобно и громоздко, особенно при большом числе спектральных составляющих. Поэтому принят другой способ изображения дискретных спектров.

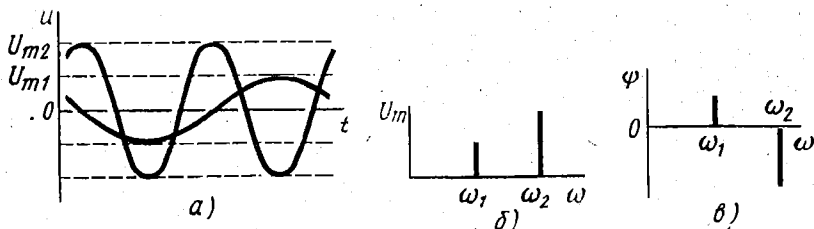


Рис. 5.1. Изображение дискретных спектров

Каждая из спектральных составляющих характеризуется частотой, амплитудой и начальной фазой. Поэтому графически дискретный спектр изображают в виде отрезков линий, высота и расположение которых на частотной оси определяют амплитуду, начальную фазу и частоту спектральных составляющих (рис. 5.1, б, в). Первый график называют спектром амплитуд (амплитудным спектром), а второй — спектром фаз (фазовым спектром). В соответствии с принятым изображением дискретные спектры называют также линейчатыми.

Ранее отмечалось, что спектральные составляющие могут быть измерены спектральными анализаторами (см. § 1.3.5), которые должны выделять отдельные спектральные составляющие. Для дискретного спектра это осуществимо, например, с помощью резонансных контуров с полосой пропускания $\Delta F < \Delta f_k = \Delta\omega_k/2\pi$. Однако полоса пропускания не может быть сколько угодно малой. При этом в узкой полосе частот $\Delta f \leq \Delta F$ находится несколько спектральных составляющих и измерения сводятся к определению мощности ΔP суммы спектральных составляющих в этой полосе частот $\Delta f = \Delta\omega/2\pi^*$. Тогда интенсивность спектра можно оценить не амплитудами спектральных составляющих, а энергетической спектральной плотностью в одном из двух вариантов:

$$S_s = \Delta P/\Delta\omega, \quad S_s = \sqrt{\Delta P/\Delta\omega}. \quad (5.2)$$

* В § 5.5.3 показано, что мощность ΔP равна сумме мощностей отдельных спектральных составляющих. Обычно мощность ΔP определяется на единичном сопротивлении ($R = 1 \text{ Ом}$).

Вторую формулу (5.2) используют с учетом того, что мощность пропорциональна квадрату амплитуды напряжения (тока). Оба определения (5.2) могут быть модифицированы заменой интервала $\Delta\omega$ интервалом Δf .

На разных частотах спектральная плотность получается различной: $S_s = S_s(\omega)$. Это обусловлено как различными амплитудами U_{mk} , так и различными интервалами $\Delta\omega_k$. Поэтому величину $S_s(\omega)$ называют также энергетической спектральной функцией (частоты). Эту функцию изображают графически непрерывной кривой, как показано на рис. 5.2. Таким образом, дискретные спектры могут рассматриваться и как непрерывные функции частоты.

2. Гармонические спектры. В частном случае дискретные спектры могут состоять из гармонических колебаний с кратными частотами

$$\omega_k = k\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (5.3)$$

где $\Omega = 2\pi F = 2\pi/T$ — некоторая фиксированная частота, которой соответствует временной интервал T .

Спектральные составляющие с кратными частотами называются гармониками сигнала (см. § 1.4.1), а дискретный спектр, состоящий из гармоник (рис. 5.3), — гармоническим спектром. Условие кратности частот произвольных гармоник ω_k и ω_l имеет вид

$$\omega_k/\omega_l = f_k/f_l = k/l. \quad (5.4)$$

Гармонический спектр может включать и постоянную составляющую, как показано на рис. 5.3.

Если в гармоническом спектре отсутствуют те или иные гармоники, то интервалы $\Delta\omega_k$ между смежными спектральными составляющими получаются неодинаковыми, но спектр остается гармоническим. Например, спектр из трех гармонических колебаний с частотами 250, 700 и 900 Гц является гармоническим, поскольку указанные частоты удовлетворяют условию (5.4).

Из условия (5.3) следует, что периоды гармоник $T_k = 1/f_k = 2\pi/\omega_k$ связаны с временным интервалом T соотношением

$$T = kT_k. \quad (5.5)$$

Это означает, что в интервале T укладывается целое число периодов T_k любой k -й гармоники. Следовательно, при сложении

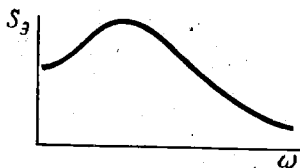


Рис. 5.2. Изображение энергетической спектральной функции

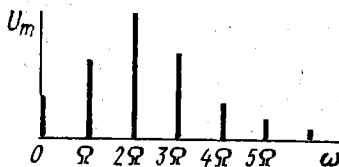


Рис. 5.3. Изображение дискретного гармонического спектра

всех гармоник получается сигнал $u(t)$, значения которого повторяются через время T . Таким образом, гармонические спектры присущи периодическим сигналам $u(t) = u(t + T)$ с периодом (5.5) и частотой $F = 1/T$.

Периодический сигнал является бесконечно протяженным во времени, как и гармонические колебания (см. § 1.2.3), поскольку он имеет повторяющиеся значения при любом t в интервале $[-\infty, \infty]$.

Сигналы с дискретным негармоническим спектром также являются бесконечно протяженными во времени, как и их гармонические спектральные составляющие. Такие сигналы называют квазипериодическими в отличие от непериодических сигналов, спектры которых не являются дискретными. Чтобы сигнал с дискретным спектром являлся квазипериодическим, частоты его спектральных составляющих не должны удовлетворять условию (5.4). Это наблюдается, в частности, при отношении указанных частот, равном иррациональному числу. Такое отношение частот может быть, например, у АМ-сигналов.

Соотношение (5.1) для периодических сигналов с учетом равенства (5.3) может быть переписано в виде ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\Omega t - \psi_k). \quad (5.6)$$

Здесь начальная фаза $-\psi_k$ обозначена с отрицательным знаком, чтобы ряд (5.6) удобно представлялся через косинусоидальные и синусоидальные составляющие:

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\Omega t, \quad (5.7)$$

где

$$A_0 = 2U_0, \quad A_k = U_{mk} \cos \psi_k, \quad B_k = U_{mk} \sin \psi_k, \quad (5.8)$$

так что

$$U_0 = \frac{A_0}{2}, \quad U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \psi_k = \text{Arctg} \frac{B_k}{A_k}. \quad (5.9)$$

Реальные периодические сигналы $u(t + T)$ всегда удовлетворяют условиям Дирихле, а именно: а) период T может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $u(t)$ непрерывна и монотонна; б) в любой точке разрыва функции $u(t)$ существуют конечные пределы $u(t-0)$ и $u(t+0)$. Для таких сигналов, как известно из курса математики, ряд Фурье (5.7) сходится к значению сигнала в точках непрерывности и дает в точках разрыва значения $u(t) = [u(t-0) + u(t+0)]/2$, если коэффициенты Фурье (5.8) определяются по формулам Эйлера:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos k\Omega t dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin k\Omega t dt. \quad (5.10)$$

По своему физическому смыслу постоянная составляющая U_0 является средним за период значением $u(t)$:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt. \quad (5.11)$$

Принятое для этой составляющей обозначение (5.9) делает первую формулу (5.10) пригодной и для определения коэффициента A_0 , поскольку из этих соотношений вытекает равенство (5.11).

Если воспользоваться известной формулой $\cos\Phi = (e^{j\Phi} + e^{-j\Phi})/2$, то ряд Фурье (5.6) можно представить в комплексной форме:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{mk} e^{jk\Omega t}. \quad (5.12)$$

Здесь согласно формуле Эйлера (3.1) и соотношениям (5.8) — (5.10)

$$\dot{U}_{mk} = U_{mk} e^{-j\psi_k} = A_k - jB_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jk\Omega t} dt, \quad (5.13)$$

причем

$$\dot{U}_{m0} = U_{m0} = 2U_0, \quad U_0 = A_0/2 = U_{m0}/2, \quad \psi_0 = 0. \quad (5.14)$$

Соотношения (5.12), (5.13) охватывают не только постоянную составляющую с частотой $\omega_0 = 0 \cdot \Omega = 0$, но и спектральные составляющие с отрицательными частотами $\omega_{-k} = -k\Omega$. Понятие отрицательных частот соответствует представлению гармонических колебаний не в виде одного вращающегося вектора, как в символическом методе (см. рис. 3.2, а), а в виде двух симметричных векторов, вращающихся в противоположных направлениях (рис. 5.4). Нижний вектор на рис. 5.4, вращающийся в отрицательном направлении, как раз и соответствует отрицательной частоте ω_{-k} . Хотя эта частота является условным понятием, при использовании комплексного ряда Фурье (5.12) спектр сигнала надо формально изображать и в области отрицательных частот, как показано на рис. 5.5.

Симметрия векторной диаграммы рис. 5.4 может быть описана следующим образом:

$$U_m(-k\Omega) = U_m(k\Omega), \quad (5.15)$$

$$\psi(-k\Omega) = -\psi(k\Omega),$$

или

$$U_{m(-k)} = U_{mk}, \quad \psi_{-k} = -\psi_k. \quad (5.15')$$

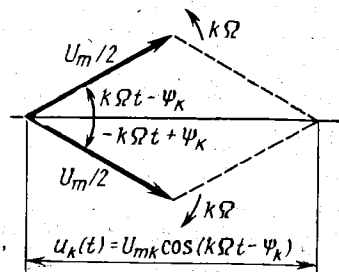


Рис. 5.4. Представление гармонических колебаний двумя вращающимися векторами

Соотношения (5.15) означают также четную симметрию спектра

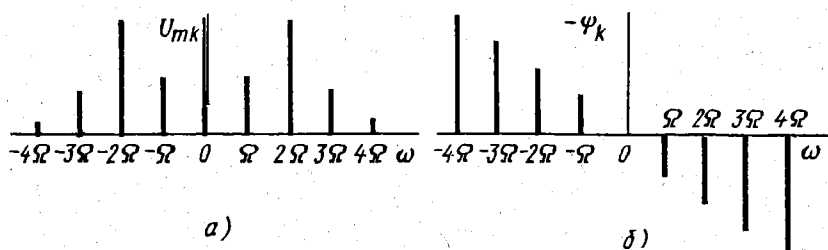


Рис. 5.5. Изображение комплексного гармонического спектра

амплитуд и нечетную симметрию спектра фаз, что отражено соответственно на рис. 5.5, а, б. Равенства (5.15') определяют значения параметров с отрицательными индексами.

Если в соотношениях (5.2) принять $\Delta\omega = \Omega$, то понятие энергетической спектральной плотности можно распространить на периодические сигналы. При этом на интервале Ω находится только одна гармоника, и вместо суммарной мощности спектральных составляющих следует рассматривать мощность одной гармоники. Следовательно, спектральная плотность, определяемая по второй формуле (5.2), получается пропорциональной амплитудам U_m соответствующих гармоник. Таким образом, приходим к понятию *спектральной плотности по напряжению*:

$$S = U_m / \Omega. \quad (5.16)$$

Перейдем в этом равенстве от вещественной к комплексной амплитуде: $U_m \rightarrow \dot{U}_m$. При этом, используя интеграл (5.13), сделаем в нем переход от дискретных частот к текущей частоте: $k\Omega \rightarrow \omega$. Тогда вместо вещественной спектральной плотности (5.16) получим *комплексную спектральную функцию* от частоты ω :

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{U}_m(\omega)}{\Omega} = S(\omega)e^{-j\psi(\omega)} = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.17)$$

В этом случае вместо дискретных спектров амплитуд (рис. 5.5, а) и фаз (рис. 5.5, б) будем изображать непрерывные

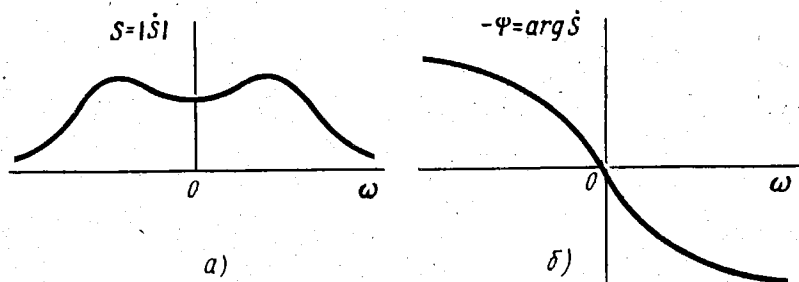


Рис. 5.6. Изображение комплексной спектральной функции

графики частотной зависимости модуля и аргумента комплексной спектральной функции (5.17), как показано соответственно на рис. 5.6, а, б. Эти графики также называют амплитудным и фазовым спектрами.

3. Сплошные спектры. Сигналы с дискретными (в том числе с гармоническими) спектрами являются бесконечно протяженными во времени. Такие сигналы в известном смысле идеализированы. *Реальные сигналы всегда имеют конечную длительность.* Поэтому они, в частности, не являются периодическими сигналами.

Однако если рассматривать бесконечный временной интервал, то любой сигнал конечной длительности можно условно считать повторяющимся на бесконечности. Поскольку же признаком периодичности сигнала является его повторяемость через интервал T , сигнал конечной длительности можно рассматривать как периодический сигнал с периодом $T \rightarrow \infty$.

Отсюда вытекает, что спектр сигнала конечной длительности содержит спектральные составляющие, интервал между которыми $\Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$. Такой спектр с бесконечно малыми интервалами между смежными спектральными составляющими называют сплошным. Следовательно, сигналы конечной длительности имеют сплошные спектры.

Сплошной спектр на любом конечном частотном интервале содержит бесконечное множество спектральных составляющих. Если бы эти составляющие имели конечные амплитуды, их суммарная мощность на любом конечном частотном интервале была бы бесконечно велика; поскольку бесконечная сумма конечных величин равна бесконечности. Это лишено физического смысла. Однако из формул (5.10) и (5.9) следует, что в случае сплошного спектра амплитуды спектральных составляющих бесконечно малы: $U_m |_{T \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

При бесконечно малых значениях амплитуды U_m и интервала Ω спектральная плотность (5.16) остается конечной величиной. Поэтому описание сплошного спектра возможно с помощью спектральной функции (5.17), если при $T \rightarrow \infty$ принять $\Omega = d\omega$ и $\dot{U}_m = dU_m e^{-i\psi}$:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{dU_m(\omega)}{d\omega} e^{-j\psi(\omega)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.18)$$

Здесь

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) e^{-j\psi(\omega)} = S_A(\omega) - jS_B(\omega), \quad (5.19)$$

$$S(\omega) = |\dot{S}(\omega)| = \sqrt{S_A^2(\omega) + S_B^2(\omega)}, \quad (5.20)$$

$$-\psi(\omega) = \arg \dot{S}(\omega) = -\text{Arctg} S_B(\omega)/S_A(\omega),$$

$$S_A(\omega) = S(\omega) \cos \psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt, \quad (5.21)$$

$$S_B(\omega) = S(\omega) \sin \psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt.$$

При принятых обозначениях соотношения (5.19) — (5.21) вытекают из формул (5.8) — (5.10).

Равенство (5.18) известно как прямое интегральное преобразование (интеграл) Фурье, а величина $\hat{S}(\omega)$ называется спектральной функцией. Ей соответствует спектральная плотность $S(\omega) = dU_m(\omega)/d\omega$, а также дифференциальная форма энергетической спектральной плотности $S_s(\omega) = dP(\omega)/d\omega$ (или $dP(f)/df$). Для краткости будем говорить о спектре $S(\omega)$, подразумевая под этим сплошной спектр, описываемый спектральной функцией $\hat{S}(\omega)$.

Преобразование Фурье (5.18) является однозначным: заданному сигналу $u(t)$ соответствует единственное значение спектральной функции $\hat{S}(\omega)$. Справедливо и обратное утверждение: заданной спектральной функции $\hat{S}(\omega)$ соответствует единственное значение сигнала $u(t)$. Такую взаимную однозначность (свойство взаимности преобразований) будем обозначать следующим образом:

$$u(t) \doteq \hat{S}(\omega). \quad (5.22)$$

Свойства симметрии спектра (5.15) остаются справедливыми для модуля и аргумента спектральной функции:

$$S(-\omega) = S(\omega), \quad \psi(-\omega) = -\psi(\omega). \quad (5.23)$$

Из формул (5.23) и (5.21) вытекают также свойства четной симметрии вещественной части спектральной функции и нечетной симметрии ее мнимой части:

$$S_A(-\omega) = S_A(\omega), \quad S_B(-\omega) = -S_B(\omega). \quad (5.24)$$

Учитывая свойства симметрии спектра (5.23) и (5.24), его можно изображать только в области положительных частот.

Интегральное преобразование Фурье является линейным. Это означает, что при $u_1(t) \doteq \hat{S}_1(\omega)$ и $u_2(t) \doteq \hat{S}_2(\omega)$ справедливо свойство линейности:

$$u(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t) \doteq \hat{S}(\omega) = A_1 \hat{S}_1(\omega) + A_2 \hat{S}_2(\omega), \quad (5.25)$$

где A_1 и A_2 — произвольные константы.

Справедливость этого соотношения доказывается его подстановкой в формулу (5.18) с учетом свойства (5.22).

Сплошные спектры присущи и некоторым бесконечным, а также «полубесконечным» сигналам, ограниченным по времени с одной стороны. К сигналам «полубесконечной» длительности относится, например, экспоненциальный сигнал (рис. 5.7, а):

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

где $\beta > 0$.

Спектральная функция (5.18) сигнала (5.26) определяется соотношениями

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} dt = -\frac{1}{\pi(\beta + j\omega)} e^{-(\beta + j\omega)t} \Big|_0^{\infty},$$

или

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\pi(\beta + j\omega)}, \quad S(\omega) = \frac{1}{\pi\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}, \quad -\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta}. \quad (5.27)$$

Частотные зависимости функций (5.27) показаны на рис. 5.7, б.

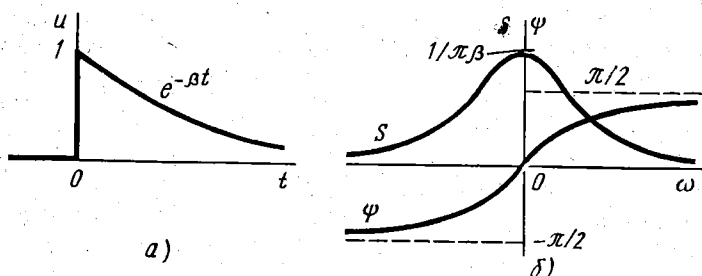


Рис. 5.7. Экспоненциальный сигнал и его спектр

4. Смешанные спектры. Выше отмечалась возможность существования смешанного спектра, состоящего из сплошного спектра и дискретных спектральных составляющих. Примером сигналов, имеющих такой спектр, является единичный скачок (рис. 5.8, а):

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Этот сигнал, называемый также функцией включения, играет важную роль в технике связи. С его помощью могут описываться сигналы при коммутации (включении и выключении) цепей. Например, экспоненциальный сигнал (5.21), который как бы включается в нулевой момент времени, достаточно просто описывается с помощью единичного скачка (5.28): $u(t) = 1(t)e^{-\beta t}$.

Отсюда видно, что экспоненциальный сигнал (5.26) превращается в единичный скачок при $\beta = 0$. Поэтому сплошной спектр единичного скачка описывается соотношениями (5.27) при $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= 1/j\pi\omega, \\ S(\omega) &= 1/\pi\omega, \\ -\psi(\omega) &= \mp \pi/2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

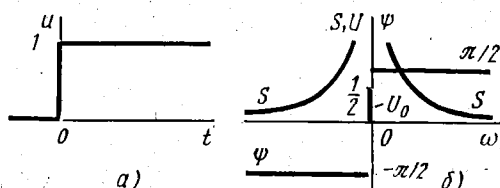


Рис. 5.8. Единичный скачок и его спектр

Однако единичный скачок имеет и постоянную составляющую, которая является дискретной составляющей его спектра. Она может быть найдена из соотношения (5.11), в котором после интегрирования на произвольном интервале $[-T/2, T/2]$ надо сделать предельный переход к значению U_0 при $T \rightarrow \infty$:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1(t) dt \Big|_{T \rightarrow \infty} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt \Big|_{T \rightarrow \infty},$$

или

$$U_0 = 1/2. \quad (5.30)$$

Таким образом, *полный спектр единичного скачка является смешанным*, включая в себя дискретную спектральную составляющую (5.30) и сплошной спектр, описываемый спектральной функцией (5.29). Этот спектр показан на рис. 5.8, б. Составляющие (5.29), (5.30) смешанного спектра имеют разный физический смысл и неодинаковую размерность. Поэтому их нельзя складывать непосредственно друг с другом.

5. Ширина спектра. Из предыдущего рассмотрения следует, что в общем случае спектр сигнала занимает бесконечный интервал частот $[0, \infty]$. При этом определение ширины спектра (1.22) нуждается в установлении критериев, по которым могут быть определены граничные частоты спектра f_{\min} и f_{\max} .

Любой реальный сигнал с конечной длительностью τ обладает конечной полной энергией W и имеет на интервале τ некоторую среднюю мощность $\bar{p} = P = W/\tau$. Эта мощность равна суммарной мощности спектральных составляющих сигнала, которая может быть найдена через энергетическую спектральную

плотность $S_s(f) = \frac{dP(f)}{df}$:

$$P = \frac{W}{\tau} = \int_0^{\infty} S_s(f) df. \quad (5.31)$$

Если бы спектральная плотность $S_s(f)$ была конечной величиной во всем интервале частот $[0, \infty]$, то интеграл (5.31) имел бы бесконечно большое значение. Отсюда следует, что *спектральная плотность может иметь конечное значение только в ограниченном частотном диапазоне*, за пределами которого она должна стремиться к нулю.

Таким образом, всегда имеется вполне определенный ограниченный интервал частот $[f_{\min}, f_{\max}]$, в котором сосредоточена подавляющая часть мощности (5.31). Задавшись относительной величиной $\epsilon = 0,9 \div 0,99$ этой части мощности, можно найти указанный интервал частот ΔF_{ϵ} , который определяет *ширину спектра в энергетическом смысле*:

$$\epsilon P = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_s(f) df, \quad \Delta F_{\epsilon} = f_{\max} - f_{\min}. \quad (5.32)$$

Такое определение ширины спектра является довольно громоздким. Во многих случаях оно возможно только с помощью ЭВМ. Далее будут рассмотрены упрощенные способы аналитического определения ширины спектра (см. § 5.4.2).

При ограничении ширины бесконечного спектра конечным интервалом частот ΔF_{c3} , пренебрегают спектральными составляющими, лежащими за пределами этого интервала. За счет отбрасывания указанных составляющих сигналы претерпевают искажения. Однако они не связаны непосредственно с энергетическими соотношениями, использованными в критерии (5.32). Поэтому наиболее объективным является определение ширины спектра, при котором ограничение спектра не приводит к искажениям сигнала, превышающим допустимую величину. Определение граничных частот спектра по этому критерию также требует расчетов на ЭВМ.

6. Связь ширины спектра с длительностью сигнала. Важным свойством спектра является связь его ширины с длительностью сигнала. Для доказательства существования такой связи рассмотрим среднюю спектральную плотность

$$S_{30} = \frac{\varepsilon P}{\Delta F_{c3}}. \quad (5.33)$$

Согласно определениям (5.32), (5.33) величины $S_3(f)$ и S_{30} ограничивают на спектральной диаграмме равновеликие площади. На рис. 5.9, а эти площади показаны соответственно вертикальной и горизонтальной штриховками.

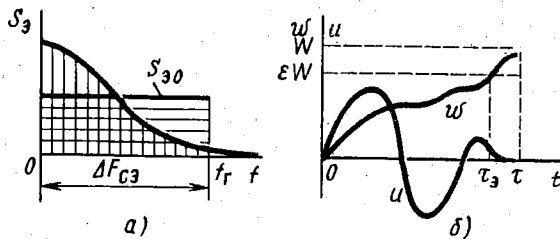


Рис. 5.9. Энергетическое определение ширины спектра и длительности сигнала

Из формулы (5.31) видно, что $\varepsilon P = \varepsilon W / \tau$, т. е. получается усреднение неполной энергии сигнала εW на интервале τ . Это нелогично, как видно из рис. 5.9, б, где показано текущее значение энергии $w(t)$ сигнала $u(t)$. Энергия w , рассеиваемая, например, на некоторой проводимости G , может быть определена по формулам (1.5) и (2.4). Возрастая неравномерно, но монотонно с течением времени, энергия $w(t)$ достигает значения W к моменту времени τ , а значение $\varepsilon W < W$ достигается к моменту времени $\tau_3 < \tau$. Поэтому и усреднение энергии εW надо производить

на интервале τ_s , который может быть назван энергетической длительностью сигнала. При таком усреднении получаем

$$\epsilon P = \epsilon W / \tau = \alpha \epsilon W / \tau_s, \quad (5.34)$$

где $\alpha = \tau_s / \tau$ — коэффициент, зависящий от формы сигнала и выбранного значения ϵ .

Для сигнала с заданной формой и длительностью τ изменение его энергии W приводит к пропорциональному изменению мощности (5.32) и средней спектральной плотности (5.33), поскольку при этом ширина спектра ΔF_{cs} не изменяется. Поэтому величина (5.33) и энергия ϵW , соответствующая полосе ΔF_{cs} , пропорциональны друг другу:

$$\epsilon W = \beta S_{s0}, \quad (5.35)$$

где β — коэффициент, зависящий от формы сигнала $u(t)$ и выбранного значения ϵ .

Таким образом, для любого сигнала заданной формы из соотношений (5.33) — (5.35) находим связь между длительностью сигнала и шириной его спектра:

$$\tau_s \Delta F_{cs} = \alpha \beta = C_s. \quad (5.36)$$

Здесь C_s — константа, которая имеет разные значения для сигнала различной формы и называется *базой этих сигналов*.

Свойство (5.36) играет существенную роль при выборе параметров сигналов. Длительность сигнала необходимо уменьшать, чтобы за единицу времени можно было передать по каналу связи большее количество информации. С другой стороны, ширину спектра также целесообразно уменьшать. Это позволит разместить в отведенном частотном диапазоне большее число каналов связи и облегчит борьбу с помехами.

Указанные требования к параметрам сигнала являются противоречивыми, так как согласно свойству (5.36) *при уменьшении длительности сигнала заданной формы ширина его спектра возрастает*. Поэтому остается альтернативный выбор между уменьшением τ_s или ΔF_{cs} . Можно также использовать сигналы с минимальными значениями константы C_s , если это допустимо.

7. Полюсы спектральной функции. При рассмотрении спектральных функций удобно пользоваться понятием *мнимой частоты* $p = j\omega$, называемой также *мнимым оператором*. При этом спектральная функция (5.18) является вещественной функцией от p :

$$\hat{S}(\omega) = S(j\omega) = S(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt. \quad (5.37)$$

Например, спектральная функция (5.27) при использовании формы (5.37) имеет вид рациональной вещественной функции:

$$S(p) = 1 / \pi(p + \beta). \quad (5.38)$$

Эта функция обращается в бесконечность на частоте $p_1 = -\beta$, которая называется полюсом спектральной функции.

При этом говорят также о полюсе спектральной функции в точке p_1 . Таких полюсов может быть несколько. Пусть спектральная функция (5.37) состоит из двух слагаемых вида (5.38):

$$S(p) = \frac{A_1}{\pi(p + \beta_1)} + \frac{A_2}{\pi(p + \beta_2)} = \frac{Ap + B}{\pi(p + \beta_1)(p + \beta_2)} = \frac{Ap + B}{\pi(p^2 + \alpha p + \beta)}, \quad (5.39)$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, $\beta = \beta_1\beta_2$, $A = A_1 + A_2$, $B = A_1\beta_2 + A_2\beta_1$.

В силу свойства (5.25) спектральной функции (5.39) соответствует сигнал, являющийся взвешенной суммой двух экспонент вида (5.26):

$$u(t) = 1(t)(A_1 e^{-\beta_1 t} + A_2 e^{-\beta_2 t}). \quad (5.40)$$

Спектральная функция (5.39) имеет два полюса в точках $p_1 = -\beta_1$ и $p_2 = -\beta_2$. В общем случае спектральная функция $S(p)$ имеет полюсы в n точках p_k ($k = 1, 2, \dots, n$). При этом по аналогии с выражением (5.39) она может иметь следующий вид:

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \frac{F_1(p, p_1, p_2, \dots, p_n)}{\pi F_2(p)}. \quad (5.41)$$

Здесь F_1 — некоторая полиномиальная функция от p ,

$$F_2(p) = \prod_{k=1}^n (p - p_k) = \sum_{k=0}^n a_k p^k, \quad (5.42)$$

значения p_k являются корнями уравнения

$$F_2(p) = 0, \quad (5.43)$$

а коэффициенты a_k — функциями этих корней, как и коэффициенты полинома F_1 . Величины p_k называются также корнями полинома $F_2(p)$.

Аналогично сигналу (5.40), имеющему спектральную функцию (5.39), получаем сигнал, соответствующий соотношениям (5.41) — (5.43):

$$u(t) = 1(t) \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (5.44)$$

Рассмотренные корни p_k полинома $F_2(p)$ являются вещественными величинами. Соответственно и полюсы спектральной функции $S(p) = \hat{S}(\omega)$ называются при этом вещественными полюсами.

Существенно отметить, что в общем случае среди n корней уравнения (5.43) может существовать некоторое четное число комплексно сопряженных корней $p_{k,(k+1)} = \sigma_k \pm j\omega_k$. Отсюда следует, что в общем случае надлежит пользоваться понятием *комплексной частоты* $p = \sigma + j\omega$, рассматривая ее как комплексную переменную для спектральных функций $S(p)$. Соответственно при этом говорят о комплексных корнях полинома $F_2(p)$, комплексных полюсах спектральной функции $S(p) = \hat{S}(\omega)$ и комплексной плоскости с координатной системой $(\sigma, j\omega)$.

Комплексным корням $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ соответствуют слагаемые суммы (5.44), имеющие вид

$$u_k(t) = 1(t)A_k e^{(\sigma_k + j\omega_k)t} = 1(t)A_k e^{\sigma_k t} e^{j\omega_k t},$$

или

$$u_k(t) = 1(t)A_k e^{\sigma_k t} (\cos \omega_k t + j \sin \omega_k t). \quad (5.45)$$

В случае вещественных сигналов (5.44) мнимые составляющие слагаемые (5.45) приводятся, поскольку $u_{k+i}(t)$ имеют такие же составляющие с противоположным знаком.

Полюсы функций (5.38), (5.39) находятся на отрицательной полуоси комплексной плоскости $p(\sigma, j\omega)$, поскольку $p_1 = -\beta < 0$ и $p_2 = -\beta_1 < 0$, $p_2 = -\beta_2 < 0$. Это показано на рис. 5.10. Если

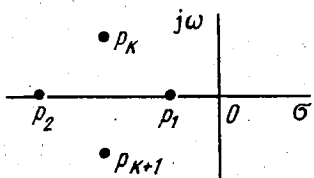


Рис. 5.10. Полюсы спектральной функции на комплексной плоскости

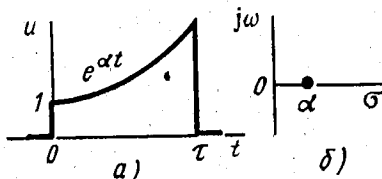


Рис. 5.11. Нарастающий по экспоненте сигнал и его полюс

бы было, например, $\beta < 0$ и $p_1 = -\beta > 0$, то полюс располагался бы в правой полуплоскости $p(\sigma, j\omega)$. Однако при этом сигнал (5.26) превратился бы в бесконечно нарастающую экспоненту, что физически нереально. Такие же нереальные сигналы соответствуют любым полюсам в точках $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ при $\sigma_k > 0$. Как видно из соотношения (5.45), в этом случае получаются неограниченно нарастающие колебания.

Таким образом, все полюсы спектральной функции любого бесконечно («полубесконечно») протяженного сигнала, который не возрастает неограниченно на бесконечности, расположены в левой половине комплексной плоскости $p(\sigma, j\omega)$, т. е. в левой полуплоскости $p(\sigma, j\omega)$, как показано на рис. 5.10:

$$\sigma_k < 0, k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.46)$$

Для таких сигналов возможен, однако, случай $\sigma_k = 0$, что соответствует спектральной функции (5.29) единичного скачка (5.28) или незатухающим во времени колебаниям (5.45). Эти полюсы расположены на мнимой оси комплексной плоскости p .

Возможны также сигналы конечной длительности с полюсами спектральной функции, расположенными в правой полуплоскости $p(\sigma, j\omega)$. Например, экспоненциальный сигнал (5.26) при $\beta = -\alpha < 0$ имеет полюс в правой полуплоскости, но является реальным сигналом, если он существует на интервале $[0, \tau]$ (рис. 5.11, а, б).

Обратным преобразованием спектра называется определение сигнала по его спектру. При использовании символического метода возможно также определение сигнала по символическому отображению спектра. При этом получается символическое отображение сигнала. Особым случаем обратного преобразования спектра является определение по спектру не самого сигнала, а его энергии.

По заданному или найденному дискретному спектру квазипериодический и периодический сигналы определяют соответственно из соотношений (5.1), (5.6). При этом используют подходящие преобразования рядов, если они существуют, или производят численное суммирование рядов с помощью ЭВМ.

Определение сигнала по его сплошному спектру требует особого подхода.

1. Определение сигнала по спектральной функции. Для определения сигнала конечной длительности по его спектральной функции необходимо преобразовать соотношение (5.12) при $\Omega \rightarrow 0$. Используя принятые обозначения, сделаем предельный переход к интегралу при $k\Omega = \omega$, $\dot{U}_{mk} = dU_m e^{-j\psi} = \dot{S}(\omega)d\omega$:

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.47)$$

Это соотношение, позволяющее определить искомый сигнал по его спектральной функции, известно как обратное преобразование (обратный интеграл) Фурье. Оно обладает свойством взаимности (5.22) и образует с равенством (5.18) пару взаимно обратных интегральных преобразований. С учетом взаимности эти преобразования используют в литературе и в других формах записи. Для удобства преобразований коэффициенты перед интегралами Фурье (5.18) и (5.47) комбинируют различным образом, отчего результат двойного преобразования (прямого и обратного) не меняется. В частности, перед интегралом (5.18) вместо коэффициента $1/\pi$ используют один из следующих коэффициентов: $1, 1/2\pi, 1/\sqrt{2\pi}$. При этом перед интегралом (5.47) коэффициент изменяется соответственно на $1/2\pi, 1$ или $1/\sqrt{2\pi}$. Однако при таком определении спектральной функции (5.17) ее модуль изменяется по отношению к спектральной плотности $\frac{dU_m}{d\omega}$ соответственно в $1/\pi, 2$ или $\sqrt{2/\pi}$ раз.

Для сигнала (5.47) конечной или полубесконечной длительности надо определить момент начала сигнала t_0 . Если спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ является дробно-рациональной, то сигнал (5.47), как и сигнал (5.44), существует при $t \geq 0$, т. е. $t_0 = 0$. Возможны также спектральные функции вида

$$\dot{S}_\tau(\omega) = \dot{S}(\omega) e^{\pm j\omega\tau}, \quad (5.48)$$

где $\tau > 0$ — константа, имеющая размерность времени.

Из соотношения (5.47) определяют также сигналы со спектральными функциями (5.48):

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega(t \pm \tau)} d\omega = u(t \pm \tau). \quad (5.49)$$

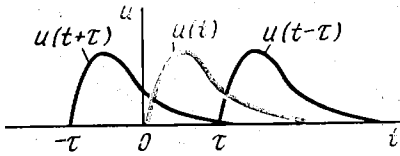


Рис. 5.12. Смещение сигнала во времени

Эти сигналы повторяют по форме сигнал $u(t)$, но смещены относительно него по оси времени, как показано на рис. 5.12. Следовательно, начало сигналов (5.49) определяется моментами времени $t_0 = \mp \tau$, т. е. они существуют при $t \geq \mp \tau$.

Учитывая симметрию спектра, можно ограничиться областью положительных частот не только при изображении спектральной функции, но и при определении с ее помощью искомого сигнала. Для этого преобразуем интеграл Фурье (5.47) с учетом формул (5.19) и (3.1):

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j[\omega t - \psi(\omega)]} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t - \psi(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin[\omega t - \psi(\omega)] d\omega.$$

Последние два интеграла содержат соответственно четную и нечетную подынтегральные функции, как это следует из свойств (5.23). Поэтому последний интеграл равен нулю, и остается интеграл Фурье в вещественной форме:

$$u(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t - \psi(\omega)] d\omega. \quad (5.50)$$

Это соотношение, являющееся односторонним преобразованием Фурье, позволяет определять сигнал по его спектру в области положительных частот*.

2. Определение сигнала по вычетам спектральной функции.

В ряде случаев обратное преобразование спектра можно производить без интегрирования спектральной функции. При рассмотрении этих случаев удобно пользоваться мнимой частотой $p = j\omega$ и функцией $S(j\omega) = S(p)$. По аналогии с выражением (5.41) представим ее в виде

$$S(p) = \frac{F_1(p)}{\pi F_2(p)}, \quad (5.51)$$

где $F_1(p)$ — произвольный полином; $F_2(p)$ — полином n -й степени, не имеющий кратных корней $p_k = p_l$ ($k = l$).

При этом функция (5.51) имеет n полюсов в разных точках p_k ($k = 1, 2, \dots, n$), являющихся простыми корнями уравнения (5.43).

При принятых обозначениях интеграл Фурье (5.47) имеет вид

* В литературе односторонним преобразованием Фурье называют также интеграл $\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$, который является частным случаем интеграла (5.18) при $t_0 = 0$, поскольку при этом $u(t)|_{t < 0} = 0$.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} dp. \quad (5.52)$$

Рассмотрим сигналы, для которых все корни уравнения (5.43) удовлетворяют условию (5.46), т. е. лежат в левой полуплоскости $p(\sigma, j\omega)$. При этом для интеграла (5.52) можно образовать замкнутый контур интегрирования, охватывающий все корни p_k . Как показано на рис. 5.13, этот контур образован мнимой осью $j\omega$ и полуокружностью с радиусом $R \rightarrow \infty$.

Из курса высшей математики известно, что интеграл по замкнутому контуру, охватывающему в комплексной плоскости все полюсы подынтегральной функции $f(p)$, может быть вычислен через вычеты (Residu) этой функции в указанных полюсах:

$$\oint f(p) dp = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res } f(p_k). \quad (5.53)$$

Известно также, что вычет в простом полюсе p_k

$$\begin{aligned} \text{Res } f(p_k) &= \text{Res} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t} \right] = \frac{F_1(p) e^{p t}}{\frac{d}{dp} F_2(p)} \Big|_{p=p_k} = \\ &= \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\frac{d}{dp} F_2(p_k)}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Из сказанного следует, что соотношения (5.52) — (5.54) определяют сигнал $u(t)$ через его спектр (5.52) в виде

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq u(t) |_{t \geq 0} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{\frac{d}{dp} F_2(p_k)} e^{p_k t}, \quad (5.55)$$

где $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ являются корнями уравнения (5.43). Эти корни вычисляются на ЭВМ с помощью стандартной программы.

Второе равенство (5.55) называется формулой разложения. Ее можно преобразовать для сигналов, смещенных во времени, с помощью соотношений (5.48), (5.49):

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{\pm p\tau} \doteq u(t) |_{t \geq \tau} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{\frac{d}{dp} F_2(p_k)} e^{p_k(t \pm \tau)}. \quad (5.56)$$

Формулы разложения (5.55), (5.56) справедливы и в случае полюсов, расположенных на мнимой оси, т. е. при мнимых сопряженных полюсах $p_k, k+1 = \pm j\omega_k$ и нулевом полюсе $p_n = 0$. Это

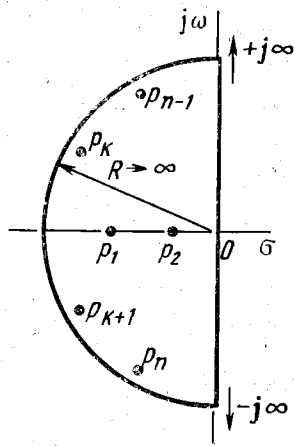


Рис. 5.13. Контур интегрирования в обратном преобразовании Фурье

можно показать, например, с помощью того же приема, что и при нахождении спектра (5.29) единичного скачка (5.28), т. е. путем предельного перехода при $\sigma_k \rightarrow 0$, $\sigma_n \rightarrow 0$. Тогда при $\rho_n = 0$ соотношения (5.55), (5.56) удобно представить иначе, приняв

$$F_2(p) = pF_3(p):$$

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \doteq u(t)|_{t \geq 0} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(\rho_k) e^{\rho_k t}}{\rho_k \frac{d}{dp} F_3(\rho_k)}, \quad (5.57)$$

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} e^{\pm p\tau} \doteq u(t)|_{t \geq \mp \tau} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(\rho_k)}{\rho_k \frac{d}{dp} F_3(\rho_k)} e^{\rho_k (t \pm \tau)}, \quad (5.58)$$

где ρ_k — корни полинома $F_3(p)$.

Соотношения (5.55), (5.56) можно модифицировать для случая, когда все полюсы спектральной функции $\rho_k = \sigma_k + j\omega_k$ расположены в правой полуплоскости:

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq u(t)|_{t \leq 0} = - \sum_{k=1}^n \frac{F_1(\rho_k)}{\frac{d}{dp} F_2(\rho_k)} e^{\rho_k t} \Big|_{\text{Re } \rho_k > 0}, \quad (5.59)$$

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{\pm p\tau} \doteq u(t)|_{t \leq \mp \tau} = - \sum_{k=1}^n \frac{F_1(\rho_k)}{\frac{d}{dp} F_2(\rho_k)} e^{\rho_k (t \pm \tau)} \Big|_{\text{Re } \rho_k > 0} \quad (5.60)$$

Изменение знака и временной области в формулах разложения (5.59), (5.60) обусловлено обходом контура интегрирования, охватывающего правую полуплоскость, по ходу часовой стрелки, т. е. в отрицательном направлении. Положительное направление обхода восстанавливается при перестановке пределов интегрирования в формуле (5.52). При этом надо переставить пределы интегрирования и в формуле (5.37), т. е. изменить t на $-t$, чтобы не изменился результат последовательного применения прямого и обратного преобразований Фурье (5.18), (5.47).

Если в правой полуплоскости расположена только часть полюсов спектральной функции, то ее надо разложить на сумму двух дробей, одна из которых имеет полюсы только в правой полуплоскости. Тогда к ней применимы формулы разложения (5.59), (5.60), а к другой дроби — формулы (5.55) — (5.58).

Спектральная функция сигнала может иметь кратные корни в левой полуплоскости (включающей мнимую ось). В этом случае значение интеграла (5.53) сохраняется, но вычет в кратном полюсе определяется не выражением (5.54), а другим соотношением. Если при этом все n полюсов имеют различную кратность

m_k ($k = 1, 2, \dots, r$), так что $\sum_{k=1}^r m_k = n$, то вместо соотношения (5.55) получаем новую формулу разложения:

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Big|_{t \geq 0} = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \times \times \frac{F_1(p)e^{pt}}{F_2(p)/(p - p_k)^{m_k}} \Big|_{p=p_k} \quad (5.61)$$

Если не все полюсы являются кратными, то для использования соотношения (5.61) спектральную функцию можно разложить на сумму двух дробей, одна из которых имеет только кратные полюсы.

При комплексно сопряженных корнях $p_k = -\alpha_k + j\omega_k$, $p_{k+1} = p_k^* = -\alpha_k - j\omega_k$ при $\alpha_k \geq 0$ расчеты по формулам разложения упрощаются, если использовать равенство (5.45):

$$u_k(t) = f(p_k)e^{p_k t} + f(p_k^*)e^{p_k^* t} = 2\text{Re} [f(p_k)e^{p_k t}],$$

или

$$u_k(t) = 2e^{-\alpha_k t} [\text{Re} f(p_k) \cos \omega_k t - \text{Im} f(p_k) \sin \omega_k t].$$

Такому преобразованию должна подвергаться в формулах разложения каждая пара комплексно сопряженных слагаемых.

3. Символическое отображение сигнала. Комплексная форма ряда Фурье (5.12) и интеграла Фурье (5.18) предполагает отображение спектральных составляющих сигнала двумя вращающимися векторами (см. рис. 5.4). Это не соответствует символическому методу (см. § 3.1.1), согласно которому гармонические колебания отображаются одним вращающимся вектором (см. рис. 3.2, а).

Одностороннее преобразование Фурье (5.50) соответствует символическому отображению спектральных составляющих сигнала и его спектра в целом. При этом на некоторой частоте ω бесконечно малая величина $dU_m = S(\omega)d\omega$ представляет собой вектор, условно показанный на рис. 5.14, а в виде конечного отрезка. Этот вектор, начальное положение которого характеризуется фазовым углом $-\psi(\omega)$, вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью ω . Проекции этого вектора на вещественную и мнимую оси

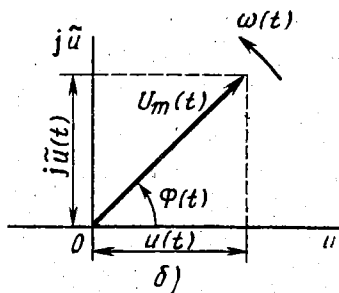
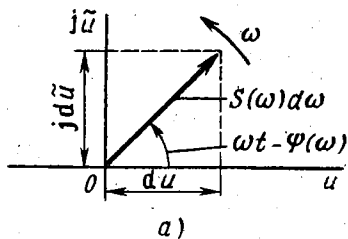


Рис. 5.14. Символическое отображение спектра и сигнала

имеют значения, аналогичные величинам (3.4), (3.5):

$$du = dU_m \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)] = S(\omega) \cos[\omega t - \psi(\omega)] d\omega, \quad (5.62)$$

$$d\tilde{u} = dU_m \cdot \sin[\omega t - \psi(\omega)] = S(\omega) \sin[\omega t - \psi(\omega)] d\omega. \quad (5.63)$$

Этим проекциям соответствует символическое отображение спектральной составляющей на комплексной плоскости, аналогичное величине (3.3):

$$d\dot{u} = du + j d\tilde{u}. \quad (5.64)$$

Интегральное сложение проекций (5.62) дает искомый сигнал (5.50). При интегральном сложении проекций (5.63) получается сигнал, сопряженный по фазе с сигналом (5.50), который показан на рис. 5.14, б:

$$\tilde{u}(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \sin[\omega t - \psi(\omega)] d\omega^*. \quad (5.65)$$

Указанному сложению проекций гармонических составляющих соответствует интегральное сложение векторов $dU_m = S(\omega)d\omega$, которое осуществляется по правилу параллелограмма. При этом сигналам (5.50) и (5.65) соответствует на комплексной плоскости суммарный вектор $U_m(t)$, повернутый на некоторый угол $\Phi(t)$. Модуль и положение этого вектора определяются из векторной диаграммы рис. 5.14, б:

$$U_m(t) = \sqrt{u^2(t) + \tilde{u}^2(t)}, \quad \Phi(t) = \text{arctg } \tilde{u}(t)/u(t) + k\pi, \quad (5.66)$$

где значения $k = 0, 1, 2, \dots$ меняются при $u(t) = 0$, так что угол $\Phi(t)$ последовательно переходит из одного квадранта в другой. Такое изменение во времени фазового угла $\Phi(t)$ означает вращение вектора $U_m(t)$ с некоторой угловой скоростью $\omega(t)$. Эта переменная скорость определяет изменение фазового угла в дифференциальной форме:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad \Phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt. \quad (5.67)$$

Из векторной диаграммы рис. 5.14, б и соотношений (5.66), (5.67) следует, что заданный сигнал может быть представлен в виде сигнала, модулированного по амплитуде и частоте:

$$u(t) = U_m(t) \cos \Phi(t) = U_m(t) \cos \int_0^t \omega(t) dt, \quad (5.68)$$

где $\Phi(0)$ — начальная фаза сигнала.

* В курсе высшей математики показывается, что сопряженный по фазе сигнал (5.65) может быть найден непосредственно по заданному сигналу $u(t)$ с помощью интегрального преобразования Гильберта: $\tilde{u}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$, где

$$\int = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right).$$

Такой сигнал называется аналитическим АЧМ-сигналом. Он является символическим отображением заданного сигнала $u(t)$, поскольку форма его описания соответствует символическому отображению спектра сигнала.

Символическое отображение сигнала (5.68) присуще всем сигналам, имеющим любые спектры — сплошные или дискретные. В частности, в форме аналитического АЧМ-сигнала (5.68) могут быть представлены сигналы, изображенные на рис. 1.7, 5.7 и 5.8. Однако в физическом понимании процесса модуляции эти сигналы не модулированы ни по амплитуде, ни по частоте, т. е. не являются физическими АЧМ-сигналами, описанными в § 1.2.4.

4. Определение энергии сигнала по спектральной функции. Для сигнала неизвестной конечной длительности полная энергия может быть определена по формуле (1.5) при бесконечно большом верхнем пределе интегрирования. Эта энергия на единичном сопротивлении с учетом закона Ома (2.1) и преобразования Фурье (5.47) определяется следующим образом:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Поменяем здесь порядок интегрирования:

$$W = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) d\omega \times \\ \times \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right).$$

Согласно формуле (5.18) полученное выражение в скобках представляет собой комплексно сопряженную спектральную функцию $\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$. Таким образом, под знаком первого интеграла получается произведение комплексно сопряженных функций $\dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega) = S^2(\omega)$. При этом находим

$$W = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega.$$

Учитывая симметрию спектра (5.23) и исходное соотношение, окончательно получаем

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \pi \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (5.69)$$

Это равенство составляет содержание теоремы Рэлея. Оно устанавливает связь полной энергии сигнала с его спектральной плотностью в отличие от формулы (5.31), по которой эта энергия выражается через известную длительность сигнала τ и его энергетическую спектральную плотность. Кроме того, следует иметь

в виду, что энергия (5.69) выделяется на единичном сопротивлении, а формула (5.31) справедлива в принципе для любого сопротивления.

§ 5.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ И ИХ СПЕКТРОВ

Из курса высшей математики известен ряд теорем, устанавливающих связь между некоторой функцией и ее преобразованием по Фурье. В принципе указанные теоремы относятся к преобразованиям сигналов и их спектров. Однако некоторые из этих теорем носят формальный характер и не соответствуют реальным преобразованиям сигналов и спектров. Поэтому рассмотрим такие преобразования с учетом характера процессов в цепях.

1. Сложение, усиление и ослабление сигналов. Сложение, усиление и ослабление сигналов являются линейными операциями. Поэтому результаты этих операций вытекают из свойства линейности (5.25), которое в применении к цепям описывает взвешенное суммирование сигналов. Для простого сложения сигналов, когда $A_1 = A_2 = 1$, получаем *теорему сложения*:

$$u_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \Leftrightarrow \hat{S}_2(\omega) = \hat{S}_1(\omega) + \hat{S}_2(\omega), \quad (5.70)$$

где

$$u_1(t) \Leftrightarrow \hat{S}_1(\omega), \quad u_2(t) \Leftrightarrow \hat{S}_2(\omega).$$

Для усиления или ослабления сигнала в A раз из того же свойства (5.25) вытекает соотношение, называемое *теоремой масштабов*:

$$u_A(t) = Au(t) \Leftrightarrow \hat{S}_A(\omega) = A\hat{S}(\omega). \quad (5.71)$$

2. Смещение сигнала во времени. Соотношения (5.48) и (5.49) согласно обозначению можно представить в виде (5.22) *теоремы смещения сигнала*:

$$u_\tau(t) = u(t \pm \tau) \Leftrightarrow \hat{S}_\tau(\omega) = e^{\pm j\omega\tau} \hat{S}(\omega), \quad (5.72)$$

где $t \geq \mp \tau$, причем нижний знак при $\tau > 0$ соответствует запаздыванию сигнала (см. рис. 5.12). Поэтому и соотношение (5.72) называют также *теоремой запаздывания*.

Согласно определению (5.19) и второму равенству (5.72) спектральная плотность смещенного сигнала не изменяется, а фазы его спектральных составляющих получают соответствующие приращения:

$$S_\tau(\omega) = S(\omega), \quad -\psi_\tau(\omega) = -\psi(\omega) \pm \tau\omega. \quad (5.73)$$

Таким образом, при смещении сигнала изменение его спектра состоит лишь в фазовом сдвиге спектральных составляющих сигнала. Следовательно, такое преобразование сигнала является линейным.

3. Дифференцирование и интегрирование сигнала. Согласно свойству (3.14) дифференцирование по времени гармонических

спектральных составляющих, записанных в символической форме, означает их умножение на оператор $j\omega$:

$$\frac{d}{dt} (d\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \frac{d}{dt} (\dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega) = j\omega \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Отсюда следует, что при дифференцировании сигнала весь его спектр нужно умножить на указанный оператор $j\omega$. Однако при этом будет потеряна составляющая спектра $j\omega \dot{S}(\omega)|_{\omega=0} = j \cdot 0 \times \times S(0) = 0$, которая в общем случае присутствует в спектре продифференцированного сигнала. Чтобы избежать указанной потери, рассмотрим сначала изменение спектра при интегрировании сигнала. Согласно символическому методу это изменение заключается в делении спектра на оператор $j\omega$. При таком делении, однако, в спектре проинтегрированного сигнала возникают лишние спектральные составляющие. Их появление обусловлено самим определением сигналов $u_d(t)$ и $u_i(t)$, получающихся при их взаимном дифференцировании или интегрировании:

$$u_d(t) = \frac{du_i(t)}{dt}, \quad u_i(t) = \int_0^t u_d(t) dt.$$

Реальные сигналы, описываемые подобным образом, существуют на интервале $[0; \tau]$, где они имеют конечное значение, как показано на рис. 5.15, а, б. При этом скачкообразный фронт сигнала $u_i(t)$ не дифференцируется. Для таких сигналов теряем при дифференцировании спектральную составляющую $S_d(0)$ найдем непосредственно из определения (5.18):

$$\begin{aligned} \dot{S}_d(0) = S_d(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} u_d(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} [u_i(\tau) - u_i(0)], \end{aligned}$$

или

$$S_d(0) = u_i(\tau)/\pi, \quad (5.74)$$

поскольку всегда $u_i(0) = 0$, как это видно из рис. 5.15, б.

Что касается появления лишних спектральных составляющих при интегрировании сигнала на интервале $[0, t]$, то они обусловлены отсутствием ограничения на верхний предел интегрирования t . При этом формально может быть $t > \tau$, так что интегрирование сигнала

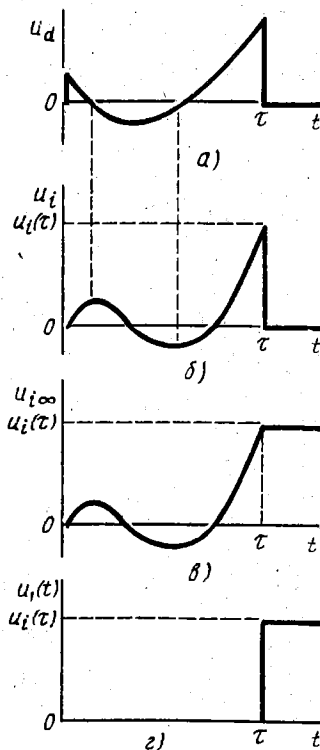


Рис. 5.15. Интегрирование сигнала на конечном и бесконечном интервалах

ведется фактически на интервале $[0, \infty]$. В результате получается сигнал $u_{i\infty}(t)$, показанный на рис. 5.15, в. Этому сигналу и соответствует спектр $\hat{S}_{i\infty}(\omega) = \hat{S}_d(\omega)/j\omega$.

Чтобы найти спектр $\hat{S}_i(\omega)$ сигнала $u_i(t)$, определенного на интервале $[0, \tau]$, из сигнала $u_{i\infty}(t)$ следует вычесть смещенный скачок $u_1(t)$, показанный на рис. 5.15, г. Согласно преобразованиям (5.71), (5.72) и формуле (5.29) спектр этого скачка $\hat{S}_1(\omega) = u_1(\tau)e^{-j\omega\tau}/j\omega$.

Отсюда в соответствии с преобразованием (5.70) находим спектр проинтегрированного сигнала:

$$\hat{S}_i(\omega) = \hat{S}_{i\infty}(\omega) - \hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} \hat{S}_d(\omega) - \frac{1}{j\omega} u_1(\tau)e^{-j\omega\tau},$$

или

$$\hat{S}_i(\omega) = \frac{1}{j\omega} \left[\hat{S}_d(\omega) - \frac{1}{\pi} u_1(\tau)e^{-j\omega\tau} \right].$$

Переходя для преобразуемого сигнала и его спектра к обозначениям $u(t)$, $\hat{S}(\omega)$, с учетом соотношения (5.74) получаем теоремы интегрирования и дифференцирования сигнала конечной длительности τ :

$$u_i(t) = \int_0^t u(t) dt \doteq \hat{S}_i(\omega) = \frac{1}{j\omega} [\hat{S}(\omega) - S(0)e^{-j\omega\tau}], \quad (5.75)$$

$$u_d(t) = \frac{du(t)}{dt} \doteq \hat{S}_d(\omega) = j\omega \hat{S}(\omega) + \frac{1}{\pi} u(\tau)e^{-j\omega\tau}.$$

Эти теоремы справедливы для сигналов, начинающихся в нулевой момент времени. Сигналы, начинающиеся в момент $t_0 \neq 0$, необходимо сместить к нулевому началу отсчета времени с учетом теоремы (5.72), после чего преобразования (5.75) становятся пригодными для сигналов $u(t \pm t_0)$.

Соотношения (5.75) упрощаются для сигналов конечной длительности при $u_i(\tau) = 0$, $\hat{S}_d(0) = 0$. В частности, такой случай имеет место, если допустить дифференцирование скачкообразного фронта сигнала $u_i(t)$, для чего необходимо использовать понятие δ -импульса, рассмотренного в § 6.2.5.

Для «полубесконечно» протяженных сигналов соотношения (5.75) также упрощаются, поскольку $u_i(t) = u_{i\infty}(t)$:

$$u_i(t) \doteq \hat{S}_i(\omega) = \hat{S}(\omega)/j\omega; \quad u_d(t) \doteq \hat{S}_d(\omega) = j\omega \hat{S}(\omega). \quad (5.76)$$

Эти преобразования сходны с операциями интегрирования и дифференцирования гармонических колебаний.

4. Перемножение сигналов. Перемножение сигналов является нелинейной операцией, которая означает и перемножение спектров сигналов. Поскольку сигналы являются суммами спектральных составляющих, при их перемножении каждую спектральную составляющую одного сигнала следует умножать на каждую

спектральную составляющую другого сигнала. Получающаяся при этом сумма может быть представлена в свернутом виде, если преобразовать произведение сигналов

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad \text{и} \quad u_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_2(\nu) e^{j\nu t} d\nu.$$

Здесь Ω и ν — независимые переменные, имеющие смысл частот, каждая из которых независимо друг от друга «пробегает» значения от $-\infty$ до ∞ . При этом находим

$$\begin{aligned} u_{\pi}(t) &= u_1(t)u_2(t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_2(\nu) e^{j\nu t} d\nu = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(\Omega) \hat{S}_2(\nu) e^{j(\Omega + \nu)t} d\Omega d\nu. \end{aligned}$$

Введем вместо ν новую переменную $\omega = \nu + \Omega$, так что $\nu = \omega - \Omega$, $d\nu = d\omega$:

$$u_{\pi}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(\Omega) \hat{S}_2(\omega - \Omega) d\Omega \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

Сопоставив это выражение с формулой (5.47), приходим к *теореме перемножения сигналов, или теореме свертки спектров*:

$$u_{\pi}(t) = u_1(t)u_2(t) \doteq \hat{S}_{\pi}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(\Omega) \hat{S}_2(\omega - \Omega) d\Omega. \quad (5.77)$$

Здесь сверткой спектров называют полученное интегральное преобразование (интеграл свертки). При использовании соотношения (5.77) в случае реальных сигналов $u_1(t)$, $u_2(t)$ следует иметь в виду, что они должны быть определены на одинаковых временных интервалах.

Теорема свертки спектров показывает, что перемножению сигналов не соответствует произведение $\hat{S}(\omega) = \hat{S}_1(\omega)\hat{S}_2(\omega)$, в котором значения $\hat{S}_1(\omega)$ и $\hat{S}_2(\omega)$ определены на одинаковой частоте ω . Для такого произведения справедлива теорема свертки сигналов:

$$\hat{S}(\omega) = \hat{S}_1(\omega)\hat{S}_2(\omega) \doteq u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t u_1(\tau)u_2(t - \tau) d\tau.$$

Эта теорема доказывается аналогично соотношению (5.77), но с помощью прямого преобразования Фурье (5.18). При этом в интеграле свертки сигналов бесконечный верхний предел заменен на текущее время t для определения мгновенного значения сигнала в момент времени t .

5. Смещение спектра сигнала. В системах связи применяют перенос спектра сигнала из одной полосы частот в другую. Смещение спектра по оси частот происходит, например, при преобразовании частоты в супергетеродинных приемниках. На таком

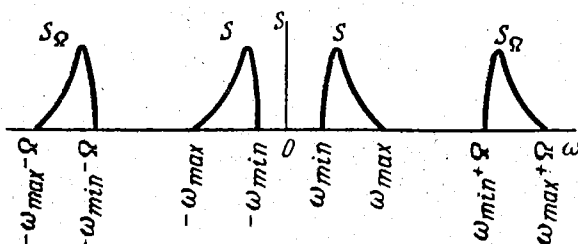


Рис. 5.16. Смещение спектра сигнала

переносе спектра основано и частотное уплотнение связанных каналов в системах многоканальной связи.

При реальном смещении спектра в области положительных частот на некоторую величину Ω свойство симметрии спектра (5.23) сохраняется. Указанное смещение спектра сигнала показано на рис. 5.16. Математически оно описывается следующим образом:

$$\hat{S}_\Omega(\omega) = \hat{S}(\omega - \Omega \operatorname{sign} \omega), \quad (5.78)$$

где $|\omega| \geq \Omega$, а $\operatorname{sign} \omega$ — функция знака, равная 1 при $\omega > 0$ и -1 при $\omega < 0$.

Смещение спектра на величину Ω означает изменение на эту величину частоты спектральных составляющих сигнала. При этом вектор на рис. 5.14, а поворачивается на угол Ωt , как показано на рис. 5.17, а. Подобный поворот совершают векторы всех спектральных составляющих сигнала.

Поэтому и суммарный вектор $U_m(t)$ на рис. 5.14, б поворачивается на такой же угол, как показано на рис. 5.17, б. При этом амплитуда $U_m(t)$ и начальная фаза $\Phi(0)$ аналитического АЧМ-сигнала (5.68) не изменяются. Следовательно, при

$$\hat{S}(\omega) \doteq u(t) = U_m(t) \cos \Phi(t) \quad (5.79)$$

с учетом равенства (5.78) и формул (5.68), (5.67) получаем теорему смещения спектра:

$$\begin{aligned} \hat{S}_\Omega(\omega) &\doteq \hat{S}(\omega - \Omega \operatorname{sign} \omega) \doteq \\ &\doteq u_\Omega(t) = U_m(t) \cos \Phi_\Omega(t) = \end{aligned}$$

$$= U_m(t) \cos \int_0^t \omega_\Omega(t) dt,$$

$$(5.80)$$

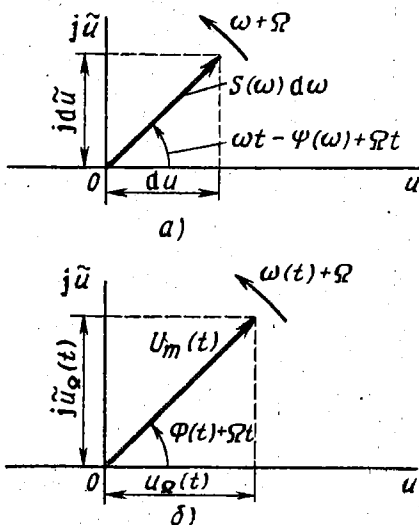


Рис. 5.17. Изменение спектральных составляющих и сигнала со смешанным спектром

где

$$\Phi_{\Omega}(t) = \Phi(t) + \Omega t, \quad \omega_{\Omega}(t) = \frac{d\Phi_{\Omega}(t)}{dt} = \omega(t) + \Omega. \quad (5.81)$$

Соотношения (5.79) — (5.81) означают, в частности, что при смещении спектра сигнала на величину Ω законы амплитудной и частотной модуляции аналитического АЧМ-сигнала не претерпевают изменения, а его частота изменяется на ту же величину Ω . Этот вывод справедлив и для реально модулированных АМ- и ЧМ-сигналов.

§ 5.4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРОВ

Методы определения спектров реальных сигналов делятся на три основных вида — аналитические, численные и инструментальные. Особо следует рассмотреть упрощенные способы аналитического определения ширины спектра.

1. Аналитические методы. Сплошные спектры сигналов определяются аналитически по интегральной формуле (5.18). Аналитическое определение спектра возможно в тех случаях, когда сам сигнал $u(t)$ поддается аналитическому описанию. Примером такого определения является нахождение спектра (5.27) экспоненциального сигнала (5.26).

Для некоторых сигналов формула (5.18) может содержать не интегрируемую элементарно функцию. В качестве примера приведем еще один бесконечно протяженный сигнал со сплошным спектром. Им является импульс колоколообразной формы (рис. 5.18, а), имеющий спектральную функцию той же формы (рис. 5.18, б):

$$u(t) = e^{-(\beta t)^2} \hat{=} \hat{S}(\omega) = S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}. \quad (5.82)$$

Эта спектральная функция определяется из преобразования (5.18):

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + j\omega t)} dt.$$

Дополнив здесь до полного квадрата показатель степени подынтегральной функции, находим

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{1}{\pi\beta} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi\beta} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

где

$$x = \beta t + j \frac{\omega}{2\beta}, \quad dx = \beta dt.$$

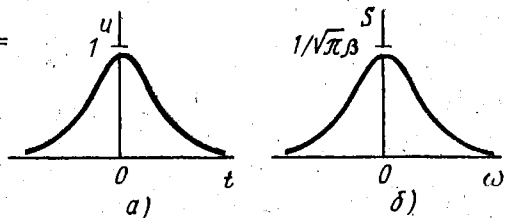


Рис. 5.18. Колокольный сигнал и его спектр

Воспользовавшись табличным значением интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, получаем спектр (5.82).

Формула (5.18) использовалась ранее для бесконечно протяженных сигналов. Однако при этом нужна оговорка. *Преобразование Фурье возможно в тех случаях, когда функция $u(t)$, описывающая сигнал, удовлетворяет не только условиям Дирихле, но и условию сходимости интеграла*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt. \quad (5.83)$$

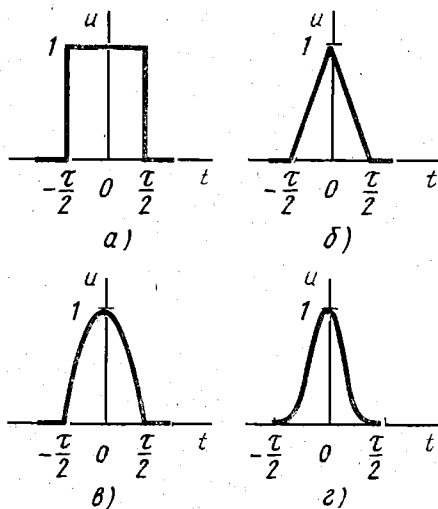
Если это условие не удовлетворяется, то в отдельных случаях сплошные спектры можно определять искусственным способом. Примером является нахождение сплошного спектра (5.29) единичного скачка (5.28), для которого интеграл (5.83) не сходится.

В принципе преобразование Фурье (5.18) получено для сигналов конечной длительности τ , которые появляются в некоторый момент времени t_0 . Для них бесконечные пределы в интеграле (5.18) заменяют на конечные:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.84)$$

Примером таких сигналов являются импульсы разной формы — прямоугольной (рис. 5.19, а), треугольной (рис. 5.19, б), косинусоидальной (рис. 5.19, в) и косинус-квадратной (рис. 5.19, г):

$$u(t) = 1, \quad u(t) = 1 - \frac{2}{\tau}|t|, \quad u(t) = \cos \pi \frac{t}{\tau}, \quad u(t) = \cos^2 \pi \frac{t}{\tau}, \quad (5.85)$$



где $|t| \leq \tau/2$, но $u(t) = 0$ при $|t| > \tau/2$.

Подставив формулы (5.85) в интеграл (5.84) при $t_0 = -\tau/2$, после интегрирования получаем спектры перечисленных сигналов:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{2}{\pi\omega} \sin \frac{\tau}{2} \omega, \quad S(\omega) = \\ &= \frac{2}{\pi\omega} \left| \sin \frac{\tau}{2} \omega \right|, \quad S(0) = \frac{\tau}{\pi} \end{aligned} \quad (5.86)$$

— для прямоугольного импульса,

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= S(\omega) = \frac{8}{\pi\omega^2} \sin^2 \frac{\tau}{4} \omega, \\ S(0) &= \frac{\tau}{2\pi}, \quad -\psi(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (5.87)$$

— для треугольного импульса,

Рис. 5.19. Формы импульсных сигналов

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2\tau}{\pi^2} \frac{\cos(\tau\omega/2)}{1 - \tau^2\omega^2/\pi^2}, \quad S(\omega) = \frac{2\tau}{\pi^2} \left| \frac{\cos(\tau\omega/2)}{1 - \tau^2\omega^2/\pi^2} \right|,$$

$$S\left(\frac{\pi}{\tau}\right) = \frac{\tau}{2\pi} \quad (5.88)$$

— для косинусоидального импульса,

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\sin(\tau\omega/2)}{1 - \tau^2\omega^2/4\pi^2}, \quad S(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \left| \frac{\sin(\tau\omega/2)}{1 - \tau^2\omega^2/4\pi^2} \right|,$$

$$S(0) = \frac{\tau}{2\pi}, \quad S\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = \frac{\tau}{4\pi} \quad (5.89)$$

— для косинус-квадратного импульса, причем для спектров (5.86), (5.88) и (5.89)

$$-\psi(\omega) = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.90)$$

где k изменяет значение при перемене знака спектральной функции, когда она обращается в нуль.

Спектры (5.86) — (5.89) показаны в области положительных частот на рис. 5.20, а—г. Здесь же пунктирными линиями изображены фазовые спектры (5.90).

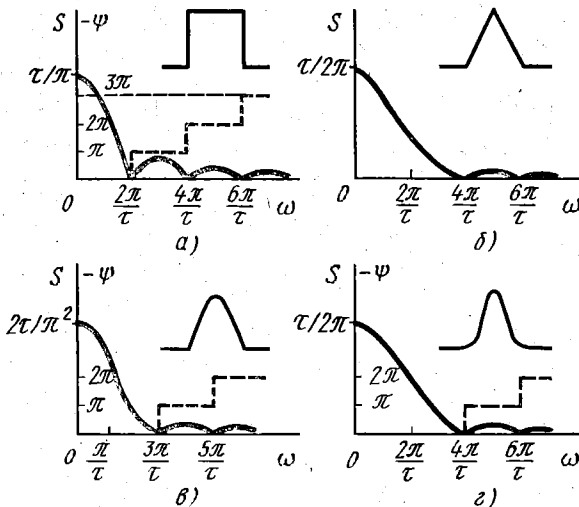


Рис. 5.20. Спектры импульсных сигналов

Аналитическое определение спектров упрощается при использовании формул (5.70) — (5.76), если известны спектры непреобразованных сигналов. Например, прямоугольный импульс может быть получен в результате вычитания единичных скачков, как показано на рис. 5.21, а, б. Отсюда по формулам (5.29), (5.70) и (5.72) определяется спектр прямоугольного импульса:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \sin \frac{\tau}{2} \omega, \quad S(0) = \frac{\tau}{\pi} \quad (5.91)$$

Еще нагляднее выглядит упрощение в определении спектра треугольного сигнала, который получается при интегрировании прямоугольного импульса (рис. 5.21, б, в). Согласно формулам (5.91) и (5.75) получаем спектр треугольного сигнала:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\pi\omega} - \frac{\tau}{\pi} e^{-j\omega\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{j\omega\tau} - 1}{\omega^2} - \frac{\tau}{j\omega} e^{-j\omega\tau} \right). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Таким образом, определение спектра (5.92) обошлось без непосредственного использования формулы (5.84), которая в данном случае требует интегрирования по частям, т. е. приводит к более громоздким вычислениям.

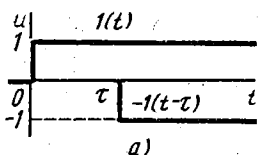


Рис. 5.21. Преобразование скачков в прямоугольный импульс и прямоугольного импульса в треугольный сигнал

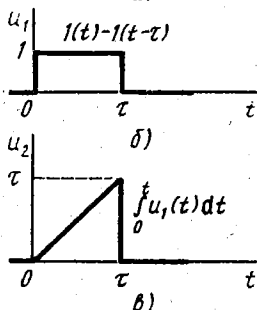
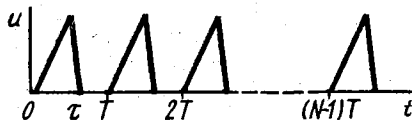


Рис. 5.22. Повторяющийся сигнал конечной длительности



Определение спектров упрощается и в случае произвольных сигналов конечной длительности τ , которые повторяются $N - 1$ раз через одинаковые интервалы $T \geq \tau$ (рис. 5.22). Согласно свойствам (5.70) и (5.72) эти спектры определяются через спектр (5.84):

$$\hat{S}_N(\omega) = \hat{S}(\omega) + \hat{S}(\omega)e^{-j\omega T} + \hat{S}(\omega)e^{-j2\omega T} + \dots + \hat{S}(\omega)e^{-j(N-1)\omega T},$$

или с учетом формулы геометрической прогрессии

$$\hat{S}_N(\omega) = \hat{S}(\omega) \frac{e^{-jN\omega T} - 1}{e^{-j\omega T} - 1} = \hat{S}(\omega) e^{-j(N-1)\omega T/2} \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}. \quad (5.93)$$

В частности, спектр пачки из N импульсов определяется по формуле (5.93), где $\hat{S}(\omega)$ — спектр первого импульса.

2. Аналитическое определение ширины спектра. Как было отмечено, энергетическое определение ширины спектра (5.32) требует численных расчетов на ЭВМ. Такой расчет, например,

для спектра (5.86) прямоугольного импульса дает следующее значение ширины спектра:

$$\Delta F_c = 0,743/\tau, \quad (5.94)$$

где $\tau = 0,9t$ при $\varepsilon = 0,9$. Это значение ΔF_c удовлетворяет условию (5.36), где $C_s = 0,743$.

Определение ширины спектра (5.94) является аналитическим лишь на этапе нахождения спектра (5.86). Чтобы определить граничные частоты спектра в общем виде, можно ввести упрощенный критерий. С этой целью рассматривают спектральную плотность S (или S_s) в области ее максимального значения S_{\max} (рис. 5.23, а). При этом частоты f_{\min} и f_{\max} определяются на уровне $S = 0,1S_{\max}$ или $S = 0,01S_{\max}(10^{-2}S_{s\max}, 10^{-4}S_{s\max})$.

Часто максимум спектральной плотности получается на нулевой частоте (см. рис. 5.18). При этом в определениях ширины спектра (1.22) и (5.32) следует принимать $f_{\min} = 0$ и $\Delta F_c = f_{\max} = f_r$, как показано на рис. 5.23, б.

В случае немонотонных спектральных функций (см. рис. 5.20) ширину спектра можно также определять не по самой функции, а по ее огибающей $S_{ог}$, как показано на рис. 5.23, в. При этом граничные частоты спектра находят на уровне $S_{ог} = 0,1S_{\max}$ или $S_{ог} = 0,01S_{\max}$.

Определим для примера ширину спектра (5.86) прямоугольного импульса. Спектральная плотность при этом изменяется немонотонно. Если задаться уровнем отсчета $S(f_r) = 0,1S(0)$, то для определения ширины спектра $\Delta F_c = f_r$ получается трансцендентное уравнение, которое опять-таки решается численными методами:

$$\frac{1}{\pi f_r} \left| \sin \pi \tau f_r \right| = 0,1\tau, \quad \Delta F_c = \frac{2,68}{\tau}. \quad (5.95)$$

Если же определять ширину спектра по огибающей $S_{ог}(f) = 1/\pi^2 f^2$ на уровне $S_{ог} = 0,1S(0)$, то решение находят аналитически:

$$\frac{1}{\pi f_r} = \frac{1}{\pi \Delta F_c} = 0,1\tau, \quad \Delta F_c = \frac{10}{\pi \tau} \approx \frac{3,18}{\tau}. \quad (5.96)$$

Таким образом, в зависимости от выбранного критерия ширины спектра получается разная. Однако в любом случае она удов-

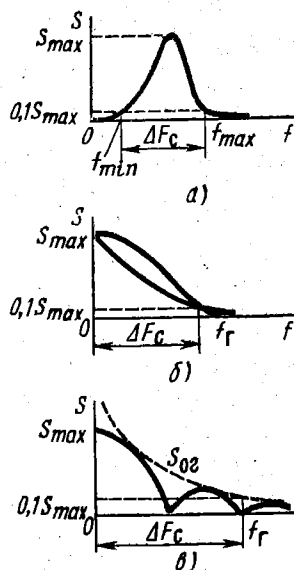


Рис. 5.23. Определение ширины спектра по упрощенным критериям

летворяет условию, аналогичному равенству (5.36), в котором надо изменить базу сигнала:

$$\tau \Delta F_c = C. \quad (5.97)$$

Здесь для величины (5.95) $C = 2,68$, а для величины (5.96) $C = 3,18$.

При использовании условия (5.97) для бесконечно или «полу-бесконечно» протяженных сигналов следует условиться о критерии выбора τ . По аналогии с ограничением бесконечно протяженных спектров им может служить ограничение длительности сигнала на уровне $0,1u_{\max}$ или $0,01u_{\max}$. Например, для экспоненциального сигнала (5.26) и колоколообразного сигнала (5.82) соответственно получаем

$$e^{-\beta\tau} = 0,1 \quad e^{-(\beta\tau/2)^2} = 0,1,$$

откуда

$$\tau = (\ln 10)/\beta \approx 2,3/\beta, \quad \tau = 2\sqrt{\ln 10}/\beta \approx 3,03/\beta. \quad (5.98)$$

Таким образом, для экспоненциального и колоколообразного сигналов в условии (5.97) следует подставлять соответствующие значения их длительности из равенства (5.98). Ширина же спектров этих сигналов легко определяется по упрощенному критерию из формул (5.27) и (5.82).

Описанным здесь образом определены базы C_s и C для различных сигналов, которые приведены в табл. П. 8. Из таблицы видно, что базы получаются меньше для сигналов, изменяющихся во времени более плавно. Из этой закономерности выпадают лишь некоторые базы C , что объясняется упрощенностью критериев в их определении. Поэтому энергетический критерий более объективен.

Для сложных сигналов, которые не описываются аналитически, ширина спектра может быть приближенно определена расчетным путем при наличии у исследователя некоторого опыта и интуиции. Такое определение основано на представлении сложного сигнала в виде суммы более простых сигналов. Например, сигнал на рис. 5.24, а представляется суммой синусоидального импульса длительностью τ_1 и импульса отрицательной полярности длительностью $\tau_2 - \tau_1 > \tau_1$. Можно ожидать, что ширина спектра всего сигнала равна ширине спектра синусоидального импульса. Для него известны базы C (см.

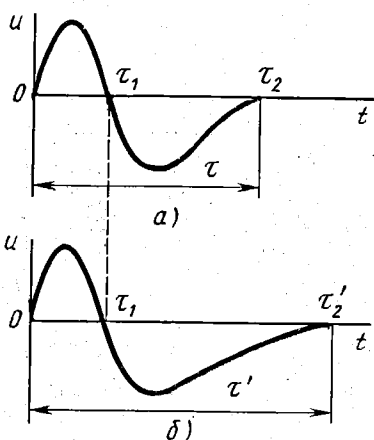


Рис. 5.24. Выделение простейшего сигнала из сигнала сложной формы

четвертую строку в табл. П.8). Отсюда с учетом соотношения (5.79) определяется ширина спектра:

$$\Delta F_c = C/\tau_1, \quad \tau \Delta F_c = \tau C/\tau_1. \quad (5.99)$$

Согласно второй формуле (5.99) возможно изменение формы сигнала, при котором произведение длительности сигнала на ширину спектра возрастает вместе с увеличением длительности сигнала. Пример подобного изменения сигнала показан на рис. 5.24, б.

Помимо рассмотренных возможны искусственные методы аналитического определения ширины спектра. Например, для телевизионного сигнала изображения (видеосигнала) граничные частоты спектра могут быть найдены на основе их специфической приближенной оценки.

Смена телевизионных кадров осуществляется с частотой $N = 25$ раз в секунду. Однако частота 25 Гц не является минимальной частотой сигнала изображения. При смене кадров основной фон изображения (например, белый или черный) может сохраняться на протяжении нескольких секунд. Таким образом, частота изменения фона может составлять доли герца. Следовательно, минимальная граничная частота спектра сигналов телевизионного изображения практически равна нулю ($f_{\min} = 0$).

Максимальная граничная частота спектра видеосигнала $f_{\max} = f_r$ может быть найдена в предположении, что изображение состоит из чередующихся черных и белых квадратных клеток, как на шахматной доске (рис. 5.25). Общее число M клеток определяется при заданном числе n строк изображения и при известном соотношении сторон кадра $k = b/a = m/n$: $M = mn = kn^2$. Полагая, что при развертке одной пары клеток формируется один период синусоидальных колебаний, находим, что одному кадру изображения соответствует $M/2 = kn^2/2$ периодов. При этом передаче N кадров в секунду соответствует частота $f_{\max} = f_r = MN/2$ и ширина спектра (Гц)

$$\Delta F_c = f_r = kn^2 N/2. \quad (5.100)$$

В советском телевизионном вещании принят следующий стандарт: $k = 4/3$, $n = 625$, $N = 25$. Отсюда по формуле (5.100) определяется ширина спектра видеосигнала $\Delta F_c \approx 6,5$ МГц.

Столь же широкий спектр имеют простейшие импульсы длительностью в несколько микросекунд (см. табл. П.8). Поэтому по аналогии с видеосигналом их называют *видеоимпульсами*.

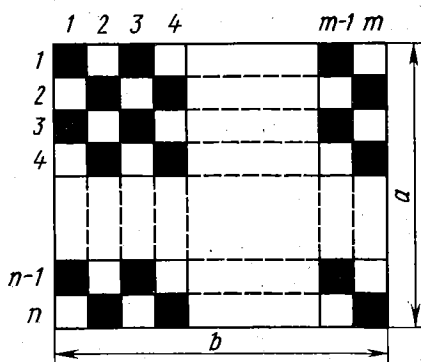


Рис. 5.25. Разбивка телевизионного кадра на элементы

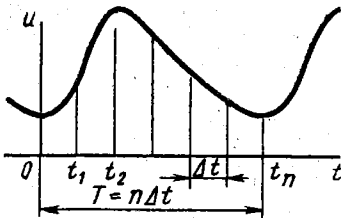


Рис. 5.26. Дискретизация периодического сигнала

3. Численные методы. Численные методы позволяют вычислять спектры сигналов, для которых не удается подобрать достаточно точную аппроксимирующую функцию $u(t)$. В этих случаях сигнал может задаваться таблицей дискретных значений $u_1 = u(t_1)$, $u_2 = u(t_2)$, ..., $u_n = u(t_n)$ либо графиком $u(t)$, по которому определяются те же дискретные значения сигнала.

Рассмотрим сначала общую схему определения спектра периодического сигнала. При определении m гармоник такого сигнала указанные n дискретных значений сигнала позволяют составить по формуле (5.7) n уравнений:

$$u_1 = U_0 + A_1 \cos \Omega t_1 + A_2 \cos 2\Omega t_1 + \dots + A_m \cos m\Omega t_1 + B_1 \sin \Omega t_1 + B_2 \sin 2\Omega t_1 + \dots + B_m \sin m\Omega t_1,$$

$$u_2 = U_0 + A_1 \cos \Omega t_2 + A_2 \cos 2\Omega t_2 + \dots + A_m \cos m\Omega t_2 + B_1 \sin \Omega t_2 + B_2 \sin 2\Omega t_2 + \dots + B_m \sin m\Omega t_2,$$

$$\dots$$

$$u_n = U_0 + A_1 \cos \Omega t_n + A_2 \cos 2\Omega t_n + \dots + A_m \cos m\Omega t_n + B_1 \sin \Omega t_n + B_2 \sin 2\Omega t_n + \dots + B_m \sin m\Omega t_n.$$

В этой системе уравнений неизвестными являются $2m$ коэффициентов Фурье A_k , B_k и постоянная составляющая U_0 . Эти неизвестные, а следовательно, амплитуды и фазы гармоник (5.9) могут быть определены при $n = 2m + 1$.

Дискретные отсчеты сигнала u_i целесообразно делать через одинаковые временные интервалы Δt на протяжении одного периода $T = n\Delta t$, как показано на рис. 5.26. При этом проще обходиться без рассмотренных уравнений и непосредственно определять комплексные амплитуды гармоник по формуле (5.13). Для этого следует представить ее в виде дискретной суммы на интервале $[0, T]$, приняв $dt = \Delta t = T/n$:

$$U_{mk} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^n u_l e^{-jk\Omega \cdot l\Delta t} \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (5.101)$$

Такой метод численного расчета можно распространить и на произвольные сигналы конечной длительности τ . Для этого условно представим сигнал повторяющимся с периодом $T = \tau$, как показано на рис. 5.27. При указанной периодизации сигнала его сплошной спектр заменяется приближенной суммой дискретных спектральных

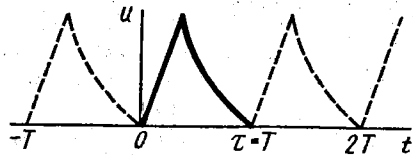


Рис. 5.27. Периодизация произвольного сигнала конечной длительности

составляющих, которую надлежит рассматривать на интервале $[0, \tau]$. В общем случае формула (5.101) принимает вид (при $\Omega \Delta t = 2\pi \Delta t / \tau = 2\pi / n$)

$$\dot{U}_{mk} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^n u_l e^{-j2\pi k l / n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (5.102)$$

Равенства (5.101) и (5.102) называются *дискретными преобразованиями Фурье* (ДПФ). Эти преобразования осуществляются путем расчетов на ЭВМ, для чего дискретные отсчеты *непрерывного (аналогового) сигнала* кодируются в цифровой форме, образуя последовательность чисел — *дискретный сигнал*. При этом используются операторы действий с комплексными числами.

Осуществление ДПФ требует предварительного определения числа n дискретных отсчетов сигнала. Это можно сделать, учтя значение ширины спектра $\Delta F_c = mF = m/T = m/n\Delta t$. Если принять приближенно $n \approx 2m$, то получим отсюда значение интервала дискретизации сигнала:

$$\Delta t = 1/2\Delta F_c. \quad (5.103)$$

Это равенство составляет содержание теоремы отсчетов В. А. Котельникова, которая применяется не только для ДПФ, но и при любой цифровой обработке сигналов. Формула (5.103) позволяет определить минимальное число n дискретных отсчетов для произвольных сигналов длительностью $\tau = T$:

$$n = T/\Delta t = 2\tau\Delta F_c = 2C, \quad (5.104)$$

где C — база сигнала.

Согласно формулам (5.99) для сложных сигналов определенной формы величина (5.104) пропорциональна длительности сигнала при фиксированной ширине его спектра. Например, для сигнала с шириной спектра $\Delta F_c = 5$ кГц получается $n = 100$ при $\tau = 10$ мс и $n = 10^4$ при $\tau = 1$ с.

Соответственно числу n возрастает количество элементарных арифметических действий при расчетах по формуле (5.102). Только вычисление показательной функции по этой формуле производится $N = n^2/2$ раз, поскольку $N = k_{\max} l_{\max}$, $k_{\max} = m$, $l_{\max} = n \approx 2m$.

Для расчета же показательной функции на ЭВМ требуется произвести в лучшем случае десятки арифметических действий. Поэтому в приведенном примере при $n = 10^4$ указанные операции потребуют нескольких миллиардов арифметических действий. При быстродействии ЭВМ в 100 млн. элементарных операций в секунду ДПФ потребует несколько десятков секунд машинного времени, хотя в нашем примере сигнал длится только 1 с.

Для повышения оперативности ДПФ применяют специальные алгоритмы *быстрого преобразования Фурье* (БПФ), которые сокращают количество вычислительных операций и тем самым

ускоряют счет на ЭВМ. Принцип БПФ заключается в прореживании дискретных отсчетов сигнала при сохранении их общего количества. Для этого сумму (5.102) разбивают на суммы с четными и нечетными отсчетами:

$$\dot{U}_{mk} = \frac{2}{n} \left(\sum_{l=1}^{n/2} u_{2l} e^{-j4\pi k l / n} + \sum_{l=1}^{n/2} u_{2l-1} e^{-j2\pi k(2l-1)/n} \right).$$

Обе эти суммы содержат одинаковые множители $\exp(-j4\pi k l / n)$. Поскольку повторяющиеся множители достаточно посчитать один раз, количество вычислительных операций сокращается при этом вдвое. Если прореживание отсчетов произвести и для новых сумм, получится снова двукратный выигрыш в количестве операций. При q -кратном прореживании отсчетов количество вычислительных операций в БПФ получается приблизительно в 2^q раз меньше, чем в обычном ДПФ.

4. Инструментальные методы. Инструментальные методы определения спектра заключаются в измерениях спектральных составляющих сигнала на разных частотах. Такие измерения осуществляются с помощью специальных приборов — анализаторов спектра. Существует два основных метода экспериментального определения спектра — одновременный (параллельный) и последовательный.

При параллельном методе спектрального анализа сигнал проходит через систему (ребенку) фильтров со смещенными относительно друг друга полосами пропускания. При этом одновременно определяются спектральные составляющие сигнала в полосах пропускания каждого из фильтров.

При последовательном методе спектрального анализа применяют один перестраиваемый фильтр. Изменяя его настройку, можно измерять спектральные составляющие сигнала последовательно на разных частотах. В таких анализаторах спектра вместо перестройки фильтра иногда используют смещение спектра сигнала по оси частот. Это позволяет с помощью фильтра с фиксированной настройкой «просмотреть» различные участки исследуемого спектра.

Указанное смещение спектра осуществляют с помощью преобразователя частоты (см. § 1.4.1, 5.3.5).

Фильтры в анализаторах спектра имеют конечную полосу пропускания, которую стремятся сделать по возможности уже. При этом измеряют суммарную мощность спектральных составляющих в узкой полосе частот Δf . Таким образом, в анализаторах спектра определяется энергетическая спектральная плотность (5.2).

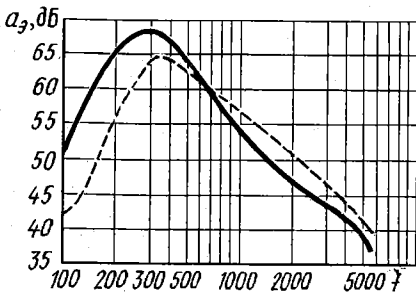


Рис. 5.28. Спектры мужской и женской речи

Например, при измерении спектра речевых сигналов определяется энергетическая спектральная плотность $S_s = \Delta I / \Delta f$, где ΔI — интенсивность речи за длительное время в узкой полосе частот Δf . В этом случае при использовании логарифмических единиц измерения в формулу (4.4) следует подставлять значение $H^2 = S_s / S_{s0}$, где $S_{s0} = I_0 / 1$ Гц (см. § 4.5.1).

На рис. 5.28 показаны найденные экспериментально спектры мужской (сплошная кривая) и женской (пунктирная кривая) речи. Здесь $a_s = 10 \lg S_s / S_{s0}$. По графикам рис. 5.28 на уровне -20 дБ от максимума определяются граничные частоты спектра f_{\min} и f_{\max} , которые указаны в § 1.3.5.

§ 5.5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

Основные сведения о спектрах периодических сигналов приведены в § 5.1.2. Здесь рассматриваются дополнительно некоторые свойства периодических сигналов и их спектров, имеющие существенное значение в практических приложениях теории.

1. Определение гармоник. Периодические сигналы могут обладать различными свойствами симметрии. При этом определение их спектров упрощается.

Периодический сигнал $u(-t) = u(t)$ с четной симметрией (четный сигнал) показан на рис. 5.29, а. Для таких симметричных сигналов коэффициенты Фурье (5.10) определяются следующим образом:

$$A_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos k\Omega t dt,$$

$$B_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.105)$$

Таким образом, все гармоники четного сигнала являются четными колебаниями, т. е. обладают четной симметрией.

Периодический сигнал $u(-t) = -u(t)$ с нечетной симметрией (нечетный сигнал) показан на рис. 5.29, б. Для него формулы (5.10) упрощаются:

$$A_k = 0, \quad B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin k\Omega t dt,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.106)$$

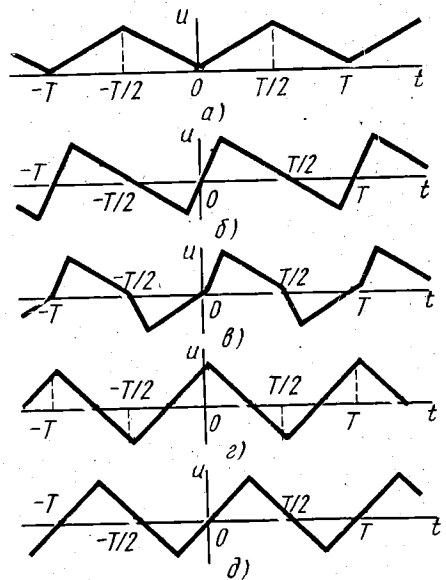


Рис. 5.29. Форма симметричных периодических сигналов

Отсюда видно, что все гармоники нечетного сигнала являются нечетными колебаниями, т. е. обладают нечетной симметрией.

Периодический сигнал $u(t \pm T/2) = -u(t)$ называется осесимметричным, т. е. симметричным относительно оси абсцисс (рис. 5.29, в). Для него из формул (5.10) получаем

$$A_{2k} = B_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(2k+1)\Omega t dt,$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(2k+1)\Omega t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.107)$$

Следовательно, спектр осесимметричного сигнала содержит только нечетные гармоники.

Периодические сигналы могут обладать также комбинированными свойствами симметрии. Если четный сигнал симметричен относительно оси абсцисс (рис. 5.29, г), то для него из соотношений (5.105), (5.107) получаются коэффициенты Фурье

$$A_{2k} = B_k = 0, \quad A_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \cos(2k+1)\Omega t dt,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.108)$$

Итак, спектр четного осесимметричного сигнала содержит только нечетные гармоники, являющиеся четными колебаниями.

Если нечетный сигнал симметричен относительно оси абсцисс (рис. 5.29, д), то для него на основании формул (5.106), (5.107) получаются коэффициенты Фурье:

$$A_k = B_{2k} = 0, \quad B_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin(2k+1)\Omega t dt,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.109)$$

Таким образом, спектр нечетного осесимметричного сигнала содержит только нечетные гармоники, являющиеся нечетными колебаниями.

Согласно формулам (5.105) — (5.109) для любых симметричных периодических сигналов часть коэффициентов Фурье обращается в нуль, а остальные определяются через сигнал, рассматриваемый на интервале в полупериод или в четверть периода колебаний. При этом все симметричные периодические сигналы, кроме четных сигналов, несимметричных относительно оси абсцисс (рис. 5.29, а), не имеют постоянной составляющей.

Упрощение в определении дискретных гармонических спектров достигается также при использовании интегральной фор-

мулы (5.17). При этом вместо многократного интегрирования и вычислений по формулам (5.10), (5.9) один раз определяется спектральная функция (5.17). Затем значения амплитуд и начальных фаз дискретных гармоник находят в соответствии с формулой (5.16) и определением (5.17):

$$U_{mk} = U_m(k\Omega) = \Omega S(k\Omega) = \frac{2\pi}{T} S(k\Omega), \quad -\psi_k = -\Psi(k\Omega). \quad (5.110)$$

В случае периодических импульсных сигналов упрощение в расчетах по формулам (5.110) получается особенно значительным. Примером таких сигналов является периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 5.30, а, в). При этом из формул (5.17), (5.84) находим

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} u(t)e^{-j\omega t} dt = \hat{S}(\omega, \tau). \quad (5.111)$$

Отсюда видно, что спектральная функция периодических импульсных сигналов зависит от длительности импульсов τ , но не зависит от периода их следования T . Поэтому для разных последовательностей импульсов (рис. 5.30, а, в) достаточно один раз определить спектральную плотность (5.111). После этого при заданных периодах T_1, T_2 определяют спектральную плотность на частотах гармоник $f_k = k/T_{1,2}$, как показано на рис. 5.30, б, г, и по формуле (5.110) вычисляют амплитуды гармоник.

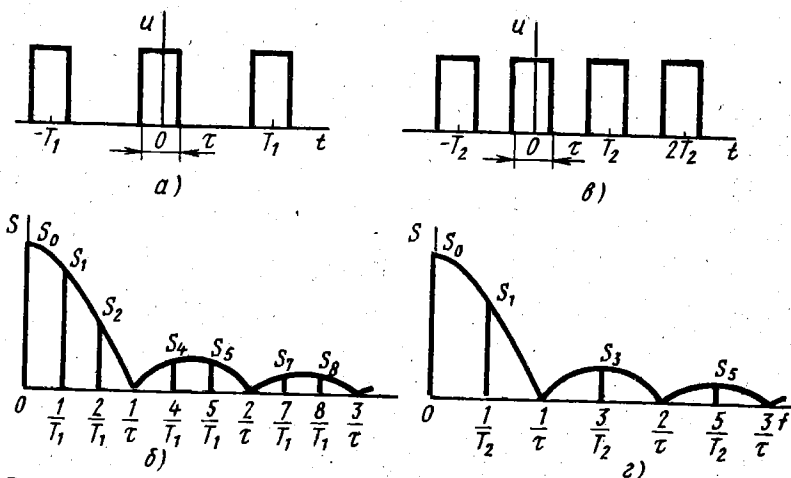


Рис. 5.30. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и их спектры

2. Действующее и средние значения периодических сигналов. Понятие действующих значений (3.33) гармонических колебаний может быть распространено на любые периодические сигналы. Как и для гармонических колебаний, действующим значением

периодического сигнала называют значение постоянного тока (напряжения), при котором на диссипативном сопротивлении расходуется мощность, равная средней за период мощности периодического сигнала. Согласно формулам (2.4) для периодического сигнала эта мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{G}{T} \int_0^T u^2(t) dt. \quad (5.112)$$

Сопоставляя формулы (3.32) и (5.112), получаем определение действующих значений периодических токов и напряжений:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (5.113)$$

Периодические сигналы можно усреднять на интервале в один период не квадратично, как в формулах (5.113), а линейно, как в формуле (5.11). При этом получается значение постоянной составляющей периодического сигнала. Кроме того, возможно линейное усреднение периодического сигнала по его абсолютному значению (по модулю). При этом получаются средние значения периодических токов и напряжений:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt, \quad \bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt. \quad (5.114)$$

Если периодический сигнал является унipoлярным, то его среднее значение (5.114) совпадает с постоянной составляющей I_0 или U_0 .

Существуют электронизмерительные приборы, которые измеряют либо действующие, либо средние, либо максимальные (амплитудные) значения периодических колебаний. Их градуируют обычно в действующих значениях гармонических колебаний. При измерении такими приборами аналогичных значений негармонических периодических сигналов надо знать соответствующие переводные коэффициенты:

$$K_\Phi = I/\bar{I} = U/\bar{U}, \quad K_a = i_{\max}/I = u_{\max}/U. \quad (5.115)$$

Здесь первая величина называется коэффициентом формы, а вторая — коэффициентом амплитуды. Данные коэффициенты для различных периодических сигналов приведены в табл. П.9, где указаны также параметры (5.113) и (5.114). Коэффициенты (5.115) следует учитывать и при измерении мощности периодических негармонических сигналов.

3. Определение мощности периодического сигнала по его спектру. Из формул (5.112), (5.113) следует, что мощность периодического сигнала выражается через действующие значения напряжения и тока:

$$P = RI^2 = GU^2 = UI. \quad (5.116)$$

Эта же мощность может быть выражена через действующие значения гармоник сигнала. Если, например, в последнее равенство (5.112) подставить значение $u(t)$ из ряда Фурье (5.6), то при возведении в квадрат суммы гармоник получится сумма слагаемых вида

$$U_{mk}^2 \cos^2(k\Omega t - \psi_k) = \frac{1}{2} U_{mk}^2 + \frac{U_{mk}^2}{2} \cos 2(k\Omega t - \psi_k),$$

$$2U_{mk}U_{ml} \cos(k\Omega t - \psi_k) \cos(l\Omega t - \psi_l) = U_{mk}U_{ml} \cos[(k-l)\Omega t - \psi_k + \psi_l] + U_{mk}U_{ml} \cos[(k+l)\Omega t - \psi_k - \psi_l].$$

По формуле (5.112) производится интегрирование этих слагаемых на интервале в один период. При этом для любых значений k и l получаются равными нулю все интегралы, кроме интегралов

$$\int_0^T \frac{1}{2} U_{mk}^2 dt = \frac{1}{2} U_{mk}^2 T = U_k^2 T.$$

В число этих ненулевых слагаемых входит и постоянная составляющая при $k=0$. Таким образом, учитывая аналогичные равенства и для тока, соотношения (5.112) можно переписать в виде

$$P = R \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = G \sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \quad (5.117)$$

Следовательно, мощность периодического сигнала равна сумме мощностей его гармоник, включая и постоянную составляющую. Этот вывод распространяется и на квазипериодические сигналы, мощность которых равна сумме мощностей их спектральных составляющих. Это свойство использовалось ранее при определении энергетической спектральной плотности (5.2), где производилось сложение мощностей спектральных составляющих в узкой полосе частот.

Из (5.112) и (5.117) следует соотношение

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^2, \quad (5.118)$$

известное как равенство Парсеваля. Теорема Рэлея (5.69) является обобщением равенств (5.118) на сигналы со сплошными спектрами.

Из соотношений (5.116), (5.117) определяется связь между действующими значениями периодического сигнала и его гармоник:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}, \quad I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (5.119)$$

Если в нелинейной цепи искажаются гармонические колебания, то получается периодический сигнал несинусоидальной формы. Такой сигнал содержит высшие гармоники, относительной мощностью которых принято оценивать нелинейные искажения. С учетом формулы (5.119) коэффициент нелинейных искажений

$$k_f = \sqrt{P_\Sigma/P_1} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2/U_1} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2/I_1}, \quad (5.120)$$

где P_Σ — суммарная мощность высших гармоник; P_1 — мощность первой гармоники.

При практических расчетах нелинейных искажений в формулах (5.120) учитывается конечное число высших гармоник.

§ 5.6. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

В § 1.2.4 было дано понятие модуляции и определены виды модулированных сигналов, а в § 1.3.3 рассмотрен спектр АМ-сигнала при гармонической модуляции. На основе этих первичных сведений рассмотрим свойства модулированных сигналов различных видов и их спектры.

1. АМ-сигналы. Амплитудно-модулированный сигнал с несущими гармоническими колебаниями описывается общими соотношениями (1.15) и (1.16). При гармонической модуляции АМ-сигнал (1.21) имеет симметричный спектр. Соответствующие спектры амплитуд и фаз АМ-сигнала при $\psi_0 = 0$ показаны на рис. 5.31, а, б, из которого наглядно видна симметрия боковых спектральных составляющих.

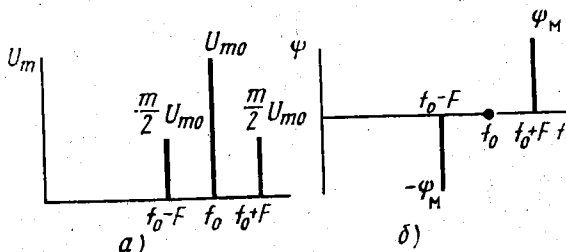


Рис. 5.31. Спектры АМ-сигнала при гармонической модуляции

Сигнал (1.21) может быть представлен в символической форме:

$$\dot{i}(t) = \dot{U}_{m0} e^{j\omega_0 t} + \frac{m}{2} \dot{U}_{m0} e^{j(\omega_0 - \Omega)t - \psi_m} + \frac{m}{2} \dot{U}_{m0} e^{j(\omega_0 + \Omega)t + \psi_m}. \quad (5.121)$$

В соответствии с этим равенством спектр АМ-сигнала можно изобразить в виде трех вращающихся векторов (рис. 5.32, а). В методе комплексных амплитуд неподвижный вектор \dot{U} (см. рис. 3.2, б) является остановившимся вектором U_m (см.

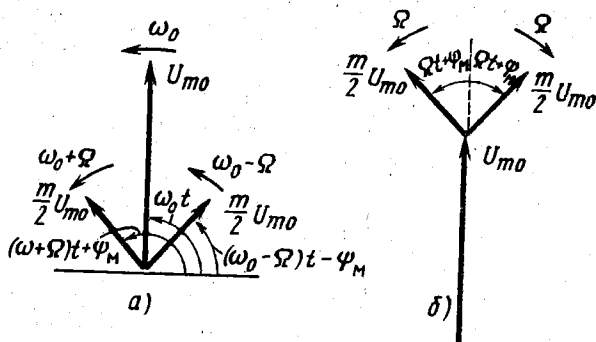


Рис. 5.32. Векторные диаграммы АМ-сигнала

рис. 3.2, а). Эту остановку вектора U_m можно считать следствием вращения координатной плоскости в направлении вращения часовой стрелки с угловой скоростью ω . В сигнале (5.121) таким приемом можно остановить только один вращающийся вектор, например вектор несущей спектральной составляющей, если вращать координатную плоскость с угловой скоростью ω_0 . При этом векторы боковых составляющих будут вращаться в противоположных направлениях с угловой скоростью Ω , как показано на рис. 5.32, б. Из векторной диаграммы наглядно видно, почему в спектральном представлении амплитуда АМ-сигнала изменяется по гармоническому закону в пределах от $U_{m0} - mU_{m0}$ до $U_{m0} + mU_{m0}$.

Если модулирующий сигнал является не гармоническим, а сложным и описывается, например, рядом Фурье (5.6), то АМ-сигнал можно представить в следующем виде (без учета постоянной составляющей $U_0 = 0$ и ψ_0):

$$u(t) = U_{m0} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(k\Omega t - \psi_k) \right] \cos \omega_0 t. \quad (5.122)$$

Здесь в соответствии с обозначениями, принятыми в равенстве (1.18), параметры

$$m_k = \Delta U_{mk} / U_{m0} = a U_{mk} / U_{m0} \quad (5.123)$$

называют парциальными коэффициентами модуляции (от лат. partialis — частичный).

Раскрыв квадратные скобки в соотношении (5.122), после элементарного преобразования, получаем описание спектра АМ-сигнала:

$$u(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{U_{m0}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos[(\omega_0 - k\Omega)t + \psi_k] + \\ + \frac{U_{m0}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos[(\omega_0 + k\Omega)t - \psi_k]. \quad (5.124)$$

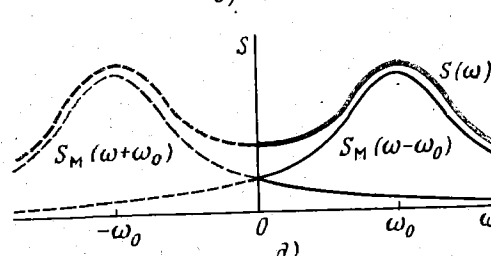
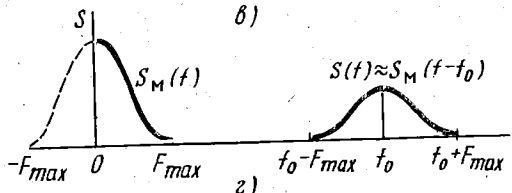
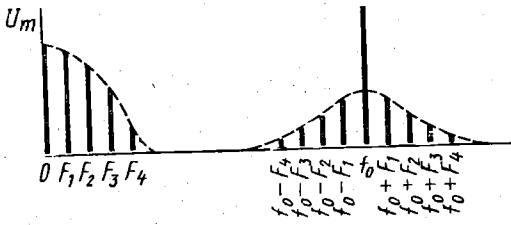
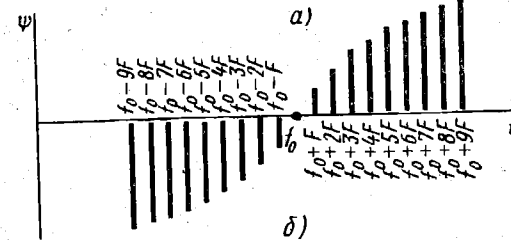
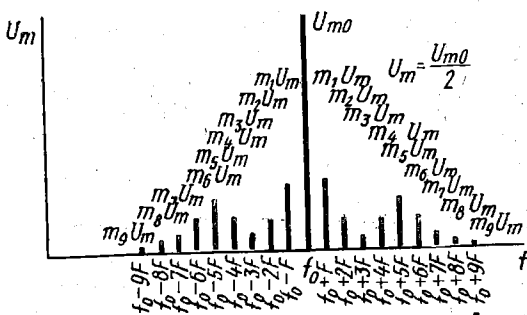


Рис. 5.33. Спектры АМ-сигнала при сложном модулирующем сигнале

Чтобы показать это, будем рассматривать огибающую $U_m(t)$ АМ-сигнала в качестве некоторого сигнала, имеющего сплошной спектр:

Из выражений (1.21) и (5.124) видно, что в случае сложного модулирующего сигнала спектр АМ-сигнала отличается только числом боковых составляющих. При этом сохраняется симметрия спектра амплитуд (рис. 5.33, а) и спектра фаз (рис. 5.33, б).

Полученный спектр обладает еще одним важным свойством. Парциальные коэффициенты модуляции (5.123) пропорциональны амплитудам спектральных составляющих модулирующего сигнала. Поэтому огибающая спектра АМ-сигнала имеет такую же форму, как и огибающая спектра модулирующего сигнала с ее зеркальным отображением в области отрицательных частот (рис. 5.33, в). Аналогичный вывод справедлив и для спектра фаз. Эти выводы далее уточняются для бесконечно протяженных спектров.

Если спектр модулирующего сигнала является сплошным, то и АМ-сигнал имеет сплошной спектр. При этом остаются справедливыми свойства симметрии и симметричного отображения спектра модулирующего сигнала.

$$\dot{S}_m(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.125)$$

Тогда АМ-сигнал

$$u(t) = U_m(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} U_m(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} U_m(t) e^{-j\omega_0 t}$$

будет иметь сплошной спектр

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt, \end{aligned}$$

или

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{S}_m(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}_m(\omega + \omega_0). \quad (5.126)$$

Для АМ-сигнала $u(t) = U_m(t) \sin \omega_0 t$ аналогично

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2j} \dot{S}_m(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} \dot{S}_m(\omega + \omega_0). \quad (5.126')$$

Соотношения (5.126), (5.126') составляют содержание теоремы модуляции.

Второе слагаемое в равенствах (5.126), (5.126') описывает спектр (5.125), смещенный в область отрицательных частот, т. е. в сторону «опережения» по частоте. Если этим слагаемым пренебречь в области положительных частот, то амплитудный спектр АМ-сигнала повторит по форме амплитудный спектр модулирующего сигнала, как показано на рис. 5.33, з. Такое повторение формы амплитудного спектра получается достаточно точным при $f_0 \gg \Delta F_c$, поскольку при этом «хвост» спектра $S_m(f + f_0)$ в области положительных частот пренебрежимо мал. В принципе же спектральные составляющие $\dot{S}_m(\omega + \omega_0)$ при $\omega > 0$, складываясь векторно с соответствующими составляющими $\dot{S}_m(\omega - \omega_0)$, приводят к изменению формы амплитудного спектра, как показано на рис. 5.33, д. Сказанное в полной мере относится и к дискретным бесконечно протяженным спектрам.

Примером АМ-сигнала со сплошным спектром является прямоугольный радиоимпульс (рис. 5.34, а). Его спектр, показанный на рис. 5.34, б, построен по соотношению (5.126') с учетом спектра (5.86) прямоугольного видеоимпульса (см. рис. 5.20, а).

Из спектральных диаграмм, изображенных на рис. 5.33, видно, что в отличие от формулы (1.23) при сложном модулирующем сигнале ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенной максимальной частоте модуляции:

$$\Delta F_c = 2F_{\max}. \quad (5.127)$$

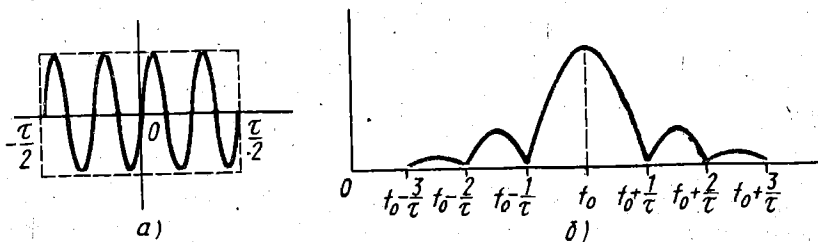


Рис. 5.34. Прямоугольный радиоимпульс и его спектр

Здесь под максимальной частотой модуляции понимается максимальная частота спектральной составляющей модулирующего сигнала.

2. ЧМ-сигналы. При частотной модуляции пропорционально модулирующему сигналу $u_m(t)$ (рис. 5.35, а) изменяется частота ЧМ-сигнала (рис. 5.35, б):

$$\omega(t) = \omega_0 + a u_m(t) = \omega_0 + \Delta\omega u_m(t)/u_{\max}, \quad (5.128)$$

где a — размерный коэффициент пропорциональности; $\Delta\omega = a u_{\max}$ — максимальное отклонение частоты от несущей частоты ω_0 , которое называется девиацией частоты (от лат. devia-tio — отклонение).

Для описания частотно-модулированного сигнала можно использовать соотношения (5.68), где $U_m(t) = U_m = \text{const}$, а изменение частоты (5.67) является не символическим, а реальным и определяется формулой (5.128). Например, при модулирующем сигнале (1.17) из соотношений (5.128) и (5.68) получаем уравнение ЧМ-сигнала при гармонической модуляции:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m_f \sin(\Omega t + \psi_m) + \psi_0], \quad (5.129)$$

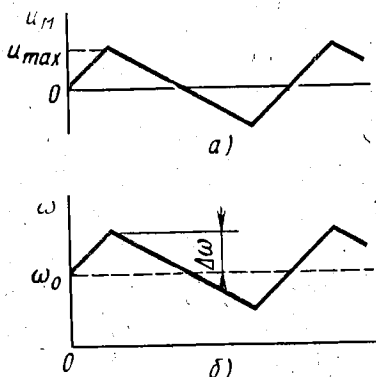


Рис. 5.35. Модулирующий сигнал и изменение частоты ЧМ-сигнала

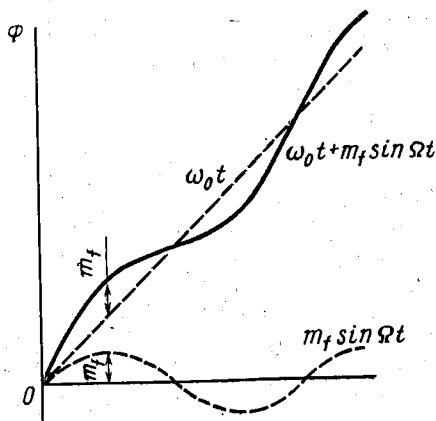


Рис. 5.36. Изменение фазы ЧМ-сигнала

где

$$m_f = \frac{\Delta\omega}{\Omega}, \Delta\omega = aU_{m\Omega}, \quad (5.130)$$

$$\psi_0 = -m_f \sin \psi_m.$$

Из соотношения (5.129) видно, что фаза ЧМ-сигнала $\Phi(t)$ при гармонической модуляции получает гармоническое приращение, как показано на рис. 5.36 при $\psi_m = 0$. Параметр (5.130), показывающий максимальное приращение фазы, аналогичен коэффициенту модуляции m АМ-сигнала и называется индексом частотной модуляции.

При амплитудной модуляции коэффициент m не превышает единицы. При частотной же модуляции индекс m_f может быть значительно больше единицы, так как девиация частоты $\Delta\omega$ может превышать частоту модуляции Ω (но $\Delta\omega \ll \omega_0$).

Для нахождения спектра ЧМ-сигнала преобразуем выражение (5.129) при $\psi_0 = \psi_m = 0$ (что не нарушает общности выводов):

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t \cos(m_f \sin \Omega t) - U_m \sin \omega_0 t \sin(m_f \sin \Omega t). \quad (5.131)$$

Упростим это соотношение при $m_f \ll 1$, воспользовавшись приближенными равенствами $\cos x|_{|x| \ll 1} \approx 1$, $\sin x|_{|x| \ll 1} \approx x$:

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t - m_f U_m \sin \omega_0 t \sin \Omega t,$$

или

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t - \frac{m_f}{2} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{m_f}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (5.132)$$

Таким образом, спектр ЧМ-сигнала, как и спектр АМ-сигнала, содержит три гармонические составляющие. При этом спектр амплитуд симметричен (рис. 5.37, а), а спектр фаз несимметричен (рис. 5.37, б), поскольку отрицательный знак во втором слагаемом (5.132) означает изменение фазы колебаний на угол $\pm\pi$.

Такое изменение фазы обуславливает на векторной диаграмме ЧМ-сигнала поворот вектора нижней боковой составляющей на угол π (рис. 5.38, а). На этой диаграмме суммарный вектор качается около среднего положения, что и означает изменение частоты ЧМ-сигнала.

Конец качающегося вектора движется по горизонтальной пунктирной прямой, т. е. его значение изменяется, что озна-

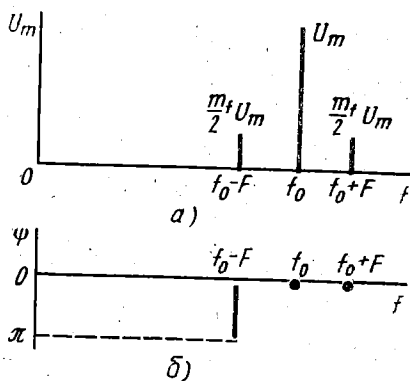


Рис. 5.37. Амплитудный и фазовый спектры ЧМ-сигнала при $m_f \ll 1$

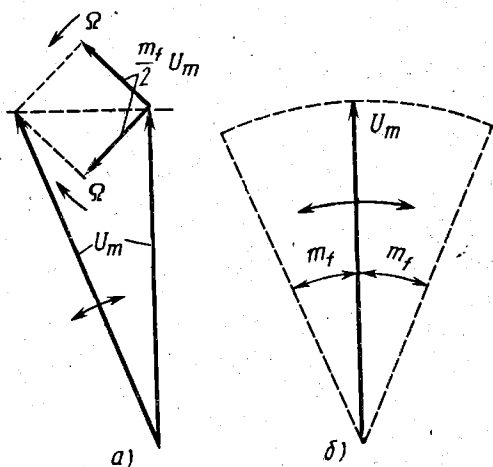


Рис. 5.38. Векторные диаграммы ЧМ-сигнала

чает наличие паразитной амплитудной модуляции. Такой результат является следствием приближенности равенства (5.132) при $m_f \ll 1$. Точный анализ соотношения (5.131) приводит к появлению дополнительных боковых спектральных составляющих, при которых конец качающегося суммарного вектора ЧМ-сигнала движется по окружности, не изменяясь по значению (рис. 5.38, б).

Точный анализ основан на преобразовании равенства (5.131) с помощью рядов:

$$\cos(m_f \sin \Omega t) = J_0(m_f) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m_f) \cos 2k\Omega t, \quad (5.133)$$

$$\sin(m_f \sin \Omega t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(m_f) \sin(2k+1)\Omega t,$$

где $J_k(m_f)$ — функция Бесселя k -го порядка (рис. 5.39, а), имеющие при отрицательном порядке значения

$$J_{-k}(m_f) = (-1)^k J_k(m_f). \quad (5.134)$$

Подставив ряды (5.133) в соотношение (5.131) и заменив произведения косинусов и синусов полусуммами косинусов соответствующих аргументов, с учетом равенства (5.134) получим

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_f) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \quad (5.135)$$

Таким образом, спектр ЧМ-сигнала состоит из несущей составляющей $U_m J_0(m_f) \cos \omega_0 t$ и бесконечного ряда парных боковых составляющих $U_m J_{\pm k} \cos(\omega_0 \pm k\Omega)t$. Амплитуды боковых составляющих по мере удаления от несущей (с ростом k) немонотонно убывают до нуля, как это видно из графиков функций Бесселя (рис. 5.39, б). Для примера на рис. 5.40 показан спектр ЧМ-сигнала при $m_f = 2$. Здесь поворот фазы нижних боковых составляющих при нечетном порядке k учтен в знаке амплитуды согласно равенству (5.134).

Ширина спектра ЧМ-сигнала при $m_f \ll 1$ (см. рис. 5.37) определяется, как и в случае АМ-сигнала, формулой (1.23).

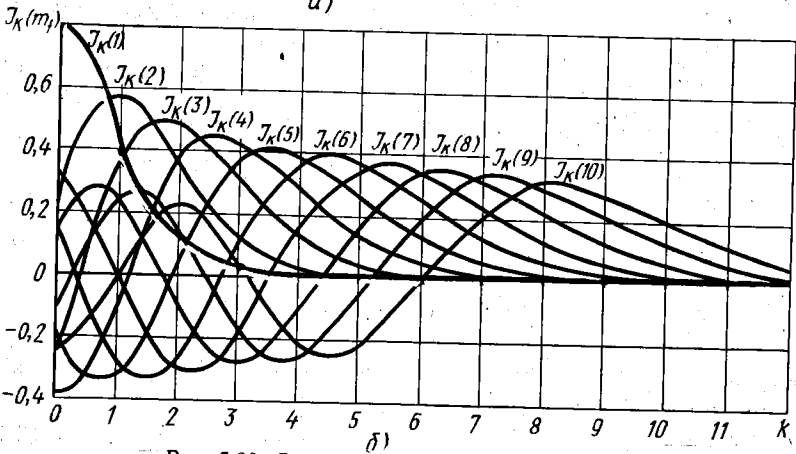
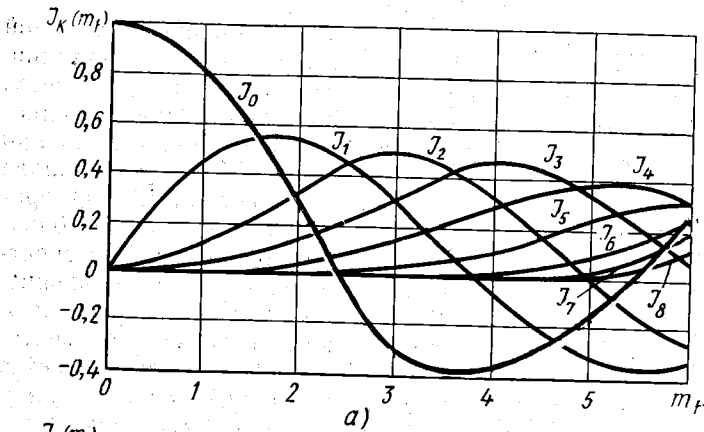


Рис. 5.39. Графики функций Бесселя

Если индекс модуляции не является пренебрежимо малым, то бесконечный спектр ЧМ-сигнала надо ограничивать полосой ΔF_c , руководствуясь тем или иным критерием. В § 5.1.5 указывалось, что наиболее объективным критерием является величина допустимых искажений. При ограничении спектра ЧМ-сигнала его суммарный вектор на векторной диаграмме изменяется по величине, изменяется также закон качания этого вектора. Это означает, что *искажения ЧМ-сигнала при ограничении его спектра проявляются не только в появлении паразитарной амплитудной модуляции, но и в изменении закона частотной модуляции*. Поскольку здесь рассматривается гармоническая модуляция, ее изменение означает, что модуляция становится негармонической. Такое изменение закона модуляции следует классифицировать как нелинейные искажения по аналогии с нелинейными искажениями гармонических колебаний (см. § 14.1). Таким образом, *ограничение спектра ЧМ-сигнала приводит к нелинейным искажениям закона модуляции*. Численный анализ на ЭВМ показал,

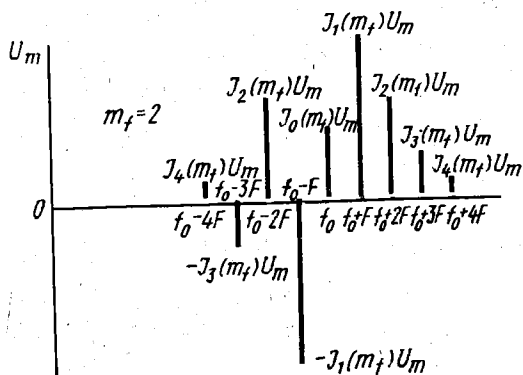


Рис. 5.40. Спектр ЧМ-сигнала при широкополосной гармонической модуляции

k_f имеет прежний смысл (5.120), но не для самого ЧМ-сигнала, претерпевающего при ограничении спектра линейные искажения, а для модулирующего сигнала, который при этом становится негармоническим. Из сравнения формул (1.23) и (5.136) видно, что при $m_f \ll 1$ ширина спектра получается значительно меньше, чем при нарушении этого неравенства. Поэтому частотную модуляцию при $m_f \ll 1$ называют узкополосной. Такая модуляция не имеет преимуществ перед амплитудной модуляцией. Практическое значение имеет широкополосная частотная модуляция, при которой индекс модуляции не является пренебрежимо малым. В специальных курсах показывается, что переход к широкополосной частотной модуляции повышает помехоустойчивость связи.

При негармонической частотной модуляции описание спектра ЧМ-сигнала получается более сложным, чем (5.135)*. При этом симметрия спектра амплитуд не сохраняется, а в формулах (5.136) частоту F надо заменить максимальной частотой модуляции F_{\max} , как и при переходе от равенства (1.23) к формуле (5.127).

3. ФМ-сигналы. При фазовой модуляции пропорционально модулирующему сигналу изменяется начальная фаза ФМ-сигнала:

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \psi(t), \quad \psi(t) = \psi_0 + a u_m(t) = \psi_0 + m_\varphi u_m(t) / u_{\max}, \quad (5.137)$$

где a — размерный коэффициент пропорциональности; $m_\varphi = a u_{\max}$ — индекс фазовой модуляции.

* При модулирующем сигнале, состоящем из n гармонических составляющих, спектр ЧМ-сигнала описывается n -кратной суммой: $u(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} J_{k_1}(m_{f1}) J_{k_2}(m_{f2}) \dots J_{k_n}(m_{fn}) \cos(\omega_0 + k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 + \dots + k_n \Omega_n) t$.

ФМ-сигналы описываются общими уравнениями (5.68) и (5.67) при $U_m(t) = U_m = \text{const}$. При гармоническом модулирующем сигнале (1.17) это описание с учетом (5.137) принимает вид

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m_\varphi \cos(\Omega t + \psi_m) + \psi_0], \quad (5.138)$$

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 - \Delta\omega \sin(\Omega t - \psi_m), \quad (5.139)$$

где

$$m_\varphi = aU_{m\omega}, \quad \Delta\omega = m_\varphi\Omega. \quad (5.140)$$

Сходство уравнений (5.138), (5.139) и (5.129), (5.128) означает, что фазовая модуляция сопровождается частотной модуляцией и наоборот. Поэтому оба эти вида модуляции объединяют под названием *угловой модуляции*. Однако из сравнения указанных уравнений следует, что при внешнем сходстве ФМ- и ЧМ-сигналы отличаются законами изменения частоты и фазы. Наиболее наглядно это проявляется при сложных модулирующих сигналах. Для примера на рис. 5.41, а показана форма трапецеидального модулирующего сигнала, которому соответствуют резко различные законы изменения частоты (рис. 5.41, б, д) и начальной фазы (рис. 5.41, в, г) ЧМ- и ФМ-сигналов.

ЧМ- и ФМ-сигналы при одинаковом модулирующем сигнале отличаются также параметрами модуляции. Как видно из определений (5.130), при уменьшении, например, частоты модуляции Ω и $U_{m\omega} = \text{const}$ девиация частоты $\Delta\omega$ ЧМ-сигнала не изменяется, а индекс частотной модуляции m_f возрастает. Согласно же формулам (5.140) в случае фазовой модуляции индекс модуляции $m_\varphi = \text{const}$, а девиация частоты $\Delta\omega$ уменьшается.

Этими отличиями обусловлена и разница в спектрах ФМ- и ЧМ-сигналов. С точностью до начальной фазы спектр ФМ-сигнала описывается прежним уравнением (5.135). Поэтому при определенных условиях спектры ФМ- и ЧМ-сигналов могут быть одинаковыми, как показано на рис. 5.42, а, в. При уменьшении же

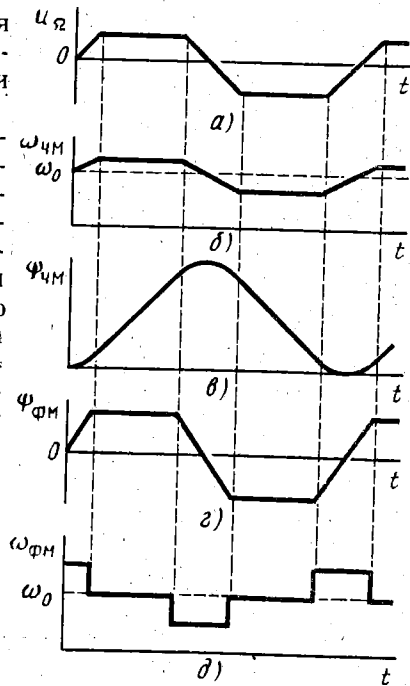


Рис. 5.41. Изменение частоты и начальной фазы ЧМ- и ФМ-сигналов при трапецеидальном модулирующем сигнале

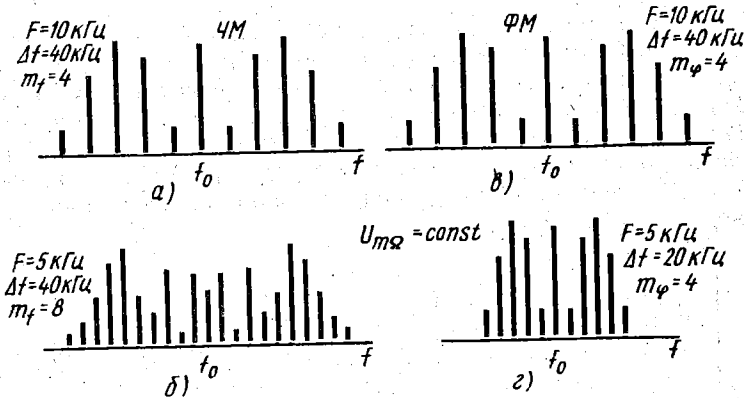


Рис. 5.42. Изменение спектров ЧМ- и ФМ-сигналов при изменении частоты модуляции.

частоты модуляции эти спектры изменяются различным образом, как показано на рис. 5.42, б, г. Здесь ширина спектра ФМ-сигнала определяется прежними соотношениями (5.136) при замене величины m_f на индекс фазовой модуляции m_ϕ .

4. АЧМ-сигналы, биения. Преднамеренную одновременную модуляцию по амплитуде и по частоте (амплитудно-частотную модуляцию), при которой получается АЧМ-сигнал, применяют редко. Однако такие сигналы часто возникают в результате естественных физических процессов. Например, вокализованный речевой сигнал возникает за счет сложных колебаний голосовых связок с переменными амплитудой и частотой. Поэтому он является АЧМ-сигналом. Об этом наглядно свидетельствует осциллограмма гласной фонемы «А» (рис. 5.43), на которой отчетливо видно изменение амплитуды и частоты речевых колебаний.

В технических приложениях приходится анализировать АЧМ-сигналы, возникающие обычно при суперпозиции колебаний с разными, но близкими частотами. При этом можно пользоваться общим описанием таких сигналов (5.68), (5.67), где $U_m(t)$ и $\omega(t)$ реально изменяются во времени.

Покажем возникновение АЧМ-сигналов на простейшем примере суперпозиции гармонических колебаний. Если складываются гармонические колебания с близкими частотами и одинаковыми амплитудами, то получается АМ-сигнал, называемый биениями:



$$u(t) = U_{m0} \cos \omega_1 t + U_{m0} \cos \omega_2 t = U_m(t) \cos \omega_0 t, \quad (5.141)$$

где

$$U_m(t) = 2U_{m0} \cos \Omega t,$$

$$\Omega = \Omega_0 / 2, \quad \Omega_0 = \omega_1 - \omega_2, \quad (5.142)$$

$$\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2) / 2.$$

Рис. 5.43. Осциллограмма гласной фонемы «А»

Амплитуда сигнала (5.141) изменяется (пульсирует, «бьется») с частотой биений Ω_6 , которой соответствует период биений $T_6 = 2\pi/\Omega_6$, как показано на рис. 5.44, а. Частота ω_0 сигнала (5.141) постоянна, как это видно из последнего равенства (5.142). При постоянной частоте ω_0 биения имеют векторную диаграмму, показанную на рис. 5.44, б, где вращающийся вектор $U_m(t)$ остановлен за счет вращения координатной плоскости с угловой скоростью ω_0 .

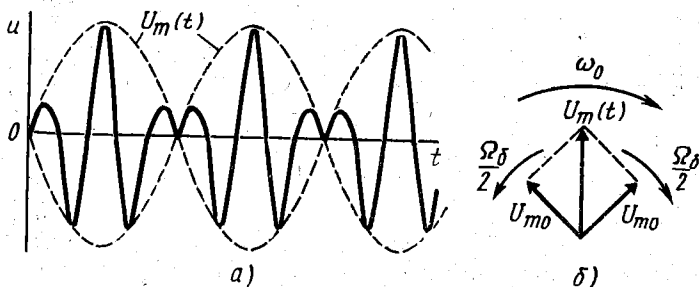


Рис. 5.44. Биения и их векторная диаграмма

При суперпозиции гармонических колебаний с разными частотами и неодинаковыми амплитудами частота результирующего колебаний не остается постоянной, т. е. получается АЧМ-сигнал. Это видно из соотношений

$$u(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t = \\ = U_{m2} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t + \Delta U_m \cos \omega_1 t,$$

где $\Delta U_m = U_{m1} - U_{m2}$. Если принять обозначение $U_{m2} = U_{m0}$, то эти колебания могут быть выражены через сигнал (5.141) с параметрами (5.142):

$$u(t) = U_m(t) \cos \omega_0 t + \Delta U_m \cos (\omega_0 + \Omega_6/2)t. \quad (5.143)$$

Учитывая векторную диаграмму рис. 5.44, б, векторную диаграмму сигнала (5.143) можно представить в виде двух векторов, как показано на рис. 5.45. При вращении координатной плоскости с угловой скоростью ω_0 вектор $U_m(t)$ остается неподвижным, а вектор ΔU_m вращается с угловой скоростью $\Omega_6/2$. При этом конец суммарного вектора $U_{m\Sigma}$ перемещается по окружности, показанной пунктирной линией. Таким образом, значение этого вектора изменяется, т. е. $U_{m\Sigma} =$

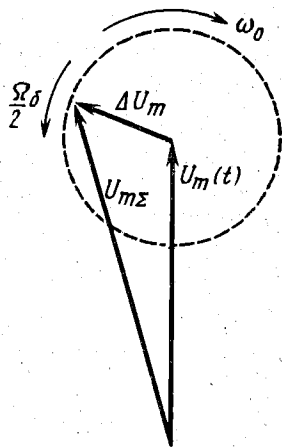


Рис. 5.45. Векторная диаграмма биений с изменяющейся частотой

$= U_{m\Sigma}(t)$, а сам он качается, подобно вектору на рис. 5.38, б. Такое качание означает изменение частоты сигнала (5.143). Следовательно, рассмотренные биения модулированы как по амплитуде, так и по частоте, т. е. являются АЧМ-сигналом. Его временная диаграмма подобна графику сигнала на рис. 1.6.

Вопросы для самоконтроля

5.1. Чем отличаются сигналы с дискретными гармоническими и негармоническими спектрами?

5.2. Чем отличаются сигналы с дискретными и сплошными спектрами?

5.3. Чем отличаются бесконечно протяженные сигналы с дискретными и сплошными спектрами?

5.4. Почему интеграл Фурье (5.18) для единичного скачка не принимает значения спектральной функции (5.29)?

5.5. Из каких вращающихся векторов состоят векторные диаграммы, отображающие интегральные преобразования Фурье (5.47) и (5.49)?

5.6. В чем заключаются преимущества и недостатки энергетического определения ширины спектра?

5.7. В чем заключаются преимущества и недостатки упрощенного аналитического определения ширины спектра?

5.8. Как связаны между собой энергетическая спектральная плотность

$$S_p = \frac{dP(f)}{df} \text{ и спектральная плотность } S(\omega) = \frac{dU_m}{d\omega} ?$$

5.9. Является ли симметричным дискретный негармонический спектр?

5.10. При каком условии приводятся мнимые составляющие слагаемых (5.45) вещественных сигналов $u(t)$?

5.11. Чем объясняется деление пополам интеграла свертки (5.77)?

5.12. Как отображается символически сигнал с дискретным спектром?

5.13. Как следует образовать контур интегрирования спектральной функции с полюсами в правой полуплоскости?

5.14. Как объяснить физически, что при одинаковой длительности t у косинус-квадратных импульсов спектр получается уже, чем у прямоугольных импульсов?

5.15. Как объяснить физически, что при одинаковой длительности t у косинусоидальных импульсов спектр получается уже, чем у косинус-квадратных импульсов, и почему при одинаковой энергетической длительности этих импульсов результат получается обратным?

5.16. Какие высшие гармоники следует учитывать при практическом определении коэффициента нелинейных искажений (5.120)?

5.17. При каком условии коэффициенты нелинейных искажений по напряжению и по току имеют одинаковые значения?

5.18. Как отличаются количественно коэффициенты нелинейных искажений по напряжению и по току в емкостном элементе?

5.19. Как отличаются количественно коэффициенты нелинейных искажений по напряжению и по току в индуктивном элементе?

5.20. В каких случаях модулированные сигналы являются периодическими и квазипериодическими?

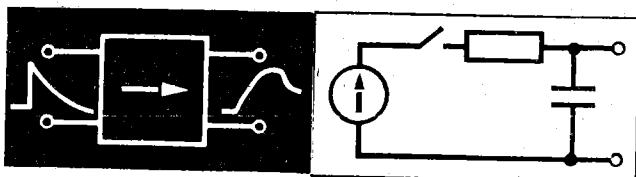
5.21. В каких случаях АМ-сигнал имеет дискретный, сплошной и смешанный спектр?

5.22. Что произойдет с АМ-сигналом при увеличении глубины модуляции до значения $m > 1$?

5.23. Какой физический смысл имеют индексы частотной и фазовой модуляции?

5.24. Какую размерность имеют коэффициенты пропорциональности a в уравнениях (5.128) и (5.137)?

5.25. При каких условиях максимальной амплитуде биений соответствуют максимальное и минимальное значения частоты АЧМ-сигнала?



Анализ процессов в электрических цепях

При анализе процессов в цепях подлежит определению реакция (отклик) цепи на входное воздействие в виде сигнала заданной формы. Эта реакция выражается в значениях тех или иных напряжений $u(t)$ и токов $i(t)$ в различные моменты времени. В гл. 3 были рассмотрены методы определения постоянных и гармонических напряжений и токов. Определение мгновенных значений напряжения и тока сложной формы производится специальными методами, которые рассматриваются в настоящей главе. К ним относятся *спектральные, временные и операторные методы*.

Среди разнообразных процессов в цепях важное место занимают так называемые переходные процессы, которые возникают при коммутации цепей. Эти процессы также изучаются в данной главе.

При анализе процессов устанавливается влияние на них параметров цепи. Поэтому говорят также об анализе электрических цепей.

§ 6.1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

При спектральном анализе процессов вместо изменения сигналов в цепи рассматривается изменение их спектров. Об их изменениях судят по спектральным параметрам и характеристикам цепи, которые определяют изменение спектральных составляющих сигнала с разными частотами. При этом используют аналитические, численные и другие методы расчета спектров. Все они образуют группу спектральных методов анализа. К ним относится также метод анализа процессов с помощью спектров, состоящих, например, из прямоугольных составляющих, показанных на рис. 1.7. Подобные составляющие описываются функциями Уолша, а спектры из таких составляющих называются спектрами Уолша (здесь они не описываются).

1. **Передаточные функции.** Спектр входного воздействия $e(t)$ или $j(t)$ будем обозначать $\hat{S}_{вх}(\omega)$. Реакцию цепи на такое воздействие обозначим $\hat{S}_{вых}(\omega)$, понимая под этим спектр напряжения $u(t)$ или тока $i(t)$ отклика в каком-либо участке цепи:

$$e(t), j(t) \doteq \hat{S}_{вх}(\omega) \rightarrow u(t), i(t) \doteq \hat{S}_{вых}(\omega). \quad (6.1)$$

Независимо от размерности этих величин отношение спектральных функций (6.1) на произвольной частоте ω будем рассматривать как *комплексную передаточную функцию цепи*

$$\underline{T}(\omega) = \dot{S}_{\text{вых}}(\omega) / \dot{S}_{\text{вх}}(\omega) = T(\omega)e^{j\theta(\omega)} = T_A(\omega) + jT_B(\omega). \quad (6.2)$$

Здесь

$$T(\omega) = \sqrt{T_A^2(\omega) + T_B^2(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \text{Arctg}(T_B(\omega)/T_A(\omega)) \quad (6.3)$$

— соответственно передача и фаза цепи*,

$$T_A(\omega) = T(\omega) \cos \theta(\omega), \quad T_B(\omega) = T(\omega) \sin \theta(\omega) \quad (6.4)$$

— вещественная и мнимая составляющие передаточной функции.

Частотная зависимость $T(\omega)$ называется амплитудно-частотной или частотной характеристикой цепи, а частотная зависимость $\theta(\omega)$ — фазочастотной или фазовой характеристикой цепи. Обе эти зависимости объединяются под названием спектральных характеристик цепи.

Согласно определениям (6.2) и (5.19) реакция цепи на входное воздействие определяется через ее передаточную функцию:

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \underline{T}(\omega)\dot{S}_{\text{вх}}(\omega), \quad (6.5)$$

$$S_{\text{вых}}(\omega) = T(\omega)S_{\text{вх}}(\omega), \quad -\psi_{\text{вых}}(\omega) = -\psi_{\text{вх}}(\omega) + \theta(\omega). \quad (6.6)$$

Поскольку любые спектры обладают свойствами симметрии (5.23), из равенств (6.6) вытекают свойства симметрии спектральных характеристик (6.3):

$$T(-\omega) = T(\omega), \quad \theta(-\omega) = -\theta(\omega). \quad (6.7)$$

Из равенств (6.4), (6.7) следует также вывод о четности и нечетности вещественной и мнимой частей передаточной функции:

$$T_A(-\omega) = T_A(\omega), \quad T_B(-\omega) = -T_B(\omega). \quad (6.8)$$

Равенства (6.8) согласуются со свойствами (5.24).

2. Расчет цепей спектральным методом. Расчет цепей спектральным методом осуществляют в четыре этапа. Сначала определяют передаточную функцию цепи. Затем находят спектр входного сигнала, как описано в § 5.4.1, вычисляя спектр выходного сигнала по формуле (6.5) и производят обратное преобразование этого спектра, как показано в § 5.2.1 и 5.2.2.

Этот порядок расчета соблюдается при спектрах любого вида, поскольку определение передаточной функции (6.2) распространяется и на дискретные спектры. В последнем случае возможен переход от спектральных функций к комплексным амплитудам спектральных составляющих сигнала. Отсюда следует, что *передаточные функции при сплошных спектрах сохраняют значения соответствующих комплексных параметров цепи, которые опре-*

* Выбор значения $\theta(\omega)$ в том или ином квадранте производится с учетом физических свойств цепи (см. § 3.2.3).

деляют изменение в цепи комплексных амплитуд гармонических колебаний разных частот.

Например, передаточными функциями являются такие ранее рассмотренные параметры, как коэффициент передачи (3.28), сопротивление передачи (3.193), коэффициенты трансформации (3.135), сопротивление и проводимость (3.21) и др. Таким образом, при любой форме сигналов передаточные функции определяются как отношение комплексных амплитуд гармонических напряжений и токов, соответствующих реакции и входному воздействию в цепи:

$$\begin{aligned} \underline{T}(\omega) &= \dot{U}(\omega)/\dot{E}(\omega), \quad \underline{I}(\omega) = \dot{I}(\omega)/\dot{E}(\omega), \quad \underline{U}(\omega) = \dot{U}(\omega)/\dot{I}(\omega), \\ \underline{I}(\omega) &= \dot{I}(\omega)/\dot{I}(\omega). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Рассмотрим в качестве примера простейшую цепь, изображенную на рис. 6.1, а, в которой надо определить ток $i(t)$ при воздействии сигнала $e(t) = 1(t)e^{-\beta t}$. На первом этапе расчета представляем цепь, как показано на рис. 6.1, б, и по второй формуле (6.9) находим передаточную функцию

$$\underline{T}(\omega) = \dot{I}(\omega)/\dot{E}(\omega) = 1/\underline{Z}(\omega) = 1/(R + j\omega L).$$

На втором этапе в соответствии с заданным сигналом (5.26) и первым равенством (5.27) определяем спектральную функцию

$$\dot{S}_{\text{вх}}(\omega) = 1/\pi(\beta + j\omega).$$

Полученные соотношения позволяют определить на третьем этапе спектральную функцию (6.5):

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = 1/\pi L(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega), \quad S_{\text{вых}}(p) = F_1(p)/\pi F_2(p),$$

где $F_1(p) = 1/L$, $F_2(p) = (\alpha + p)(\beta + p)$, а $\alpha = R/L$ — параметр RL -цепи, имеющий размерность $[c^{-1}]$.

Полином $F_2(p)$ имеет корни $p_1 = -\alpha$ и $p_2 = -\beta$. Это позволяет на четвертом этапе определить по формуле разложения (5.55) искомую реакцию цепи:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \left(\frac{e^{\rho t}}{2\rho + \alpha + \beta} \Big|_{\rho = -\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\rho t}}{2\rho + \alpha + \beta} \Big|_{\rho = -\beta} \right), \end{aligned}$$

или

$$i(t) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{R - \beta L}. \quad (6.10)$$

График изменения этого тока при $\beta < R/L$ показан на рис. 6.1, в. Если же $\beta = \alpha = R/L$, то функция $S_{\text{вых}}(p)$ имеет два кратных полюса. При этом следует

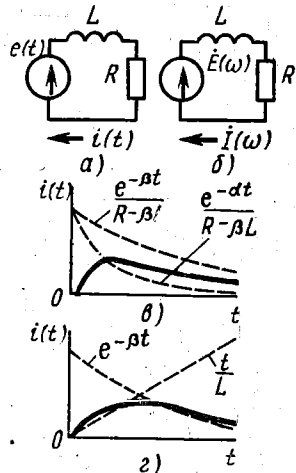


Рис. 6.1. К расчету цепи спектральным методом

применить формулу разложения (5.61) при $m_k = 2$, $r = 1$. Тогда получаем другую искомую реакцию цепи:

$$i(t) = \frac{1}{L} \frac{d}{dp} e^{pt} \Big|_{p=-\beta} = \frac{1}{L} t e^{-\beta t} = \frac{1}{L} t e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (6.11)$$

График изменения этого тока показан на рис. 6.1, *з*. Из сравнения этого графика с рис. 6.1, *в* видно, что реакции (6.10) и (6.11), различаясь количественно, имеют качественно одинаковый характер временной зависимости.

3. Нули и полюсы передаточной функции. В общем случае передаточная функция характеризует передачу сигнала из одного контура цепи в другой. При этом входное воздействие может быть сведено к воздействию источников напряжения, а реакция цепи может рассматриваться в виде тока в выходном контуре цепи. Тогда согласно определению сопротивления передачи (3.193) для передаточной функции можно написать обобщенное выражение

$$\underline{T}(\omega) = \Delta_Z(\omega) / \Delta_{kl}(\omega), \quad (6.12)$$

где $\Delta_Z(\omega)$ и $\Delta_{kl}(\omega)$ — определители, все элементы которых являются сопротивлениями ветвей цепи или их суммой. В общем случае эти сопротивления складываются из сопротивлений индуктивности, диссипативного элемента и емкости:

$$\underline{Z}_{kl}(\omega) = Z_{kl}(j\omega) = Z_{kl}(p) = pL + R + 1/pC = (LCp^2 + RCp + 1)/Cp. \quad (6.13)$$

При раскрытии определителей в соотношении (6.12) производится конечное число элементарных арифметических операций над рациональными функциями вида (6.13). Следовательно, в общем случае передаточная функция цепи описывается дробно-рациональным выражением

$$\underline{T}(\omega) = T(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad F_1(p) = \sum_{k=0}^m a_k p^k, \quad F_2(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad (6.14)$$

где a_k , b_k — вещественные коэффициенты.

Корни p_k уравнений

$$F_1(p) = 0, \quad F_2(p) = 0 \quad (6.15)$$

называются соответственно нулями и полюсами передаточной функции (6.14). В своих нулях и полюсах передаточная функция принимает соответственно нулевое и бесконечно большое значения. В общем случае нули и полюсы являются комплексными величинами (частотами).

Из соотношений (6.5), (6.14) следует, что корни уравнений (6.15) являются также нулями и полюсами реакции цепи $S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вых}}(p)$. В частном случае эта реакция может соответствовать «полубесконечному» отклику цепи на входное воздействие в виде, например, сигнала (5.26). Примерами такого откли-

ка являются токи (6.10) и (6.11). В реальной цепи «полубесконечный» отклик должен затухать, т. е. убывать во времени, и его спектральная функция имеет полюсы, удовлетворяющие условию (5.46).

Таким образом, полюсы передаточной функции реальной цепи могут располагаться только в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$. На нули передаточной функции не накладывается такого ограничения. Поэтому они могут находиться в любой части комплексной плоскости.

Последний вывод не распространяется на передаточные функции особой разновидности, для которых входное воздействие и реакция цепи на это воздействие являются взаимозаменяемыми. К особым передаточным функциям относятся, в частности, входное сопротивление и входная проводимость цепи, которые называются входными функциями цепи. Действительно, согласно закону Ома (3.19) и формулам (6.9) в двухполюснике входным воздействием может являться и ток $I(\omega) = I(\omega)$, и напряжение $U(\omega) = E(\omega)$.

В силу взаимозаменяемости указанных величин полюсы сопротивления являются нулями проводимости и наоборот. Поэтому как полюсы, так и нули $Z(p)$ и $Y(p)$ могут располагаться только в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$.

Если пренебречь потерями в цепи, то в ней возможны отклики в виде неубывающих (но и не нарастающих) сигналов, которые имеют спектральные функции с полюсами на мнимой оси плоскости p (см. § 5.1.7). Поэтому полюсы передаточных функций реактивных цепей, а также нули и полюсы их входных функций должны находиться на мнимой оси комплексной плоскости p .

4. Минимально-фазовые цепи. Рассмотрим цепь, передаточная функция которой имеет часть нулей в правой полуплоскости. При этом полином $F_1(p)$ в числителе передаточной функции (6.14) можно разбить на два сомножителя — $F_0(p)$ и $F_\phi(-p)$, из которых полином $F_0(p)$ не имеет корней в правой полуплоскости, а полином $F_\phi(-p)$ имеет корни только в правой полуплоскости. Тогда передаточная функция (6.14) представляется в виде

$$T(p) = F_0(p)F_\phi(-p)/F_2(p) = T_0(p)T_\phi(p), \quad (6.16)$$

где

$$T_0(p) = F_0(p)F_\phi(p)/F_2(p), \quad T_\phi(p) = F_\phi(-p)/F_\phi(p). \quad (6.17)$$

Полином $F_\phi(p)$, полученный из полинома $F_\phi(-p)$ переменной знака p , имеет корни только в левой полуплоскости, поскольку такая переменная знака перемещает корни p_k из правой полуплоскости в левую, как показано на рис. 6.2. Следовательно, функция $T_0(p)$ не содержит нулей в правой полуплоскости, а обе рациональные дроби (6.17) являются передаточными функциями некоторых цепей, не содержащими полюсов в правой полуплоскости. Поэтому цепь с передаточной функцией (6.16) можно разбить на две цепи с передаточными функциями (6.17); как показано на рис. 6.3.

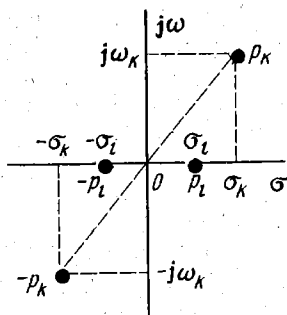


Рис. 6.2. Перемещение корней полинома из правой полуплоскости в левую

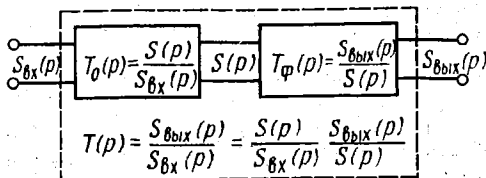


Рис. 6.3. Разбивка произвольной цепи на минимально-фазовую цепь и фазовый контур

Передаточная функция $T_{\phi}(p)$ обладает специфическими свойствами. Представим функции $F_{\phi}(\pm p)$ в виде суммы четного и нечетного полиномов. При этом видно, что $F_{\phi}(p) = F_{\phi}(\omega) = F_A(\omega) + jF_B(\omega)$ и $F_{\phi}(-p) = F_{\phi}(-\omega) = F_A(\omega) - jF_B(\omega)$ являются комплексно сопряженными полиномами. Тогда получаем

$$T_{\phi}(\omega) = T_{\phi}(\omega)e^{j\theta_{\phi}(\omega)} = \frac{F_A(\omega) - jF_B(\omega)}{F_A(\omega) + jF_B(\omega)}, \quad (6.18)$$

$$T_{\phi}(\omega) = \sqrt{\frac{F_A^2(\omega) + F_B^2(\omega)}{F_A^2(\omega) + F_B^2(\omega)}} = 1, \quad \theta_{\phi}(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \frac{F_B(\omega)}{F_A(\omega)}. \quad (6.19)$$

Таким образом, цепь с передаточной функцией (6.18) не изменяет спектральную плотность проходящего сигнала, как это следует из первых равенств (6.6), (6.19). Согласно же вторым равенствам (6.6), (6.19) эта цепь изменяет фазовый спектр сигнала. В соответствии с указанными свойствами *цепь с передаточной функцией (6.18) получила название фазового контура.*

Выделение фазового контура из общей цепи с передаточной функцией (6.16) позволило свести к минимуму фазовые сдвиги в оставшейся цепи с первой передаточной функцией (6.17). *Передаточная функция, не содержащая ни полюсов, ни нулей в правой полуплоскости, называется функцией минимальной фазы, а цепь с такой передаточной функцией — минимально-фазовой цепью. Цепь с нулями передаточной функции в правой полуплоскости называется неминимально-фазовой.*

5. Связь между спектральными характеристиками цепи. Из § 6.1.4 следует, что, подключая фазовые контуры к цепи, можно изменять ее фазовую характеристику при неизменной частотной характеристике. Однако при этом цепь перестает быть минимально-фазовой. *В цепи минимально-фазового типа невозможно изменять фазовую характеристику без изменения частотной характеристики и наоборот, поскольку они зависят друг от друга. Для определения этой зависимости спектральные характеристики цепи следует рассматривать совместно с сигналом.*

Рассмотрим простейший сигнал в виде единичного скачка (5.28), единственным параметром которого является нулевой момент включения. Согласно равенствам (6.5), (6.6) сплошной спектр (5.29) в цепи с передаточной функцией (6.2) принимает значение

$$S_{\text{вых}}(\omega) = T(\omega)/\pi\omega, \quad -\psi_{\text{вых}}(\omega) = \theta(\omega) - \pi/2. \quad (6.20)$$

Полный спектр единичного скачка, являясь смешанным, содержит еще постоянную составляющую (5.30), которая на выходе цепи дает постоянное напряжение

$$U_{0 \text{ вых}} = 0,5T(\omega)|_{\omega=0} = T(0)/2. \quad (6.21)$$

Подставив соотношения (6.20) в уравнение (5.50) и прибавив постоянную составляющую (6.21), получим сигнал на выходе цепи:

$$u(t) = \frac{1}{2} T(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \quad (6.22)$$

Поскольку единичный скачок существует при $t \geq 0$, отклик цепи при $t < 0$ в этом случае равен нулю. Поэтому, заменив переменную t на $-\tau$, при $\tau > 0$ из равенства (6.22) находим

$$\frac{1}{2} T(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\omega)}{\omega} \sin[\theta(\omega) - \tau\omega] d\omega = 0.$$

Продифференцировав это равенство по параметру τ , найдем искомую связь между частотной и фазовой характеристиками цепи:

$$\int_0^{\infty} T(\omega) \cos[\theta(\omega) - \tau\omega] d\omega = 0. \quad (6.23)$$

Раскрыв здесь косинус разности двух аргументов, с учетом формул (6.4) получим уравнение связи между четной и нечетной составляющими передаточной функции:

$$\int_0^{\infty} T_A(\omega) \cos \omega\tau d\omega = - \int_0^{\infty} T_B(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (6.24)$$

Уравнения (6.23), (6.24) устанавливают однозначную связь между спектральными характеристиками только для минимально-фазовых цепей. Действительно, равенство (6.23) не нарушается при неизменной частотной характеристике $T(\omega)$, если фаза $\theta(\omega)$ получает приращение $k\pi$. Такое же приращение фазы при неизменной частотной характеристике является свойством неминимально-фазовой цепи.

6. Идеальные спектральные характеристики. Форма спектральных характеристик определяет характер и величину частотных и фазовых искажений сигналов в цепях. Эти искажения

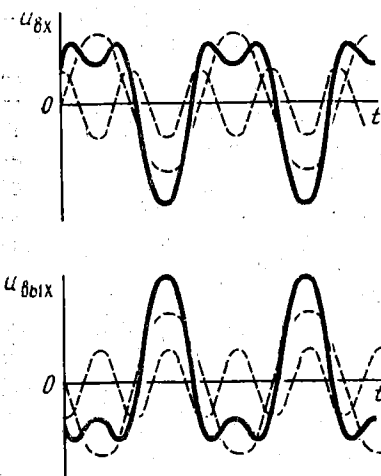


Рис. 6.4. Изменение полярности сигнала

отсутствуют при сохранении формы сигнала, отображающей информацию (см. § 1.4.1). Форма же сигнала сохраняется только при его линейных преобразованиях вида (5.71), (5.72):

$$u_{\text{вых}}(t) = T_0 u_{\text{вх}}(t - \tau_0) \doteq \doteq \hat{S}_{\text{вых}}(\omega) = T_0 \hat{S}_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\omega\tau_0},$$

где T_0 и τ_0 — константы.

Сопоставив это соотношение с определениями (6.2) и (6.5), (6.6), найдем условия неискаженной передачи сигнала через цепь:

$$\begin{aligned} T(\omega) &= T_0 e^{-j\omega\tau_0}, \quad T(\omega) = T_0 = \text{const}, \\ \theta(\omega) &= -\tau_0\omega. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Следует учесть, что сдвиг фаз всех спектральных составляющих на угол $k\pi$ либо не отражается на сигнале (при $k = 2l$), либо приводит к изменению его полярности (при $k = 2l + 1$), как показано на рис. 6.4. Поэтому фазовая характеристика (6.25) может иметь другой вид:

$$\theta(\omega) = k\pi - \tau_0\omega. \quad (6.26)$$

Второе равенство (6.25) является условием отсутствия частотных искажений. Последнее равенство (6.25), как и равенство (6.26), является условием отсутствия фазовых искажений.

Частотные и фазовые характеристики (6.25), (6.26), при которых отсутствуют частотные и фазовые искажения сигналов, называются идеальными спектральными характеристиками. Они показаны на рис. 6.5. Идеальная частотная характеристика является горизонтальной прямой линией, а идеальная фазовая харак-

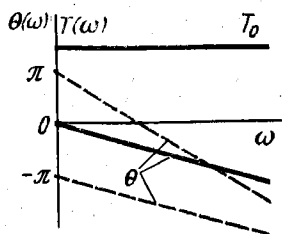


Рис. 6.5. Идеальные спектральные характеристики

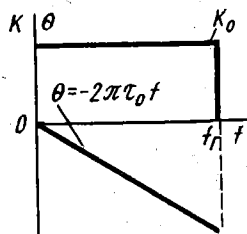


Рис. 6.6. Спектральные характеристики идеального фильтра

теристика — прямой линией, проходящей через начало координат или отсекающей на оси ординат отрезок, кратный углу π .

7. **Искажения сигналов в идеальном фильтре.** Частотная характеристика идеального фильтра (см. рис. 4.2, а) в пределах полосы пропускания удовлетворяет условию отсутствия частотных искажений (6.25). Чтобы в идеальном фильтре отсутствовали и фазовые искажения, его фазовая характеристика в пределах полосы пропускания также должна удовлетворять условию (6.25), как показано на рис. 6.6. При таких спектральных характеристиках идеальный фильтр не искажает сигналы, спектр которых не выходит за пределы полосы пропускания.

Однако при бесконечных спектрах идеальный фильтр искажает сигналы. Рассмотрим для примера прохождение единичного скачка (5.28) через идеальный фильтр с характеристиками, изображенными на рис. 6.6. В этом случае сигнал (6.22) на выходе фильтра описывается выражением

$$u(t) = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \int_0^{\omega_r} \frac{1}{\omega} \sin[(t - \tau_0)\omega] d\omega = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \text{Si } y,$$

где $\text{Si } y = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$ — интегральный синус (рис. 6.7); $x = (t - \tau_0)\omega$, $y = x_r = \omega_r(t - \tau_0)$ — новые переменные.

В соответствии с полученным выражением и принятыми обозначениями получаем на выходе фильтра сигнал, показанный на рис. 6.8. Этот сигнал искажен по сравнению с неискаженным скачком $K_0 \cdot 1(t - \tau_0)$, показанным на рис. 6.8 пунктирной линией. Такой неискаженный скачок получается только при характеристиках (6.25), не ограниченных полосой пропускания идеального фильтра.

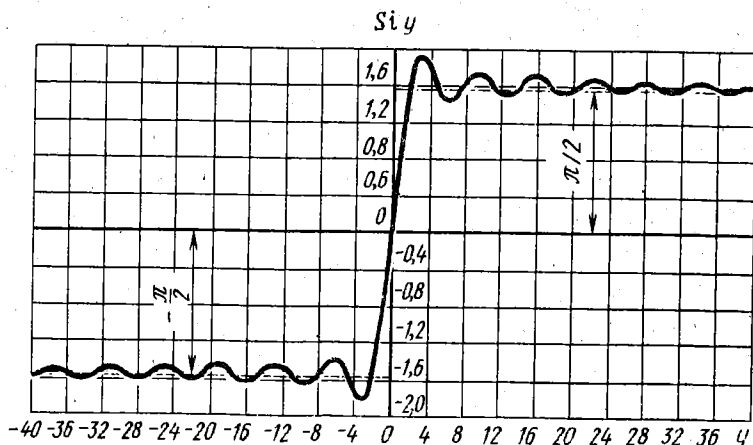


Рис. 6.7. График интегрального синуса

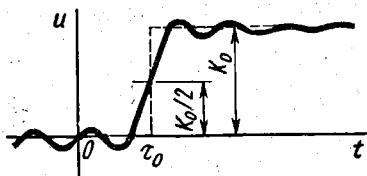


Рис. 6.8. Искажение единичного скачка в идеальном фильтре

в силу их взаимосвязанности. Действительно, для таких характеристик уравнение (6.23) принимает вид

$$\int_0^{\omega_r} \cos[(\tau + \tau_0)\omega] d\omega = \frac{\sin \omega_r(\tau + \tau_0)}{\tau + \tau_0} = 0.$$

Это равенство не соблюдается при произвольном (и переменном) значении τ .

Таким образом, в полосе пропускания реальных фильтров может быть достигнуто лишь некоторое приближение к идеальным спектральным характеристикам. Практически, как отмечалось, допускается неравномерность частотной характеристики в полосе пропускания фильтра порядка 3—6 дБ. Аналогично при прохождении через цепь, например, телевизионных сигналов допускается, чтобы ее фазовая характеристика отклонялась в полосе пропускания от прямой линии не более чем на 3—4°.

8. Искажения модулированных сигналов. Условия отсутствия фазовых искажений (6.25), (6.26) являются излишне жесткими по отношению к модулированным сигналам. При прохождении через цепь таких сигналов *существенным является сохранение не формы модулированных колебаний, а закона модуляции.* Применительно, например, к АМ-сигналу это означает, что искажения отсутствуют при сохранении формы его огибающих $\pm U_m(t)$ (см. рис. 1.5, а).

Рассмотрим изменения АМ-сигнала при спектральных характеристиках (6.2), удовлетворяющих условию симметрии относительно несущей частоты ω_0 (см. § 4.2.2):

$$T(\Delta\omega) = T(\Delta\omega)e^{j[\theta_0 + \Delta\theta(\Delta\omega)]}, \quad T(-\Delta\omega) = T(\Delta\omega), \quad \Delta\theta(-\Delta\omega) = -\Delta\theta(\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, $\theta_0 = \theta|_{\Delta\omega=0}$, $T|_{\Delta\omega=0} = T_0$.

При этом сигналу (1.21) соответствует на выходе цепи измененный сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = T_0 U_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi_0 + \theta_0) + \frac{T(\Omega)}{2} m \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi_0 + \theta_0 - \psi_m - \Delta\theta(\Omega)] + \frac{T(\Omega)}{2} m \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi_0 + \theta_0 + \psi_m + \Delta\theta(\Omega)],$$

или

$$u_{\text{вых}}(t) = T_0 U_{m0} [1 + m' \cos(\Omega t + \psi_m + \Delta\theta(\Omega))] \cos(\omega_0 t + \psi_0 + \theta_0),$$

где $m' = mT(\Omega)/T_0$ и принято $\Delta\omega = \Omega$.

Искажения полученного сигнала являются нереальными в том отношении, что он возникает на выходе фильтра раньше появления скачка на входе. Это обусловлено нереальностью идеальных спектральных характеристик, которые не могут существовать в ограниченной полосе частот

Аналогично при входном сигнале (5.122) на выходе цепи получается измененный сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = T_0 U_{m0} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m'_k \cos(k\Omega t - \psi_k + \Delta\theta(k\Omega)) \right] \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

где $m'_k = m_k T(k\Omega)/T_0$, $k\Omega = \Delta\omega$.

В полученном соотношении форма огибающей определяется видом суммы Σ . Поэтому условия отсутствия искажений (6.25) для закона модуляции принимают следующий вид (при переходе к обозначению $\Delta\omega$):

$$T(\Delta\omega) = T_0 = \text{const}, \quad \Delta\theta(\Delta\omega) = -\tau_0 \Delta\omega, \quad \theta(\Delta\omega) = \theta_0 - \tau_0 \Delta\omega. \quad (6.27)$$

Таким образом, условие отсутствия частотных искажений закона модуляции не отличается от условия (6.25). Идеальная же фазовая характеристика (6.27) остается прямой линией, но отличается от фазовых характеристик (6.25), (6.26) произвольной ориентацией. Действительно, при $\omega = 0$ эта фазовая характеристика имеет произвольное значение $\theta(0) = \theta_0 + \tau_0 \omega_0$.

При нарушении условий (6.27) АМ-сигнал (его закон модуляции) претерпевает обычные частотные и фазовые искажения, если спектральные характеристики симметричны относительно несущей частоты сигнала. Если же при нарушении условий (6.27) указанная симметрия не сохраняется, как показано на рис. 6.9, а, то искажается даже гармонический закон модуляции.

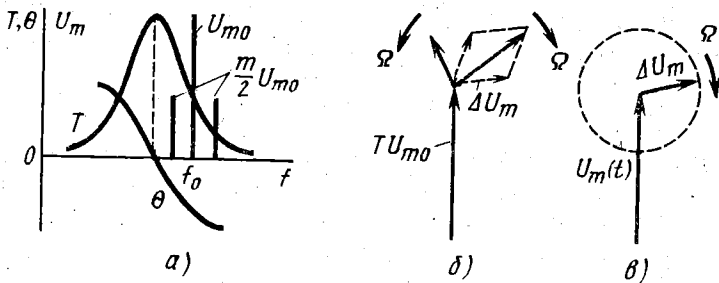


Рис. 6.9. Нарушение симметрии спектра АМ-сигнала

Действительно, при этом нарушается симметрия спектра АМ-сигнала, так что вместо симметричной векторной диаграммы (см. рис. 5.32, б) получается несимметричная диаграмма (рис. 6.9, б). При этом несимметричный вектор, например, нижней боковой составляющей можно разбить на два вектора, как показано пунктирными линиями на рис. 6.9, б. Тогда симметричные векторы образуют обычный АМ-сигнал с гармонической модуляцией по закону $U_m(t)$, как показано на рис. 6.9, в. Дополнительный же вращающийся вектор ΔU_m приводит к биениям, подобным биениям на рис. 5.45. Это означает не только появле-

ние паразитной частотной модуляции, но и изменение гармонического закона амплитудной модуляции $U_m(t)$.

Это явление подобно искажению гармонических колебаний в нелинейной цепи. Таким образом, *в линейной цепи с несимметричными спектральными характеристиками закон модуляции АМ-сигналов претерпевает нелинейные искажения.*

Что касается ЧМ-сигналов, то их закон модуляции претерпевает нелинейные искажения при нарушении условий (6.27) даже в случае симметричных спектральных характеристик. Это обусловлено тем, что при любом изменении боковых спектральных составляющих ЧМ-сигнала с гармонической модуляцией нарушается закон качания его суммарного вектора на векторной диаграмме. Тем самым нарушается закон гармонической модуляции, что и означает его нелинейные искажения. Поэтому условия (6.27) являются также условиями отсутствия нелинейных искажений закона модуляции ЧМ-сигналов.

§ 6.2. ВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

При спектральных методах анализа цепей вместо изменения сигналов в цепи рассматривается изменение их спектров, а затем по измененному спектру определяется измененный сигнал. В отличие от спектральных методов при временных методах анализа цепей рассматривается непосредственно изменение самих сигналов во времени.

Среди временных методов анализа цепей можно выделить классический метод и метод временных характеристик. Временные характеристики подразделяются на переходные и импульсные характеристики, которым соответствуют специфические методы анализа.

1. Классический метод. *Классический метод анализа цепей основан на составлении дифференциальных уравнений, описывающих процессы в цепи, и интегрировании этих уравнений.* Указанные уравнения составляют относительно мгновенных значений напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ при заданных входных воздействиях $e(t)$ и $j(t)$, как это описано в § 2.4, 3.6. Этими напряжениями и токами могут являться узловые напряжения и токи ветвей, напряжения на элементах цепи и контурные токи и т. д.

Указанные дифференциальные уравнения описывают состояние цепи в различные моменты времени и называются уравнениями состояния. Частным случаем уравнений состояния цепи являются дифференциальные уравнения, составленные относительно переменных состояния (см. § 3.6.8).

Уравнения состояния можно решать различным образом, в частности с помощью ЭВМ, как описано в § 3.6.8 применительно к уравнениям, составленным относительно переменных состояния. Существуют также операторные методы решения уравнений состояния, как показано ниже. Характерной особенностью классического метода является именно способ решения уравнений состояния.

В простейших случаях состояние цепи описывается одним дифференциальным уравнением. В общем случае уравнения

состояния образуют систему дифференциальных уравнений. Пусть процессы в цепи описываются системой из двух уравнений состояния:

$$f_1(u, i, u', i') = \varphi_1(e, j), \quad f_2(u, i, u', i') = \varphi_2(e, j). \quad (6.28)$$

Эти уравнения помимо первых производных $u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$ и $i'(t) = \frac{di(t)}{dt}$ могут содержать вторые производные $u''(t)$, $i''(t)$ и другие производные высших порядков, что не отражается на способе решения.

Согласно классическому методу находят какое-либо частное решение системы (6.28) и общее решение однородных уравнений, полученных приравниванием нулю правых частей уравнений (6.28):

$$f_1(u, i, u', i') = 0, \quad f_2(u, i, u', i') = 0. \quad (6.29)$$

Напряжения и токи, определяемые частным решением уравнений (6.28), обусловлены вынуждающим воздействием источников $e(t)$, $j(t)$. Поэтому будем называть их *вынужденными напряжениями и токами* и обозначать соответственно $u_n(t)$, $i_n(t)$. Общее решение уравнений (6.29) дает напряжения и токи, которые существуют в цепи при отсутствии источников $e(t)$, $j(t)$. Поэтому будем называть их *свободными напряжениями и токами*. Со временем они должны убывать до нуля за счет потерь в цепи. Если свободные напряжения и токи имеют колебательный характер, то их называют *собственными колебаниями цепи*. В любой реальной цепи они также убывают во времени до нуля и называются *затухающими колебаниями*. Будем обозначать решения однородных уравнений $u_c(t)$, $i_c(t)$.

Согласно классическому методу полное решение уравнений состояния (6.28) определяется как сумма вынужденных и свободных напряжений и токов:

$$u(t) = u_n(t) + u_c(t), \quad i(t) = i_n(t) + i_c(t). \quad (6.30)$$

При интегрировании уравнений (6.29) появляются постоянные интегрирования в виде неизвестных констант. Для их определения используют начальные условия

$$u(t)|_{t=0} = u(0) = u_0, \quad i(t)|_{t=0} = i(0) = i_0. \quad (6.31)$$

При $u_0 = 0$, $i_0 = 0$ начальные условия называются нулевыми.

Начальные условия могут ограничивать также значения производных напряжений и токов в нулевой момент времени.

2. Расчет цепей классическим методом. Согласно описанному классическому методу расчет цепей осуществляют в четыре этапа. Сначала по законам Кирхгофа (2.31), (2.48) и законам токопрохождения (2.1), (2.6), (2.11) составляют уравнения состояния (6.28) и соответствующие им однородные уравнения (6.29).

На втором этапе ищут частное решение уравнений (6.28). Методы такого решения зависят от вида уравнений. Одним из универсальных методов является подстановка подходящих функций, обращающих эти дифференциальные уравнения в алгебраические. Вид функций можно выбирать, в частности, из физических соображений.

На третьем этапе ищут решение однородных уравнений (6.29). Существует универсальный метод такого решения, по которому оператор дифференцирования заменяют алгебраическим оператором p : $\frac{du}{dt} = pu$, $\frac{d^2u}{dt^2} = p^2u$ и т. д. При этом система уравнений (6.29) принимает вид

$$f_{11}(p)u + f_{12}(p)i = 0, \quad f_{21}(p)u + f_{22}(p)i = 0, \quad (6.32)$$

где $f_{ki}(p)$ — некоторые полиномы от p .

Уравнения (6.32) имеют ненулевые решения только в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$F_c(p) = \Delta(p) = \begin{vmatrix} f_{11}(p) & f_{12}(p) \\ f_{21}(p) & f_{22}(p) \end{vmatrix} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (6.33)$$

Это равенство называется *характеристическим уравнением цепи*, а функция $F_c(p)$ — *характеристическим полиномом*. При решении алгебраического уравнения (6.33) определяют корни характеристического уравнения p_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Здесь n — степень характеристического полинома, определяемая порядком дифференциальных уравнений (6.28) и (6.29). Эта степень называется *порядком цепи*. По найденным корням p_k находят искомое решение:

$$u_c(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad i_c(t) = \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t}, \quad (6.34)$$

где A_k, B_k — постоянные интегрирования. Константы B_k могут быть выражены через константы A_k при подстановке величин (6.34) в уравнения (6.29).

На четвертом этапе определяют постоянные интегрирования. Для этого подставляют в равенства (6.30) найденные значения u_c, i_c и (6.34), а также начальные условия (6.31) и решают полученную систему уравнений.

Существенно отметить, что корни p_k характеристического уравнения (6.33) могут быть либо вещественными ($p_k = \sigma_k$), либо комплексно сопряженными ($p_{k, k+1} = \sigma_k \pm j\omega_k$). Очевидно, для убывания во времени свободных составляющих (6.34) значения σ_k должны быть отрицательными: $\sigma_k = -\alpha_k < 0$ ($\alpha_k > 0$). Полиномы с вещественными коэффициентами, имеющие такие корни, называются полиномами Гурвица. Таким образом, *характеристический полином является полиномом Гурвица*.

Рассмотрим для примера цепь, изображенную на рис. 6.1, а, с входным воздействием $e(t) = 1(t)e^{-\beta t}$. Для нее ток $i(t)$ определя-

ется одним уравнением состояния

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e^{-\beta t}. \quad (6.35)$$

Отсюда получаем соответствующее однородное уравнение

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0. \quad (6.36)$$

Частным решением уравнения (6.35) является ток той же формы, что и э. д. с.: $i_b(t) = I_{\max} e^{-\beta t}$. Подставив это значение тока в уравнение (6.35), получим

$$-\beta L I_{\max} e^{-\beta t} + R I_{\max} e^{-\beta t} = e^{-\beta t}, \quad -\beta L I_{\max} + R I_{\max} = 1,$$

откуда

$$I_{\max} = \frac{1}{R - \beta L}, \quad i_b(t) = \frac{e^{-\beta t}}{R - \beta L}.$$

Для решения уравнения (6.36) составляем характеристическое уравнение:

$$pLi + Ri = 0, \quad pL + R = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = -\frac{R}{L} = -\alpha, \quad i_c(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{R}{L} t}, \quad i(t) = \frac{e^{-\beta t}}{R - \beta L} + Ae^{-\alpha t}.$$

Задавшись начальным условием $i(0) = 0$, из последнего равенства находим $A = -1/(R - \beta L)$. Таким образом, получаем полное решение

$$i(t) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{R - \beta L},$$

которое совпадает с формулой (6.10). Чтобы получить второе решение вида (6.11), в данном соотношении надо раскрыть неопределенность при $\beta \rightarrow R/L$.

3. Переходные характеристики цепи. При воздействии в цепи сигнала $e(t) = 1(t)$ или $j(t) = 1(t)$ напряжение или ток на входе цепи при $t \geq 0$ не изменяется. Однако во всех остальных участках цепи изменяются как напряжения $u(t)$, так и токи $i(t)$. При этом с течением времени цепь переходит из одного состояния в другое. Указанный переход можно охарактеризовать *переходными характеристиками*:

$$h(t) = u(t)/1(t), \quad h(t) = i(t)/1(t), \quad (6.37)$$

которые являются функциями времени и численно совпадают с соответствующими напряжениями (токами). Таким образом, *переходные характеристики численно являются откликом цепи на входное воздействие в виде единичного скачка*. Поэтому величины (6.37) будем тоже называть откликами цепи. В зависимости от вида источника сигнала отклик $h(t)$ может быть безразмерной величиной либо иметь размерность сопротивления (проводимости). В первом случае переходная характеристика $h(t)$ называется

ся также *переходным коэффициентом передачи* $K(t)$ по напряжению или по току, в двух последних случаях — *переходным сопротивлением* $Z(t)$ или *переходной проводимостью цепи* $Y(t)$.

Переходные характеристики цепи (6.37) связаны с ее соответствующими *передаточными функциями* (6.2), (6.9). Эта связь устанавливается с помощью соотношения (6.22). Поскольку напряжение (6.22) является откликом цепи на единичный скачок, по определению (6.37)

$$h(t) = \frac{1}{2} T(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \quad (6.38)$$

При известных спектральных характеристиках переходные характеристики могут быть вычислены по уравнению (6.38). Однако проще определять переходные характеристики непосредственно по отклику цепи на входное воздействие в виде единичного скачка. Например, учитывая, что при $\beta = 0$ сигнал (5.26) равен сигналу (5.28), по отклику (6.10) при $\beta = 0$ находим переходную проводимость RL -цепи (см. рис. 6.1, а):

$$h(t) = Y(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-at}). \quad (6.39)$$

Эта переходная характеристика показана на рис. 6.10.

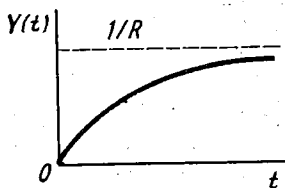


Рис. 6.10. График переходной проводимости RL -цепи

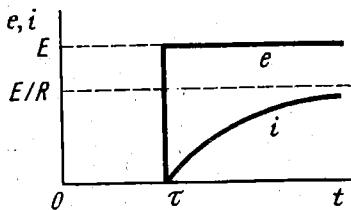


Рис. 6.11. Произвольный скачкообразный сигнал и отклик на него RL -цепи

4. Метод переходных характеристик. Пусть на входе цепи действует произвольный скачок $e(t) = E \cdot 1(t - \tau)$, показанный на рис. 6.11. Тогда из соотношений (5.71), (5.73) и (6.22) можно определить отклик цепи на это воздействие:

$$u(t) = \frac{E}{2} T(0) + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\omega)}{\omega} \sin[\omega(t - \tau) + \theta(\omega)] d\omega.$$

Отсюда с учетом уравнения (6.38) получаем

$$u(t) = E h(t - \tau), \quad (6.40)$$

где $h(t - \tau)$ — смещенная на τ переходная характеристика.

В соответствии с формулами (6.40) и (6.39) на рис. 6.11 показан отклик по току RL -цепи на воздействие $e(t) = E \cdot 1(t - \tau)$.

Переходные характеристики позволяют определять отклик цепи не только на скачкообразное, но и на произвольное непрерывное воздействие $e_n(t)$, которое равно нулю при $t < 0$. Будучи непрерывным на интервале $[0, t]$, $e_n(t)$ не имеет разрыва (скачка) также при $t = 0$, т. е. $e_n(0) = 0$. Для определения отклика представим непрерывный сигнал в виде суммы ступенчатых функций, как показано на рис. 6.12:

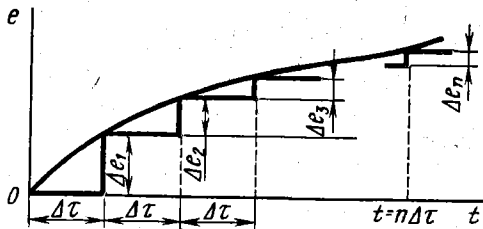


Рис. 6.12. Разбивка непрерывного сигнала на сумму скачков

$$e_n(t) = \Delta e_1 \cdot I(t - \Delta\tau) + \Delta e_2 \cdot I(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta e_n \cdot I(t - n\Delta\tau) = \\ = \sum_{k=1}^n \Delta e_k \cdot I(t - k\Delta\tau).$$

Согласно принципу суперпозиции отклик цепи на это воздействие равен сумме откликов вида (6.40):

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \Delta e_k h(t - k\Delta\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} h(t - k\Delta\tau) \Delta\tau.$$

В силу непрерывности сигнала $e_n(t)$ его можно дифференцировать и $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} = \frac{de_n(\tau)}{d\tau} = e_n'(\tau)$. Сделав в последней сумме предельный переход к интегралу при $\Delta\tau = d\tau$, $k\Delta\tau = \tau$ и $n\Delta\tau = t$, получим интеграл Дюамеля:

$$u(t) = \int_0^t e_n'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.41)$$

Метод переходных характеристик заключается в совместном использовании соотношений (6.40) и (6.41) для нахождения отклика цепи на произвольное входное воздействие $e(t)$. Если этот входной сигнал имеет конечные разрывы (рис. 6.13, а), то его представляют в виде суммы ступенчатых сигналов $e_c(t)$ (рис. 6.13, б) и непрерывного сигнала $e_n(t)$ (рис. 6.13, в). При этом отклик цепи на заданное входное воздействие определяется по формулам (6.40) и (6.41) в соответствии с принципом суперпозиции:

$$u(t) = \Delta E_0 h(t) - \Delta E_1 h(t - t_1) + \int_0^t e_n'(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Обобщив эту формулу на случай n разрывов величиной ΔE_k в моменты времени t_k ($k = 1, 2, \dots, n$), получим окончательно

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \Delta E_k h(t - t_k) + \int_0^t e_n'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.42)$$

В качестве примера рассмотрим определение тока в прежней RL -цепи (см. рис. 6.1, *a*) с входным воздействием $e(t) = 1(t)e^{-\beta t}$. При этом в формулу (6.42) подставляем ток $i(t)$ вместо напряжения $u(t)$, а в качестве переходной характеристики $h(t)$ используем переходную проводимость (6.39). Разобьем сигнал $e(t)$ (рис. 6.14, *a*) на две составляющие, как показано на рис. 6.14, *b*. Тогда $e_k(\tau) = e^{-\beta\tau} - 1$ и в формуле (6.42) $n = 1$, $t_k = t_1 = 0$, $\Delta E_k = \Delta E_1 = 1$, $e_k(\tau) = -\beta e^{-\beta\tau}$. Отсюда определяется реакция цепи:

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{\beta}{R} \int_0^t e^{-\beta\tau} [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau.$$

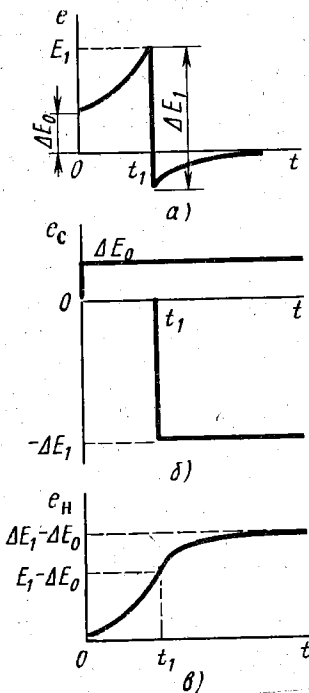
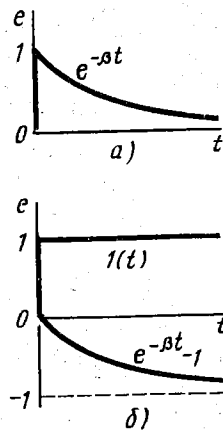


Рис. 6.13. Разбивка разрывного сигнала на сумму ступенчатого и непрерывного сигналов

Рис. 6.14. Разбивка экспоненциального сигнала на два составляющих сигнала



Произведя интегрирование и приведя подобные члены, получим прежний отклик цепи (6.10). Здесь, как и в классическом методе (см. § 6.2.2), для получения второго решения вида (6.11) требуется раскрыть неопределенность в полученном соотношении при $\beta \rightarrow R/L$.

5. Импульсные характеристики цепи. Рассмотрим импульс единичной площади (единичный импульс), показанный на рис. 6.15, *a**. Его можно образовать путем суперпозиции двух скачков $S(t)$, изображенных на рис. 6.15, *b*. Приняв для единично-

* От единичного импульса следует отличать Δ -импульс единичной высоты $\Delta(t) = I(t) - I(t - \Delta t)$.

го импульса обозначение $\delta_1(t)$, можно описать его следующим образом:

$$\delta_1(t) = \frac{I(t) - I(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1$$

Эти два равенства сохраняются при любых значениях Δt , как показано на рис. 6.15, в. В частности, при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем так называемый *дельта-импульс* $\delta(t)$, или δ -импульс, равный бесконечности при $t=0$ и нулю при $t \neq 0$:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t) - I(t - \Delta t)}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1.$$

Первое равенство, по определению, является производной единичного скачка, а второе определяет площадь дельта-импульса. Таким образом, *дельта-импульс является импульсом нулевой длительности с единичной площадью и равен производной единичного скачка*:

$$\delta(t) = \frac{dI(t)}{dt}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6.43)$$

Величина, определяемая таким образом, называется также дельта-функцией (δ -функцией) или функцией Дирака. Эта функция при замене переменной t на $t - \tau$ определяет значение смещенного на τ дельта-импульса:

$$\delta(t - \tau) = \frac{dI(t - \tau)}{dt}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (6.44)$$

Умножение смещенного δ -импульса на некоторую функцию $f(t)$ равносильно его умножению на постоянную величину $f(\tau)$, поскольку $\delta(t - \tau) = 0$ при $t \neq \tau$. Поэтому из соотношений (6.44) следует:

$$f(t)\delta(t - \tau) = f(\tau) \frac{dI(t - \tau)}{dt}, \quad \int_0^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (6.44')$$

Спектр дельта-импульса (6.43), не существующего при $t \neq 0$, может быть найден по теореме дифференцирования (5.76) или из общего выражения (5.18) при $e^{-j\omega t}|_{t=0} = 1$. Учитывая при этом интегральное равенство (6.43), получаем $S_{\delta}(\omega) = 1/j\omega$.

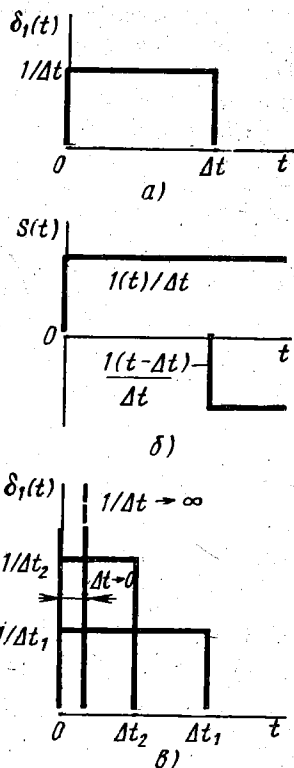


Рис. 6.15. Образование дельта-импульса

Отсюда по теореме запаздывания (5.72) определяется спектр смещенного дельта-импульса (6.44): $\hat{S}_{\delta, \tau}(\omega) = e^{-j\omega\tau}/\pi$.

Последовательность дельта-импульсов со случайными временными сдвигами и соответственно со случайными фазовым спектром образует шумоподобный сигнал, обладающий свойствами так называемого белого шума. Как видно из полученных спектров, характерной особенностью такого шума является его постоянная спектральная плотность во всем бесконечном частотном диапазоне. Значение этой спектральной плотности можно изменять в соответствии с равенством (6.44').

Дельта-импульсы (6.43) и (6.44) могут быть использованы в качестве входного воздействия в цепи. Хотя эти импульсы бесконечно велики, отклики на них имеют конечное значение. Это объясняется их бесконечно малой длительностью и конечной площадью, определяемой интегралами (6.43), (6.44).

Конечный отклик цепи $h_{\delta}(t)$ на дельта-импульс $\delta(t)$ может быть получен из отклика цепи $h(t)$ на единичный скачок $I(t)$. В силу линейности цепи замена любого входного воздействия его производной приводит к замене отклика цепи на его производную. Поэтому *замена входного воздействия $I(t)$ его производной $\delta(t)$ означает замену отклика цепи $h(t)$ на отклик $h_{\delta}(t)$, являющийся производной $h(t)$:*

$$h_{\delta}(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(\omega) \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \quad (6.45)$$

Последнее равенство получено с учетом формулы (6.38). Соотношение (6.45) подтверждает конечность отклика $h_{\delta}(t)$.

Из соотношения (6.45) заменой t на $t - \tau$ может быть получен отклик цепи на смещенный дельта-импульс (6.44). При этом можно производить дифференцирование по любой из переменных t или τ . Следует лишь учитывать, что указанные переменные в исходном соотношении имеют разные знаки. Поэтому

$$h_{\delta}(t - \tau) = \frac{dh(t - \tau)}{dt} = -\frac{dh(t - \tau)}{d\tau}. \quad (6.46)$$

Сигналы-отклики (6.45) и (6.46) называются импульсными характеристиками цепи. Эти характеристики, например для RL -цепи (см. рис. 6.1, а), имеют значения

$$h_{\delta}(t) = Y_{\delta}(t) = \frac{1}{L} e^{-at}, \quad h_{\delta}(t - \tau) = Y_{\delta}(t - \tau) = \frac{1}{L} e^{-a(t-\tau)}, \quad (6.47)$$

которые получаются из формулы (6.39) и определений (6.45), (6.46).

6. Метод импульсных характеристик. Импульсные характеристики позволяют определить реакцию цепи на произвольное непрерывное воздействие $e_n(t)$. Для этого в соотношении (6.41) произведем интегрирование по частям, приняв $e_n''(\tau) d\tau = de_n(\tau)$:

$$u(t) = e_n(\tau)h(t - \tau)|_0^t - \int_0^t e_n(\tau)dh(t - \tau) =$$

$$= e_n(t)h(0) - e_n(0)h(t) - \int_0^t e_n(\tau) \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Здесь $e_n(0) = 0$ в силу непрерывности $e_n(t)$ на всем интервале $[0, t]$. Поэтому с учетом определения (6.46) получаем разность интеграла Дюамеля в виде

$$u(t) = e_n(t)h(0) + \int_0^t e_n(\tau)h_s(t-\tau)d\tau. \quad (6.48)$$

Поскольку здесь не производится дифференцирования сигнала, как в интеграле (6.41), соотношение (6.48) можно распространить на случай произвольных разрывных сигналов $e(t)$. При этом влияние скачка $h(0)$ переходной характеристики учтено первым слагаемым. Поэтому при определении импульсной характеристики по первой формуле (6.45) указанный скачок не надо дифференцировать, а в (6.48) надо интегрировать при $\tau > 0$:

$$u(t) = e(t)h(0) + \int_{0+}^t e(\tau)h_s(t-\tau)d\tau. \quad (6.49)$$

Расчет по формулам (6.48), (6.49) составляет содержание метода импульсных характеристик. Этот метод и метод переходных характеристик называют также суперпозиционными методами, а интегралы (6.41), (6.48), (6.49) — суперпозиционными интегралами или интегралами наложения.

Суперпозиционные методы удобны при численном анализе процессов на ЭВМ. Существуют стандартные машинные программы для вычисления интегралов. Поэтому, задаваясь переходной или импульсной характеристикой цепи, можно рассчитать на ЭВМ отклик цепи на заданное входное воздействие с помощью указанных стандартных программ.

Проиллюстрируем метод импульсных характеристик на примере RL -цепи (см. рис. 6.1, а). Для нее из формулы (6.39) найдем $h(0) = 0$. При прежнем входном воздействии $I(t)e^{\beta t}$ (см. рис. 6.14) из формул (6.47), (6.49) получаем

$$u(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\beta\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau.$$

Произведя интегрирование и приведя подобные члены, получим прежний результат (см. § 6.1.2, 6.2.2 и 6.2.4).

§ 6.3. ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

В отличие от временных методов анализа процессов в цепях операторные методы заключаются в том, что вместо искоемых напряжений $u(t)$ и токов $i(t)$ рассматриваются их операторные изображения $u(p)$, $i(p)$, называемые также операторным напряжением и операторным током. Эти изображения функционально связаны с искомыми сигналами $u(t)$, $i(t)$, которые называются оригиналами изображений. Здесь p — новая переменная величина (оператор), которая, будучи комплексным параметром, переводит рассмотрение сигналов из временной области в область комплексных величин. При операторных методах анализа

процессов в цепях определяют отклик цепи на входное воздействие в виде изображений $u(p)$, $i(p)$, по которым затем находят искомые сигналы $u(t)$, $i(t)$.

Рассмотренный ранее спектральный метод анализа является разновидностью операторных методов, где операторным изображением сигналов по Фурье служат их спектры. Однако в отличие от реальных спектров операторные изображения сигналов в общем случае являются абстрактными математическими понятиями, которые лишь упрощают анализ процессов в цепях.

Степень упрощения анализа зависит от вида функционального преобразования, переводящего оригинал в изображение. Одним из наиболее эффективных операторных преобразований такого рода является интегральное преобразование Лапласа.

1. Операторное преобразование Лапласа. Известное из курса математики интегральное преобразование Лапласа имеет вид

$$u(\bar{p}) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt, \quad (6.50)$$

где $p = \sigma + j\omega$ — комплексный оператор, а $u(\bar{p})$ — операторное напряжение или операторное изображение оригинала (сигнала) $u(t)$. Аналогично определяется операторный ток $i(\bar{p})$.

Интеграл (6.50) внешне напоминает интеграл Фурье (5.18). Однако между ними имеется принципиальное различие. В интеграле Фурье (5.18) входит мнимая частота $j\omega$, а в интеграле Лапласа (6.50) — комплексный оператор, который можно рассматривать как комплексную частоту $p = \sigma + j\omega$.

Понятие комплексной частоты встречалось выше при анализе спектральных функций сигналов и передаточных функций цепей. Однако использование этого понятия непосредственно в интегральном преобразовании (6.50) делает его более эффективным по сравнению с преобразованием Фурье.

Например, по формуле (5.18) невозможно непосредственно определить спектр («изображение») сигнала (5.28), как отмечалось ранее. Однако для того же сигнала непосредственно по формуле (6.50) определяется его операторное изображение

$$u(\bar{p}) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty},$$

или, поскольку $e^{-\sigma \cdot \infty} = 0$,

$$u(t) = 1(t) \doteq u(\bar{p}) = 1/p. \quad (6.51)$$

Здесь для оригинала и его изображения принят тот же символ взаимно однозначного соответствия, что и в обозначении (5.22) для сигнала и его спектра.

Из приведенного примера видно, что повышение эффективности преобразования (6.50) обусловлено наличием множителя $e^{-\sigma t}$, который обеспечивает сходимость интеграла (6.50) даже для сигналов, не удовлетворяющих условию сходимости интеграла (5.83). Наличие этого множителя позволяет интерпретировать преобразование (6.50) как представление сигнала в виде

«спектра» из затухающих колебаний $e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ (при $\sigma < 0$) в отличие от преобразования Фурье, представляющего сигнал совокупностью незатухающих гармонических колебаний $e^{j\omega t}$ (в символической форме).

Преобразование (6.50) обладает линейными свойствами, аналогичными свойству (5.25):

$$u(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t) \doteq u(\bar{p}) = A_1 u_1(\bar{p}) + A_2 u_2(\bar{p}); \quad (6.52)$$

Из других свойств отметим более простое преобразование изображений при дифференцировании и интегрировании сигнала по сравнению с преобразованиями (5.76), (5.75):

$$u_d(t) = \frac{du(t)}{dt} \doteq u_d(\bar{p}) = p u(\bar{p}) - u(0), \quad (6.53)$$

$$u_i(t) = \int_0^t u(t) dt \doteq u_i(\bar{p}) = u(\bar{p})/p. \quad (6.54)$$

Упрощение обусловлено не только комплексностью оператора p , но и тем, что оригиналы (сигналы) рассматриваются на бесконечном интервале $[0, \infty]$.

Отмеченные и другие свойства преобразования (6.50), известные из курса математики, приведены в приложении П. 10. Операторные изображения заданных сигналов определяются или непосредственно по формуле (6.50), как изображение (6.51), или по известным изображениям других сигналов с помощью свойств, приведенных в табл. П. 10. Для примера в приложении П. 11 приведены операторные изображения некоторых часто встречающихся сигналов. Все они получены из формулы (6.51) с помощью свойств, приведенных в табл. П. 10.

Если в дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения состояния цепи подставить вместо сигналов их операторные изображения (6.50), то по свойствам (6.52) — (6.54) эти уравнения переходят в алгебраические уравнения относительно переменной p . Например, дифференциальное уравнение (6.35) при подстановке операторных изображений тока и э. д. с. в соответствии с формулами (6.52), (6.53) и преобразованием № 5 табл. П. 11 принимает следующий вид, если $i(0) = 0$:

$$(pL + R)i(\bar{p}) = 1/(p + \beta). \quad (6.55)$$

Отсюда определяется операторный ток

$$i(\bar{p}) = 1/L(p + \alpha)(p + \beta), \quad (6.56)$$

где $\alpha = R/L$, или при $\alpha = \beta$

$$i(\bar{p}) = 1/L(p + \beta)^2. \quad (6.57)$$

Остается по этим изображениям определить оригинал, т. е. искомый ток $i(t)$. В этом заключается упомянутый операторный метод решения дифференциальных уравнений состояния цепи.

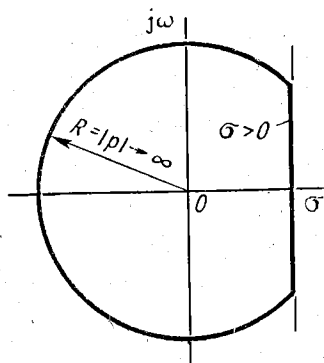


Рис. 6.16. Контур интегрирования в преобразовании Римана — Меллина

2. Определение сигналов по их операторному изображению. Сигнал определяется по его операторному изображению с помощью обратного интегрального преобразования Римана — Меллина:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} u(\bar{p}) e^{pt} d\bar{p}. \quad (6.58)$$

Значение этого интеграла может быть найдено через вычеты его подынтегральной функции по формуле (5.53). При этом получаются формулы разложения, приведенные в приложении П.12, которые аналогичны формулам (5.55), (5.61). Однако в отличие от интеграла Фурье (5.52) в формуле (6.58) за счет комплексности $p = \sigma + j\omega$ изменяется контур интегрирования по сравнению с контуром на рис. 5.13. В интеграле (6.58) контур интегрирования по-прежнему замыкается в бесконечности полуокружностью с радиусом $R \rightarrow \infty$, но проходит не по мнимой оси, а по прямой σ , как показано на рис. 6.16. Такой контур охватывает все полюсы $u(\bar{p})$, даже при их расположении и в левой, и в правой полуплоскостях комплексной переменной p . Поэтому формулы разложения в табл. П.12 пригодны при любом расположении полюсов подынтегральной функции (6.58) на комплексной плоскости. В этом также сказывается преимущество интеграла Лапласа перед интегралом Фурье как операторным преобразованием.

Определение оригиналов операторных изображений в ряде случаев упрощается при использовании и других их свойств, известных из курса математики, которые приведены в табл. П.12. Однако наибольшее упрощение в определении оригиналов (сигналов) получается при непосредственном использовании таблиц операторных изображений. Ввиду большой значимости операторных методов для практических приложений эти таблицы составлены для обширных классов функций, что делает такой способ достаточно универсальным.

Для примера рассмотрим определение сигнала по его найденным операторным изображениям (6.56) и (6.57). По изображению № 7 табл. П.11 с учетом формулы (6.56) и свойства (6.52) сразу получаем отклик цепи по току (6.10). Аналогично по формуле (6.57) и изображению № 8 табл. П.11 находим ток (6.11).

При использовании формул № 7 табл. П.11 надо было разделить сигнал и изображение на множитель $\beta - \alpha$. Для удобства пользования таблицами операторных изображений такую нормировку изображений производят заранее. При этом старшие коэффициенты в полиномах числителя и знаменателя функции

$u(\bar{p})$ равны единице. Например, нормировка изображения № 20 табл. П.11 приводит к формулам № 9 табл. П.13. Нормировка указанного изображения № 20 может быть произведена и иначе. Если принять $\alpha - \omega_c \text{tg} \psi_c = 0$, то получится $\psi_c = \text{arctg} \alpha / \omega_c$ и более простое изображение № 8 табл. П.13. В этой таблице приведены и другие типовые нормированные изображения, полученные аналогичным образом.

При практическом использовании таблиц операторных изображений следует иметь в виду, что в некоторых книгах применено интегральное (операторное) преобразование Карсона (Лапласа — Карсона):

$$u(\bar{p}) = p \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt.$$

В таких таблицах необходимо разделить изображение на оператор p , чтобы получить изображение (6.50) по Лапласу.

3. Метод операторных параметров. Связь между напряжениями и токами в различных элементах цепи может быть выражена в операторной форме. Примем, что в начальный момент времени ток в индуктивности и напряжение на емкости равны нулю:

$$i_L(t)|_{t=0} = i_L(0) = 0, \quad u_C(t)|_{t=0} = u_C(0) = 0. \quad (6.59)$$

При таких нулевых начальных условиях в соответствии со свойствами (6.52), (6.53) подстановка операторных изображений напряжений и токов в равенства (2.1), (2.6), (2.11) приводит к соотношениям

$$u_R(\bar{p}) = R i_R(\bar{p}), \quad u_L(\bar{p}) = p L i_L(\bar{p}), \quad i_C(\bar{p}) = p C u_C(\bar{p}). \quad (6.60)$$

Эти равенства представляют собой закон Ома для элементов цепи в операторной форме. По своей структуре они тождественны закону Ома в комплексной форме, который выражается равенствами (3.12) и (3.15). При этом приходим к понятию операторных сопротивлений и проводимостей:

$$Z_R(p) = 1/Y_R(p) = R, \quad Z_L(p) = 1/Y_L(p) = pL, \quad Z_C(p) = 1/Y_C(p) = 1/pC. \quad (6.61)$$

Эти операторные параметры цепи совпадают по форме с комплексными сопротивлениями и проводимостями, лишь множитель $j\omega$ заменяется оператором p . Очевидно, с операторными параметрами можно производить те же действия, что и с комплексными: при последовательном соединении элементов складываются их операторные сопротивления, а при параллельном — операторные проводимости.

Таким образом, понятие операторных параметров можно распространить на любые параметры цепи, которые выражаются через комплексные сопротивления и проводимости. При этом получаем операторный коэффициент трансформации $n(p)$, опера-

торный коэффициент передачи $K(p)$ и т. д. В общем случае при замене мнимой частоты $j\omega$ комплексным оператором p вместо комплексной передаточной функции (6.2) получается операторная передаточная функция, определяемая как отношение выходных значений операторных напряжений и (или) токов к входным. Обе указанные функции объединяют под общим названием передаточных функций. Применительно к сопротивлениям двухполюсника и входным сопротивлениям четырехполюсников (или их проводимостям) их называют также входными функциями.

Использование операторных параметров существенно упрощает расчет цепей при произвольных внешних воздействиях, если выполняются нулевые начальные условия (6.59). При этом уравнения, описывающие процессы в цепи, можно составлять сразу в операторной форме. Например, операторный ток в RL -цепи (рис. 6.11, а) может быть найден без составления дифференциальных уравнений исходного состояния и последующего перехода к уравнению (6.55). Достаточно воспользоваться законом Ома в операторной форме:

$$i(\bar{p}) = e(\bar{p}) / Z(p). \quad (6.62)$$

Использование операторного изображения № 5 табл. П.11 и подстановка в закон Ома (6.62) соотношений (6.60), (6.61) непосредственно приводит к равенствам (6.56), (6.57). Искомый результат, как и прежде, находят по формулам № 7, 8 табл. П.11. В этом и заключается метод операторных параметров.

4. Метод операторных схем. При ненулевых начальных условиях равенства (6.59) не выполняются. При этом подстановка соотношений (6.52), (6.53) в равенства (2.6), (2.11) приводит к следующим формулам:

$$u_L(\bar{p}) = pLi_L(\bar{p}) - Li_L(0), \quad i_C(\bar{p}) = pCuc(\bar{p}) - Cuc(0). \quad (6.63)$$

Если сохранить понятие операторных параметров (6.61), то равенства (6.63) следует рассматривать как законы Кирхгофа в операторной форме, где

$$e_L(\bar{p}) = Li_L(0), \quad e_C(\bar{p}) = Cuc(0) \quad (6.64)$$

— некоторые эквивалентные операторная э. д. с. и операторный задающий ток.

Такой интерпретации соответствуют эквивалентные операторные схемы, показанные на рис. 6.17, а, б. Для них законы Кирхгофа с учетом правила знаков имеют вид

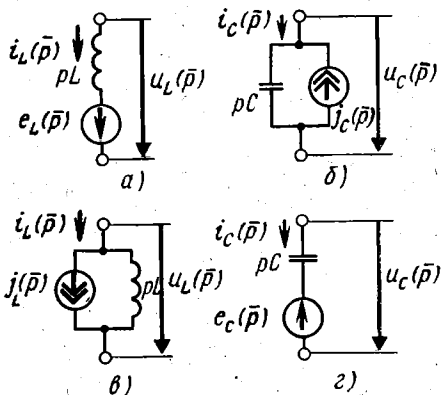


Рис. 6.17. Эквивалентные операторные схемы индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях

$$pLi_L(\bar{p}) - u_L(\bar{p}) = e_L(\bar{p}), \quad pCi_C(\bar{p}) - i_C(\bar{p}) = j_C(\bar{p}),$$

что эквивалентно равенствам (6.63).

Источники напряжения и тока в эквивалентных операторных схемах могут быть преобразованы по правилам, изложенным в § 3.5.1. Тогда получаются новые эквивалентные операторные схемы, показанные на рис. 6.17, в. г. В них согласно формулам (3.112) и (6.64)

$$j_L(\bar{p}) = i_L(0)/p, \quad e_C(\bar{p}) = u_C(0)/p. \quad (6.65)$$

Таким образом, при ненулевых начальных условиях, когда равенства (6.59) не выполняются, необходимо составить эквивалентную операторную схему цепи с учетом формул (6.64), (6.65). Затем процессы в цепи анализируют методом операторных параметров. В этом и заключается метод операторных схем.

§ 6.4. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Если в цепи действуют постоянные напряжения и токи, то состояние цепи не изменяется во всем бесконечном временном интервале $[-\infty, \infty]$. Если в цепи действуют периодические напряжения и токи, то в том же временном интервале не изменяется средний за период запас энергии в реактивных элементах цепи. Такие процессы в цепях и такое их состояние называют установившимися.

Однако любой реальный процесс в цепи должен иметь начало. Если цепь содержит реактивные элементы, то после начала процесс может стать практически не отличающимся от установившегося лишь по прошествии некоторого времени. Это обусловлено инерционными свойствами электрического и магнитного полей, в которых происходит накопление энергии (2.7), (2.12). С другой стороны, при их скачкообразном изменении токи (2.6) и напряжения (2.11) стали бы бесконечно большими, что также физически нереально.

Переход цепи из одного установившегося состояния в другое называют переходным процессом, а время этого перехода — длительностью переходного процесса. В более широком смысле под переходным процессом понимают переход цепи из одного состояния в другое, происходящий с отставанием от изменения входного воздействия. В таком понимании переходный процесс наблюдается и на протяжении каждого периода установившегося периодического процесса, если цепь содержит реактивные элементы. При этом изменение мгновенных значений напряжений $u(t)$ и токов $i(t)$ отстает по времени от изменений задающих напряжений $e(t)$ и задающих токов $j(t)$.

1. Коммутация цепей.

К образованию переходных процессов в цепи приводит ее коммутация. Под коммутацией цепи понимают включение или выключение ее элементов. В частном, но наиболее

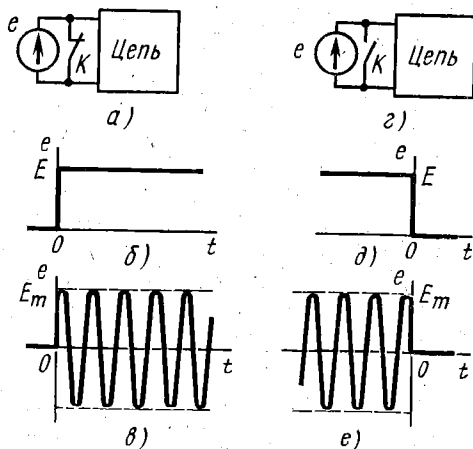


Рис. 6.18. Включение и выключение источника постоянной и гармонической э. д. с.

распространенном случае включаются и выключаются активные элементы, как условно показано на рис. 6.18, а, г. Типичным является включение и выключение идеального источника постоянной э. д. с. (рис. 6.18, б, д) или гармонической э. д. с. (рис. 6.18, в, е). Возникающие при этом переходные процессы имеют такой же характер, как и при прохождении через цепь телеграфных сигналов — немодулированных или модулированных. Ниже рассматриваются переходные процессы, происходящие именно при коммутации источников.

Для указанной коммутации характерным является скачкообразное изменение э. д. с. на входе цепи. Однако, как отмечалось, токи в индуктивностях $i_L(t)$ и напряжения на емкостях $u_C(t)$ не могут изменяться скачком. Полагая, что коммутация осуществляется в нулевой момент времени, указанное свойство можно описать математически:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (6.66)$$

Здесь знаковые индексы означают приближение к нулевому моменту времени слева ($t=0_-$) или справа ($t=0_+$). Равенства (6.66) называются законами коммутации. Они означают, в частности, что в момент включения источника должны соблюдаться нулевые начальные условия (6.59), если до коммутации в цепи не была запасена энергия:

$$i_L(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, \\ u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

В силу этих равенств и было принято нулевое начальное условие для тока в RL -цепи (см. § 6.2.2, 6.3.1, 6.3.3).

Если происходит коммутация пассивных элементов цепи, то законы коммутации (6.66) формально могут нарушаться. Например, в схеме рис. 6.19, а при замкнутом ключе $i_1(0_-) = E/R_1$ и $i_2(0_-) = 0$. После размыкания ключа должно соблюдаться равенство токов, проходящих через последовательно соединенные индуктивности: $i_1(0_+) = i_2(0_+)$. При этом нару-

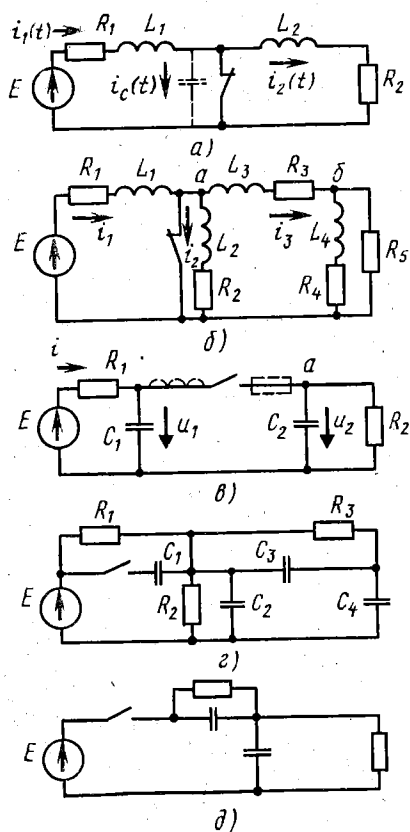


Рис. 6.19. Схемы цепей с нарушением законов коммутации

шается первое условие (6.66). Такое нарушение является следствием приближенности схемы цепи, в которой не учтена, например, паразитная емкость между проводами, показанная условно на рис. 6.19, а пунктирными линиями. Учет же тока $i_c(0_+)$ приводит к равенству $i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_c(0_+)$, которое не противоречит первому закону коммутации (6.66).

Аналогично в схеме рис. 6.19, в $u_1(0_-) = E$ и $u_2(0_-) = 0$. После замыкания ключа должны быть равны напряжения на параллельно соединенных емкостях: $u_1(0_+) = u_2(0_+)$. Происходящее при этом нарушение второго закона коммутации (6.66) является следствием пренебрежения индуктивностью и сопротивлением потерь соединительного провода, которые показаны на рис. 6.19, в пунктирными линиями. Учет этих паразитных параметров при коммутации приводит к начальному условию $u_1(0_+) = u_L(0_+) + u_R(0_+) + u_2(0_+)$, которое не противоречит второму закону коммутации (6.66).

Пренебрежение паразитными параметрами цепей, при котором формально нарушаются законы коммутации, приводит к появлению скачков тока в индуктивностях и напряжений на емкостях. При этом могут возникать и другие физически нереальные эффекты. Например, в цепи может бесследно исчезать запасенная энергия или появляться постоянный ток при отсутствии источника постоянной э. д. с. Последний эффект эквивалентен возникновению энергии из ничего.

Тем не менее учет паразитных параметров цепей является во многих случаях нежелательным. При этом, пренебрегая энергетическими парадоксами, допускают условно возможность скачкообразного изменения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Тогда для нахождения начальных значений токов и напряжений при коммутации цепей законы коммутации (6.66) заменяют законами непрерывности потокоцеплений и зарядов и дополняют их законами Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^m L_k i_k(0_+) = \sum_{k=1}^m L_k i_k(0_-), \quad \sum_{k=1}^n i_k(0_+) = j(0_+), \quad (6.67)$$

$$\sum_{k=1}^m C_k u_k(0_+) = \sum_{k=1}^m C_k u_k(0_-), \quad \sum_{k=1}^n u_k(0_+) = e(0_+). \quad (6.68)$$

Если в некотором узле соединены только ветви, содержащие индуктивности, то для них применяют начальные условия (6.67). В этом узле могут сходиться также ветви с источниками тока, а сам узел может вырождаться в точку соединения двух индуктивностей, как на рис. 6.19, а, т. е. может являться устранимой вершиной на графе цепи. Уравнения по первому равенству (6.67) составляют для всех независимых контуров, содержащих ветви с индуктивностями L_k . Здесь m — количество индуктивностей L_k в таких контурах, а количество самих уравнений равно числу

указанных независимых контуров. Например, для цепи рис. 6.19, а использование условий (6.67) дает два уравнения для определения начальных значений токов: $L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = L_1 E/R_1 + 0$, $-i_1(0_+) + i_2(0_+) = 0$, откуда $i_1(0_+) = i_2(0_+) = L_1 E/R_1(L_1 + L_2)$. Для более сложной цепи, показанной на рис. 6.19, б, первый закон коммутации (6.66) нарушается для индуктивностей L_1, L_2, L_3 , но соблюдается для индуктивности L_4 , поскольку к узлу б подходит ветвь R_5 , не содержащая индуктивности. При этом по первому равенству (6.67) составляют два уравнения: $L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = L_1 E/R_1 + 0$, $L_2 i_2(0_+) - L_3 i_3(0_+) = L_2 i_2(0_-) - L_3 i_3(0_-) = 0$. Здесь для определения трех начальных значений токов $i_1(0_+), i_2(0_+), i_3(0_+)$ недостает одного уравнения, которое составляют по первому закону Кирхгофа (6.67) для узла а: $-i_1(0_+) + i_2(0_+) + i_3(0_+) = 0$.

Из указанного следует, что *соблюдение условия непрерывности потокоцеплений (6.67) в контурах цепи предотвращает появление в них бесконечно больших контурных токов.*

Начальные условия (6.68) используют для емкостей, образующих емкостные контуры, как на рис. 6.19, в (контур из емкостей C_1, C_2). Эти контуры могут содержать также источники э. д. с., как контур C_1, C_2, E на рис. 6.19, г. Для всех таких независимых контуров составляют уравнения по второму закону Кирхгофа (6.68), где n — количество емкостей в этих контурах. Первые равенства (6.68), являющиеся условиями непрерывности зарядов, составляют для всех независимых узлов, в которых соединяются рассматриваемые емкости. *Соблюдение условия непрерывности зарядов (6.68) в узлах цепи предотвращает прохождение через них бесконечно больших токов.* Общее число уравнений (6.68), как и уравнений (6.67), должно равняться количеству реактивных элементов, для которых нарушаются законы коммутации. Например, для схемы рис. 6.19, в составляют два уравнения — по одному из равенств (6.68) первого и второго видов (см. § 6.4.3). Для более сложной схемы, показанной на рис. 6.19, г, по числу емкостей должно быть составлено четыре уравнения — по два уравнения (6.68) первого и второго видов.

Законы коммутации могут формально нарушаться также при включении и выключении источников. Например, в схеме, изображенной на рис. 6.19, д, второй закон коммутации вступает в противоречие со вторым законом Кирхгофа. Поэтому в такой схеме пренебрежение сопротивлением потерь конденсаторов означает и полное игнорирование переходных процессов в цепи.

2. Методы анализа переходных процессов. Переходные процессы при коммутации цепей являются частным случаем процессов в цепи при воздействии на нее произвольных сигналов. Поэтому анализ переходных процессов возможен любым из рассмотренных методов — спектральными и временными, включая операторный метод решения уравнений состояния, а также методами операторных параметров и операторных схем. При этом метод операторных параметров является наиболее простым, но

его использование возможно только при нулевых начальных условиях.

Однако и задачи на включение источников рассматривают обычно при нулевых начальных условиях. Что касается задач на выключение источников, то их решение может быть получено элементарно по известному решению задач на включение источника. Такой элементарный прием показан на рис. 6.20, а. Из рисунка видно, что обе цепи находятся в одинаковом состоянии как до коммутации, так и после нее. Во второй же цепи происходит включение источника, а постоянно включенный источник дает установившиеся токи и напряжения в цепи. Эти установившиеся напряжения и токи также известны, поскольку они являются предельными напряжениями и токами включения при $t \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$u_{\text{выкл}}(t) = u_{\text{уст}}(t) - u_{\text{вкл}}(t), \quad i_{\text{выкл}}(t) = i_{\text{уст}}(t) - i_{\text{вкл}}(t), \quad (6.69)$$

т. е. задача на выключение источников сводится к задаче на их включение.

Равенства (6.69) могут быть переписаны в другом виде:

$$u_{\text{вкл}}(t) = u_{\text{уст}}(t) - u_{\text{выкл}}(t), \quad i_{\text{вкл}}(t) = i_{\text{уст}}(t) - i_{\text{выкл}}(t). \quad (6.70)$$

Отсюда следует, что в свою очередь задача на включение источников может быть сведена к задаче на их выключение, как изображено на рис. 6.20, б. Взаимная замена задач на включение и выключение источников в соответствии с рис. 6.20 может быть названа методом эквивалентных схем.

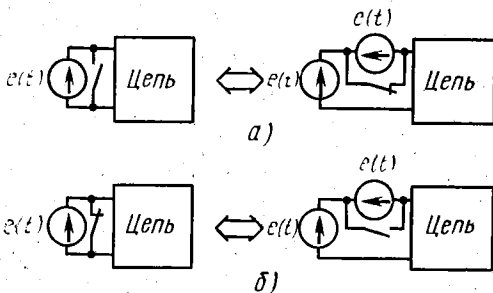


Рис. 6.20. Взаимная замена цепей с выключаемыми и выключаемыми источниками э. д. с.

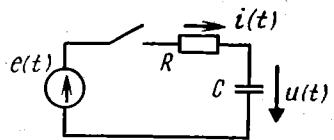


Рис. 6.21. Включение источника э. д. с. в RC -цепи

По принятой ранее терминологии установившиеся напряжения и токи являются вынужденными, а напряжения и токи в цепи после выключения источников — свободными. Поэтому равенства (6.70) эквивалентны решениям (6.30). Тем самым получает физическое обоснование классический метод решения уравнений состояния. При этом определяется и знак свободных составляющих полного решения дифференциальных уравнений, который в классическом методе находят после определения постоянных интегрирования.

Как отмечалось, ниже рассматриваются переходные процессы при коммутации источников постоянной и гармонической э. д. с. Переходные процессы при включении источников периодических сигналов произвольной формы с периодом T могут быть проанализированы операторным методом с помощью специальной *формулы включения*. По аналогии с формулой (5.93), переходя к комплексному оператору p , находим

$$u_N(\bar{p}) = u(\bar{p}) \frac{e^{-N\bar{p}T} - 1}{e^{-\bar{p}T} - 1}. \quad (6.71)$$

Здесь $u_N(\bar{p})$ — изображение отклика цепи в интервале $[(N-1)T, NT]$, в котором анализируется переходный процесс; $u(\bar{p})$ — изображение отклика цепи на входное воздействие в интервале $[0, T]$, которое может быть определено методом операторных параметров.

Из формулы включения (6.71) при $N \rightarrow \infty$ можно определить изображение периодического установившегося процесса:

$$u_{уст}(\bar{p}) = \frac{u(\bar{p})}{1 - e^{-\bar{p}T}}. \quad (6.72)$$

С помощью формул (6.71), (6.72) можно анализировать переходные и установившиеся процессы в цепях при включении, например, источников пилообразных, импульсных и других периодических сигналов.

При анализе переходных процессов в цепях возможно применение и некоторых нестандартных приемов, один из которых используется ниже при анализе переходных процессов в связанных контурах.

3. Переходные процессы в RC-цепи. Рассмотрим переходные процессы в RC-цепи при включении источника э. д. с. $e(t)$ (рис. 6.21). При нулевых начальных условиях, когда выполняется второе равенство (6.59), по закону Ома в операторной форме находим изображения тока и напряжения:

$$i(\bar{p}) = e(\bar{p}) / (R + 1/pC) = p e(\bar{p}) / R(p + \alpha),$$

$$u(\bar{p}) = i(\bar{p}) / pC = \alpha e(\bar{p}) / (p + \alpha), \quad (6.73)$$

где $\alpha = 1/RC$ — коэффициент затухания RC-цепи, измеряемый в s^{-1} , который характеризует скорость затухания переходного процесса при коммутации цепи.

При включении постоянной э. д. с. $e(t) = E$ входное воздействие равно $E \cdot 1(t)$. Тогда согласно соотношению (6.51) $e(\bar{p}) = E/p$ и формулы (6.73) принимают вид

$$i(\bar{p}) = E/R(p + \alpha), \quad u(\bar{p}) = \alpha E/p(p + \alpha).$$

Отсюда по формулам № 5 и 6 табл. П.11 находим

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\alpha t}, \quad u(t) = E(1 - e^{-\alpha t}). \quad (6.74)$$

Полученные соотношения определяют характер переходного процесса при зарядке емкости (рис. 6.22, а). Этот процесс длится бесконечно долго. *Переходный процесс считают практически завершившимся в момент времени $\tau_{0,1}$, когда зарядный ток уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальным значением, а напряжение на емкости возрастает до $0,9 E$* (рис. 6.22, а). Время τ , в течение которого ток уменьшается в e раз, называют *постоянной времени цепи*. Эту постоянную и длительность переходного процесса $\tau_{0,1}$ определяют из первого равенства (6.74):

$$E/eR = Ee^{-\alpha\tau}/R,$$

$$0,1E/R = Ee^{-\alpha\tau_{0,1}}/R,$$

или после логарифмирования

$$\tau = 1/\alpha = RC, \quad \tau_{0,1} = \ln 10/\alpha =$$

$$= 2,3/\alpha = 2,3\tau = 2,3RC. \quad (6.75)$$

Из формул (6.74) видно, что при $t \rightarrow \infty$ получаются следующие установившиеся значения тока и напряжения на емкости:

$$i_{уст} = 0, \quad u_{уст} = E. \quad (6.76)$$

При выключении источника, т. е. при разрядке емкости через резистор, из формул (6.69), (6.74) и (6.76) находим разрядный ток и напряжение переходного режима:

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\alpha t}, \quad u(t) = Ee^{-\alpha t}. \quad (6.77)$$

Характер этого переходного процесса показан на рис. 6.22, б. Длительность переходного процесса (6.77) определяется прежними соотношениями (6.75).

Экспоненциальный характер изменения напряжений и токов при коммутации источника постоянной э. д. с. наблюдается и в более сложных цепях, в том числе в цепях с нарушением законов коммутации. Покажем это на примере цепи, изображенной на рис. 6.19, в. Так как здесь емкости C_1, C_2 соединены параллельно, то $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$ при $t \geq 0$. По первому и второму

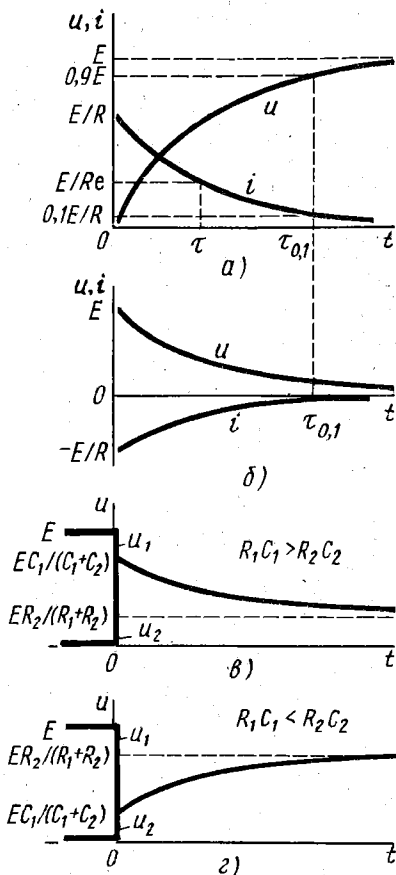


Рис. 6.22. Переходные процессы в RC-цепи при коммутации источника постоянной э. д. с.

законом Кирхгофа, $i(t) = C_1 \frac{du(t)}{dt} + C_2 \frac{du(t)}{dt} + u(t)/R_2$, $u(t) + R_1 i(t) = E$. Отсюда для определения $u(t)$ получается одно уравнение:

$$-R_1(C_1 + C_2) \frac{du(t)}{dt} + (1 + R_1/R_2)u(t) = E.$$

Решим его классическим методом (см. § 6.2.1, 6.2.2). В первом равенстве (6.30) вынужденное напряжение $u_b(t)$ определяют как установившееся напряжение на параллельно включенном сопротивлении R_2 : $u_b(t) = ER_2/(R_1 + R_2)$. Свободное напряжение $u_c(t)$ определяется решением однородного уравнения

$$R_1(C_1 + C_2) \frac{du_c(t)}{dt} + (1 + R_1/R_2)u_c(t) = 0.$$

Для него получается характеристическое уравнение (6.33) первого порядка:

$$R_1(C_1 + C_2)p + 1 + R_1/R_2 = 0,$$

откуда $-p_1 = \alpha = 1/R_1C + 1/R_2C$, где $C = C_1 + C_2$.

Таким образом, $u_c(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\alpha t}$ и $u(t) = ER_2/(R_1 + R_2) + Ae^{-\alpha t}$.

Для определения константы интегрирования A используем условие (6.68) непрерывности зарядов для узла a :

$$C_1 u_1(0_+) + C_2 u_2(0_+) = C_1 u_1(0_-) + C_2 u_2(0_-) = C_1 E + 0.$$

Поскольку, по второму закону Кирхгофа, $u_1(0_+) = u_2(0_+) = u(0_+)$, окончательно получаем $u(0_+) = EC_1/(C_1 + C_2) + ER_2/(R_1 + R_2) + A = EC_1/(C_1 + C_2)$, т. е. $A = E[C_1/(C_1 + C_2) - R_2/(R_1 + R_2)]$. Таким образом, искомое напряжение изменяется по экспоненциальному закону при любом соотношении между параметрами цепи (рис. 6.22, в, з):

$$u(t) = ER_2/(R_1 + R_2) + E[C_1/(C_1 + C_2) - R_2/(R_1 + R_2)]e^{-\alpha t}.$$

Случай, когда $R_1 C_1 = R_2 C_2$, предоставляется читателю объяснить самостоятельно.

Рассмотрим теперь переходный процесс при включении источника гармонической э. д. с. $e(t) = E_m \cos \omega t$ (см. рис. 6.21). По формулам (6.73) и № 12 табл. П.11 находим изображения тока и напряжения:

$$i(\bar{p}) = E_m p^2 / R(p + \alpha)(p^2 + \omega^2), \quad u(\bar{p}) = E \alpha p / (p + \alpha)(p^2 + \omega^2). \quad (6.78)$$

Отсюда по формулам № 4 при $a = 0$ и № 2 табл. П.13 получаем:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E_m}{R} \left[\frac{\alpha^2}{\mu^2} e^{-\alpha t} + \frac{\omega}{\mu} \cos(\omega t + \psi) \right], \\ u(t) &= E \left[-\frac{\alpha^2}{\mu^2} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\mu} \sin(\omega t + \psi) \right], \\ \mu &= \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}, \quad \psi = \arctg \alpha / \omega. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Этот переходный процесс изображен на рис. 6.23. Он складывается из двух составляющих, показанных на рис. 6.23 пунктирными линиями. Первая составляющая (свободная) имеет форму убывающей экспоненты и возникает за счет первоначального толчка при включении э. д. с. Вторая составляющая (вынужденная) имеет форму гармонических колебаний, сдвинутых соответственно по фазе относительно э. д. с. При этих фазовых сдвигах экспоненциальная составляющая имеет такое значение, что для напряжения на емкости соблюдается нулевое начальное условие (6.59). Действительно, из второго, четвертого и третьего равенств (6.79) находим

$$u(0) = E \left(-\frac{\alpha^2}{\mu^2} + \frac{\alpha}{\mu} \sin \psi \right),$$

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\mu},$$

чем и подтверждается второе равенство (6.59).

Нетрудно видеть, что длительность переходного процесса (6.79) определяется прежней формулой (6.75). Таким образом, *длительность переходного процесса в коммутируемой цепи не зависит от вида э. д. с. коммутируемого источника.*

4. Переходные процессы в RL -цепи. Включение источника постоянной э. д. с. E в RL -цепи рис. 6.1, a означает, что $e(t) = E \cdot 1(t)$ и соблюдается первое равенство (6.59). При этом $i(\bar{p}) = E/\bar{p}$ и в соответствии с формулой (6.62)

$$i(\bar{p}) = E/L\bar{p}(\bar{p} + \alpha),$$

где $\alpha = R/L$ — коэффициент затухания RL -цепи, который уже использовался в предыдущих параграфах.

Отсюда по формуле № 6 табл. П.11 определяем ток включения в контуре (зарядный ток индуктивного накопителя энергии):

$$i(t) = E(1 - e^{-\alpha t})/R, \quad i_{\text{ст}}(t) = I = E/R. \quad (6.80)$$

Здесь установившийся ток равен предельному значению зарядного тока при $t \rightarrow \infty$. Ток (6.80) совпадает по форме с напряжением (6.74) на заряжающейся емкости (см. рис. 6.22, a). Из соотношений (6.80) по формуле (6.69) можно определить разрядный ток индуктивного накопителя, который изменяется подобно напряжению (6.77) (см. рис. 6.22, b):

$$i(t) = Ie^{-\alpha t}. \quad (6.81)$$

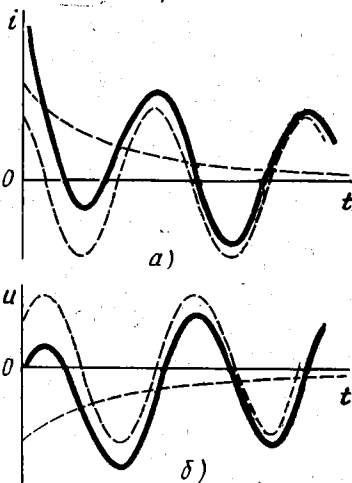


Рис. 6.23. Переходный процесс в RC -цепи при включении источника гармонической э. д. с.

Аналогично соотношениям (6.75) из формулы (6.81) определяется постоянная времени RL -цепи и длительность переходного процесса:

$$\tau = 1/\alpha = L/R, \quad \tau_{0,1} = 2,3/\alpha = 2,3\tau = 2,3L/R. \quad (6.82)$$

Длительность переходного процесса (6.80) также определяется формулой (6.82).

При включении источника гармонической э. д. с. $e(t) = E_m \cos \omega t$ известным образом находим изображение тока:

$$i(\bar{p}) = E_m p / L(p + \alpha)(p^2 + \omega^2).$$

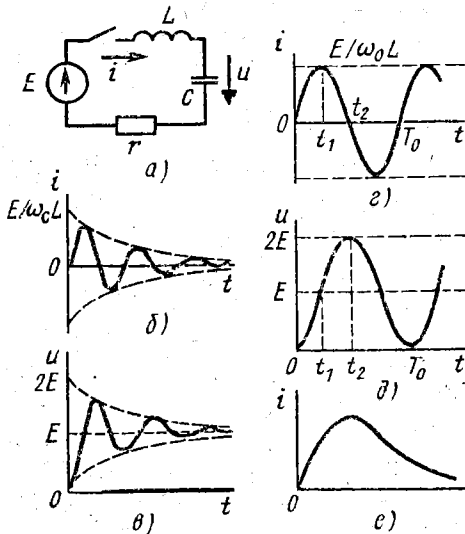
Это соотношение с точностью до постоянного множителя совпадает со вторым равенством (6.78). Следовательно, и при коммутации источника гармонической э. д. с. ток в RL -цепи изменится подобно напряжению на емкости в RC -цепи (см. рис. 6.23, б).

5. Коммутация источника постоянной э. д. с. в одиночном контуре. Рассмотрим переходные процессы в последовательном LC -контуре при включении источника постоянной э. д. с. E (рис. 6.24, а). При нулевых начальных условиях (6.59) по закону Ома в операторной форме находим изображение тока в контуре и напряжения на емкости:

$$i(\bar{p}) = E/p(pL + r + 1/pC), \quad u(\bar{p}) = i(\bar{p})/pC,$$

или

$$i(\bar{p}) = E/L(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2), \quad u(\bar{p}) = \omega_0^2 E/p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2),$$



где $\alpha = r/2L = \omega_0 d/2$ — коэффициент затухания контура, пропорциональный его затуханию (3.115); $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота контура.

Отсюда по табл. П.13 определяются искомые ток и напряжение:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t,$$

$$u(t) = E \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\cos \psi_c} \cos(\omega_c t - \psi_c) \right] \quad (6.83)$$

Здесь

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2/4}, \quad \psi_c = \arctg \alpha/\omega_c \quad (6.84)$$

Рис. 6.24. Переходные процессы в последовательном LC -контуре при включении источника постоянной э. д. с

— соответственно частота собственных (свободных)

колебаний, называемая собственной частотой контура, и фазовый сдвиг колебаний напряжения, обеспечивающий соблюдение нулевого начального условия для емкости.

Собственные колебания контура (6.83) показаны на рис. 6.24, б, в. Они получаются затухающими за счет потерь в контуре. При отсутствии потерь ($r = 0$, $\alpha = 0$) колебания (6.83) получаются незатухающими, т. е. имеют постоянную амплитуду:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t, \quad u(t) = E(1 - \cos \omega_0 t). \quad (6.85)$$

Эти колебания показаны соответственно на рис. 6.24, г, д. Из рисунка наглядно видно, что колебания в LC -контуре возникают за счет перекачки энергии из индуктивности в емкость и обратно. В момент времени $t_1 = T_0/4$ емкость заряжается до напряжения E^* . При этом зарядный ток начинает постепенно уменьшаться, поскольку он не может скачком снизиться до нуля. Прохождение тока в прежнем направлении приводит к подзарядке емкости до значений $u > E$. В момент времени t_2 , когда зарядный ток обращается в нуль, напряжение на емкости начинает постепенно уменьшаться. Следовательно, при этом $u = u_{\max}$. Из соотношений (6.85), (6.83) видно, что $u_{\max} = 2E$ при $\alpha = 0$ и $u_{\max} \approx 2E$ при $\alpha \ll \omega_c$. Далее колебательный процесс продолжается аналогичным образом.

Затухание собственных колебания является неизбежным из-за потерь в контуре. Скорость убывания амплитуды затухающих колебаний определяется коэффициентом их затухания α . Согласно определению (4.2) величина αt измеряется в неперях. Поэтому коэффициент затухания колебаний α измеряется в Нп/с и имеет размерность $[T^{-1}]$. Через этот коэффициент определяется также постоянная времени τ и длительность переходного процесса $\tau_{0,1}$. По аналогии с формулами (6.75) и (6.82) находим эти параметры:

$$\tau = 1/\alpha = 2L/r, \quad \tau_{0,1} = 2,3/\alpha = 4,6L/r = 4,6Q/\omega_0, \quad (6.86)$$

где $Q = 1/d$ — добротность контура.

От потерь в контуре зависит не только длительность колебательного переходного процесса (6.86), но и собственная частота контура (6.84). С ростом потерь эта частота уменьшается и при $d = 2$ обращается в нуль. Это означает, что переходный процесс перестает быть колебательным. При отсутствии колебаний процесс называется апериодическим. Поэтому при $d < 2$ контур называется колебательным, а при $d \geq 2$ — апериодическим. По аналогии цепи с одним реактивным элементом, в которых невозможны собственные колебания, также называют апериодическими цепями.

* При наличии потерь, как видно из соотношений (6.83), $t_1 = \frac{1}{\omega_c} \arctg \omega_c / \alpha$ и при $\omega_c \gg \alpha$ получается $t_1 \approx T_c/4$, где $T_c = 2\pi/\omega_c$.

В апериодическом режиме ток в LC -контуре определяется соотношениями

$$i(t)|_{d=2} = \frac{E}{L}te^{-\alpha t}, \quad i(t)|_{d>2} = \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\text{sh}\beta t, \quad (6.87)$$

где $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

Первое равенство (6.87) может быть получено из первой формулы (6.83) при $\omega_c = 0$, если раскрыть возникающую при этом неопределенность. Этот же результат вытекает из формулы № 8 табл. П.11 при $\alpha = \omega_0$. Второе равенство (6.87) получается из первой формулы (6.83) при $\omega_c = j\beta$. Характер изменения тока при апериодической зарядке емкости через индуктивность показан на рис. 6.24, *e*.

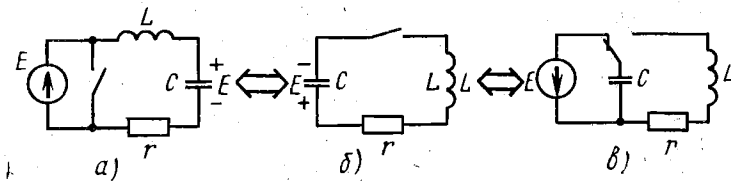


Рис. 6.25. Последовательный LC -контур при выключении источника постоянной э. д. с. и его эквивалентные схемы

Рассмотрим теперь выключение источника постоянной э. д. с. E (рис. 6.25, *a*). Ему эквивалентно включение на разрядку емкости, заряженной до напряжения E (рис. 6.25, *б, в*), поскольку из соотношений (6.83) определяются $i_{\text{уст}} = 0$ и $u_{\text{уст}} = E$. Отсюда в соответствии с формулами (6.69) и (6.83) находим, что разрядка емкости через индуктивность носит колебательный характер:

$$i(t) = -\frac{E}{\omega_c L}e^{-\alpha t}\sin\omega_c t, \quad u(t) = \frac{E}{\cos\psi_c}e^{-\alpha t}\cos(\omega_c t - \psi_c). \quad (6.88)$$

Этот процесс показан на рис. 6.26. Токи (6.88) и (6.83) отличаются только направлением (знаком). Напряжение (6.88) совпадает по форме с напряжением (6.83), отличаясь от него отсутствием постоянной составляющей и фазировкой колебаний. Природа возникновения этих колебаний остается той же, что и при зарядке емкости через индуктивность. При $d \geq 2$ колебательная разрядка невозможна и процесс становится апериодическим. Апериодическая разрядка опи-

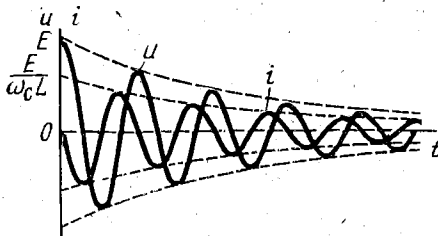


Рис. 6.26. Переходный процесс в последовательном контуре при выключении источника постоянной э. д. с.

сывается формулами (6.87), в которых надо изменить знак тока.

Характер переходных процессов в параллельном LC -контуре остается таким же, как и в последовательном контуре. При этом, очевидно, изменяются лишь количественные соотношения.

6. Коммутация источника гармонической э. д. с. в одиночном контуре. Рассмотрим по-прежнему последовательный LC -контур с операторным сопротивлением $Z(p) = (p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)/p$. При включении источника гармонической э. д. с. $e(t) = E_m \cos \omega t$, имеющей операторное изображение $e(p) = E_m p / (p^2 + \omega^2)$, операторный ток находим по закону Ома в операторной форме (6.62):

$$i(p) = E_m p^2 / L(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2).$$

Отсюда в соответствии с формулой № 17 табл. П.13 при $a = 0$ находим искомый ток:

$$i(t) = \frac{E_m}{\mu L} \left[\omega \cos(\omega t + \psi) + \frac{\omega_0^2}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi_c) \right],$$

где

$$\mu = \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\operatorname{arctg} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha\omega},$$

$$\psi_c = \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{-\alpha} + \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\omega_c} = \operatorname{arctg} \frac{-2\alpha\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2}.$$

Подставив сюда значения α и ω_0 , преобразуем выражение для тока к виду

$$i(t) = \frac{E_m}{Z(\omega)} \left[\cos(\omega t - \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi_c) \right], \quad (6.89)$$

где

$$Z(\omega) = L\mu/\omega = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},$$

$$\varphi = \varphi(\omega) = -\psi = \operatorname{arctg}(\omega L - 1/\omega C)/r.$$

Соотношение (6.89) описывает суперпозицию вынужденных колебаний с частотой ω и собственных колебаний с частотой ω_c . Вынужденные колебания определяются законом Ома (3.19), как и при постоянно действующей гармонической э. д. с. Собственные колебания, возникающие в контуре за счет первоначального толчка при включении источника э. д. с., затухают по экспоненте. Если частота источника ω достаточно близка к собственной частоте контура ω_c , то при суперпозиции указанных колебаний получаются затухающие биения, показанные на рис. 6.27, а.

Ток (6.89) возникает в расстроенном контуре. Если контур настроен в резонанс, то $\omega = \omega_0$, $Z(\omega) = r$ и $\varphi(\omega) = 0$. Примем при этом, что $\alpha \ll \omega_0$. Тогда $\omega_c \approx \omega_0$, $\psi_c \approx \pi/2 + 0 - (-\pi/2) = \pi$ и соотношение (6.89) упрощается:

$$i(t) = \frac{E_m}{r} (1 - e^{-\alpha t}) \cos \omega_0 t. \quad (6.90)$$

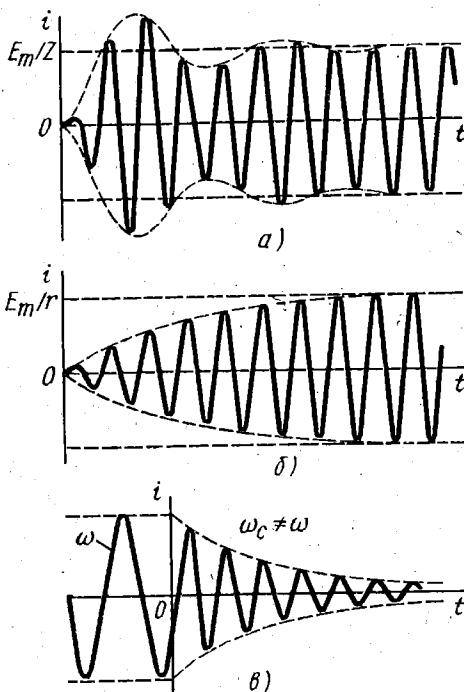


Рис. 6.27. Переходные процессы в последовательном LC-контуре при коммутации источника гармонической э. д. с.

Таким образом, в настроенном контуре при суперпозиции совпадающих по частоте вынужденных и собственных затухающих колебаний образуется ток, монотонно нарастающий по амплитуде. Этот ток показан на рис. 6.27, б.

Длительность рассмотренных переходных процессов определяется прежними соотношениями (6.68). Установившиеся значения токов (6.89), (6.90) равны соответствующим вынужденным токам с амплитудами E_m/Z и E_m/r . Отсюда в соответствии с формулой (6.69) находим токи при выключении источника гармонической э. д. с. в расстроенном и настроенном контурах:

$$i(t) = -\frac{E_m}{Z} \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_c} \times \\ \times e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi_c),$$

$$i(t) = \frac{E_m}{r} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t. \quad (6.91)$$

Эти токи образуются за счет разрядки индуктивного и емкостного накопителей энергии. Они изменяются таким образом, что в момент выключения источника непрерывность амплитуды и фазы колебаний не нарушается. При этом в рассмотренном контуре изменяется скачком частота колебаний, как показано на рис. 6.27, в.

7. Переходные процессы в связанных контурах. Рассмотрим переходные процессы при включении источника э. д. с. в одинаковых связанных контурах. Для этого случая при согласном включении катушек по аналогии с формулой (4.106) получаем операторный ток во вторичном контуре:

$$i_2(\bar{p}) = -e(\bar{p})Z_{св}(p)/[Z^2(p) - Z_{св}^2(p)],$$

где $Z_{св}(p) = pM$ — операторное сопротивление связи.

Это выражение можно представить в виде

$$i_2(\bar{p}) = \frac{1}{2} \left[\frac{e(\bar{p})}{Z(p) + pM} - \frac{e(\bar{p})}{Z(p) - pM} \right].$$

Согласно закону Ома (6.62) слагаемые в квадратных скобках можно считать изображениями токов $i'(t)$, $i''(t)$ в некоторых последовательных контурах с операторными сопротивлениями $Z'(p) = r + p(L + M) + 1/pC$ и $Z''(p) = r + p(L - M) + 1/pC$. Таким образом, ток во вторичном контуре может быть определен через токи вспомогательных контуров с параметрами $L + M$, C , r и $L - M$, C , r :

$$i_2(t) = [i'(t) - i''(t)]/2. \quad (6.92)$$

Вспомогательные контуры с такими параметрами имеют собственные и резонансные частоты:

$$\begin{aligned} \omega'_c &\approx \omega'_0 = 1/\sqrt{(L + M)C} = \omega_0/\sqrt{1 + k_{св}} \approx \omega_0(1 - k_{св}/2), \\ \omega''_c &\approx \omega''_0 = 1/\sqrt{(L - M)C} = \omega_0/t\sqrt{1 - k_{св}} \approx \omega_0(1 + k_{св}/2), \end{aligned} \quad (6.93)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота связанных контуров; $k_{св} = M/L$ — коэффициент связи связанных контуров.

Если включается источник постоянной э. д. с., то вспомогательные токи можно найти по первому соотношению (6.83), в котором частоты $\omega_c = \omega'_c$ и $\omega_c = \omega''_c$ определяются равенствами (6.93). Таким образом, при включении в связанных контурах источника постоянной э. д. с. ток во вторичном контуре складывается из двух затухающих колебаний с разными частотами. Этот ток имеет вид затухающих биений, показанных на рис. 6.28, а. Образование биений в этом случае объясняется физически поочередной перекачкой энергии из первичного во вторичный контур и обратно.

Если включается источник гармонической э. д. с. $e(t) = E_m \cos \omega t$, то при настроенных контурах ($\omega = \omega_0$) частоты (6.93) оказываются симметричными относительно частоты источника:

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \omega_0 - \Omega = \omega - \Omega, \\ \omega''_0 &= \omega_0 + \Omega = \omega + \Omega, \end{aligned} \quad (6.94)$$

где

$$\Omega = k_{св} \omega_0/2 = \kappa \omega_0/2Q \quad (6.95)$$

— расстройка вспомогательных контуров относительно связанных контуров. При симметричной расстройке вспомогательные контуры имеют следующие параметры:

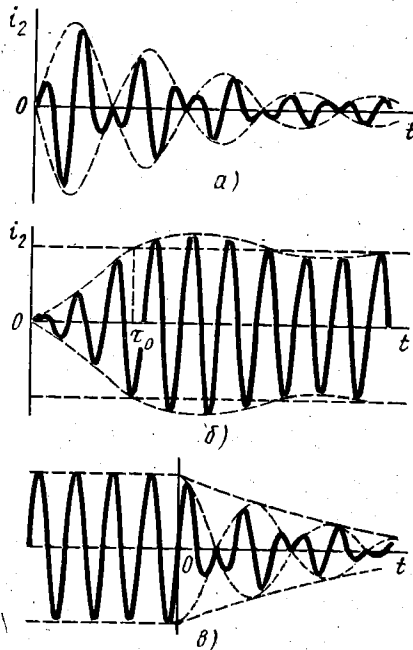


Рис. 6.28. Переходные процессы в связанных контурах

$$Z'(\omega) = Z''(\omega) = Z_0(\omega), \quad \varphi'(\omega) = -\varphi''(\omega) = \varphi_0(\omega), \quad (6.96)$$

где нулевым индексом отмечены параметры контуров на частоте ω_0 , причем

$$\varphi_0(\omega) = \operatorname{arctg} 2Q\Omega/\omega_0 = \operatorname{arctg} Qk_{св} = \operatorname{arctg} \kappa. \quad (6.97)$$

Соотношения (6.96) упрощают определение вспомогательных токов по формуле (6.89). Для дальнейшего упрощения анализа примем в этой формуле $\omega_0^2 = \omega\omega_c$ и $\alpha' \approx \alpha'' = \alpha$, поскольку $k_{св} \ll 1$. Тогда в силу нулевого начального условия из формулы (6.89) находим:

$$\cos(-\varphi_0) + \cos\psi'_c = 0, \quad \cos\varphi_0 + \cos\psi''_c = 0.$$

Отсюда следует:

$$\psi'_c = \pi - \varphi_0, \quad \psi''_c = \pi + \varphi_0. \quad (6.98)$$

Подставив равенства (6.96) и (6.98) в формулу (6.89), найдем вспомогательные токи:

$$i'(t) = \frac{E_m}{Z_0(\omega)} [\cos(\omega_0 t - \varphi_0) - e^{-\alpha t} \cos(\omega_0' t - \varphi_0)],$$

$$i''(t) = \frac{E_m}{Z_0(\omega)} [\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - e^{-\alpha t} \cos(\omega_0'' t + \varphi_0)].$$

В соответствии с формулой (6.92) находим полуразность этих токов, которую преобразуем по известной тригонометрической формуле. Тогда с учетом равенств (6.94) получаем искомый ток включения:

$$i_2(t) = \frac{E_m}{Z_0(\omega)} \sin\varphi_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin\varphi_0} \sin(\Omega t + \varphi_0) \right] \sin\omega_0 t. \quad (6.99)$$

Таким образом, при включении в настроенных связанных контурах источника гармонической э. д. с. ток во вторичном контуре является АМ-сигналом с убывающим до нуля коэффициентом модуляции $m = e^{-\alpha t} / \sin\varphi_0$ (рис. 6.28, б). Со спектральной точки зрения образование АМ-сигнала (6.99) объясняется присутствием в нем спектральных составляющих с частотами $\omega_0 - \Omega$, ω_0 , $\omega_0 + \Omega$. Существование такого сигнала в переходном режиме обусловлено физически суперпозицией вынужденных колебаний и затухающих биений.

Приняв в соотношении (6.99) $i_2 = i_{вкл}$, из формулы (6.69) при $i_{выкл} = i_2$ находим

$$i_2(t) = \frac{E_m}{Z_0(\omega)} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin\omega_0 t. \quad (6.100)$$

Следовательно, ток переходного режима в связанных контурах при выключении источника гармонической э. д. с. изменяется по закону затухающих биений (рис. 6.28, в). Такое изменение аналогично изменению тока при включении источника постоянной э. д. с. (см. рис. 6.28, а). Подобным же образом изменяется ток при выключении источника постоянной э. д. с.

Согласно соотношениям (6.99) и (6.100) длительность переходного процесса в связанных контурах определяется прежней формулой (6.86). Однако возможен и иной подход к определению этой величины. Из формулы (6.100) следует, что первый нуль биений получается при $t = \tau_0$, когда $\sin(\Omega\tau_0 + \varphi_0) = 0$ или $\Omega\tau_0 + \varphi_0 = \pi$. Отсюда с учетом формул (6.95) и (6.97) находим

$$\tau_0 = (\pi - \varphi_0) / \Omega = 2(\pi - \arctg \kappa) Q / \omega_{00}. \quad (6.101)$$

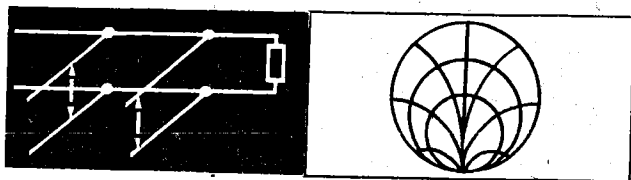
Расчеты показывают, что при $\kappa < \kappa_{\max} = 2,41$ можно пренебречь уже первым всплеском биений, следующим за нулем в момент времени (6.101). Поэтому величину (6.101) можно принять за длительность переходного процесса в связанных контурах.

Существенно отметить, что при $\kappa > 1,02$ длительность переходного процесса (6.101) получается меньше величины (6.86), определяющей длительность переходного процесса, затухающего по экспоненциальному закону. Это обусловлено физически дополнительным затуханием переходного процесса в связанных контурах за счет перекачки энергии из одного контура в другой, что и вызывает возникновение биений и их нулей.

Вопросы для самоконтроля

- 6.1. Какие размерности могут иметь передаточные функции цепи?
- 6.2. Почему полюсы передаточной функции не могут располагаться в правой полуплоскости $p(\sigma, j\omega)$?
- 6.3. Почему при перемножении двух сигналов нельзя перемножить их спектральные функции по аналогии с умножением спектральной функции $\hat{S}(\omega)$ входного сигнала на передаточную функцию цепи $\underline{T}(\omega)$ при нахождении спектра выходного сигнала?
- 6.4. Почему в линейной цепи возможны нелинейные искажения модулированных сигналов?
- 6.5. Возможны ли нелинейные искажения ЧМ-сигналов при симметричных частотных характеристиках цепи?
- 6.6. Возможны ли нелинейные искажения ЧМ-сигналов при симметричной фазовой характеристике цепи?
- 6.7. Как изменится форма сигнала, показанного на рис. 6.8, если он получен путем цифровой обработки входного сигнала с помощью ЭВМ, в программе которой заложены идеальные характеристики цепи?
- 6.8. Какую величину описывает соотношение (6.12) при $l = k$?
- 6.9. Как можно получить соотношения (6.11) с помощью формулы (5.55)?
- 6.10. Какими тремя способами можно показать, что коэффициент затухания α апериодических и колебательных цепей имеет размерность $[c^{-1}]$?
- 6.11. С какими знаками следует подставлять величины ΔE_k в формулу (6.42)?
- 6.12. Можно ли применять суперпозиционную формулу (6.42), если сигнал на входе имеет разрывы производной?
- 6.13. На каком временном интервале следует рассматривать скачки ΔE_k при использовании суперпозиционной формулы (6.42)?
- 6.14. Нарушатся ли интегральные равенства (6.43) и (6.44), если бесконечный верхний предел интегрирования заменить конечным пределом l ?
- 6.15. Почему соотношение (6.45) подтверждает конечность величины отклика цепи на бесконечно большой дельта-импульс?
- 6.16. Как связан отклик цепи на смещенный дельта-импульс со спектральными характеристиками цепи?

- 6.17. Какие размерности могут иметь импульсные характеристики цепи?
- 6.18. В каких случаях метод импульсных характеристик следует предпочесть методу переходных характеристик?
- 6.19. Какие факторы, кроме пренебрежения некоторыми параметрами цепи, могут привести к формальному нарушению законов коммутации?
- 6.20. Почему соблюдение условий непрерывности потокоцеплений и зарядов предотвращает появление бесконечно больших контурных и узловых токов?
- 6.21. Какая существует связь между методами эквивалентных схем и операторных схем?
- 6.22. Почему зарядный ток конденсатора в начальный момент времени не зависит от значения его емкости?
- 6.23. Как изменяется напряжение на индуктивности и на диссипативном сопротивлении в RL -цепи при включении источника постоянной э. д. с?
- 6.24. Какое условие должно выполняться, чтобы в RL -цепи отсутствовал переходный процесс при включении источника гармонической э. д. с?
- 6.25. Как изменяется ток в первичном контуре системы из двух связанных контуров при включении источника постоянной э. д. с?
-



Цепи с распределенными параметрами

Цепи с распределенными параметрами характеризуются протеканием в них волновых процессов, при которых переменные величины $u(t, l)$, $i(t, l)$ и другие изменяются не только во времени, но и в пространстве (см. § 1.2.5, 1.4.6). Характер изменения этих величин в пространстве может быть сходен в некоторых отношениях с их изменением во времени. Если, например, на входе цепи действует периодическая (в частности, гармоническая) э. д. с., то в любой произвольной точке пространства (цепи) с координатой l_0 значение напряжения повторяется через период T : $u(t, l_0) = u(t + T, l_0)$. При этом в любой фиксированный момент времени t_0 значение напряжения может повторяться в пространстве через некоторый пространственный интервал $\Delta l = \lambda$: $u(t_0, l) = u(t_0, l + \lambda)$. Величина λ называется длиной волны.

В общем случае цепь и ее элементы характеризуются тремя линейными размерами l_1, l_2, l_3 . Если все эти размеры пренебрежимо малы в сравнении с длиной волны ($l_1 \ll \lambda, l_2 \ll \lambda, l_3 \ll \lambda$), то ее цепь и ее элементы являются системами с сосредоточенными параметрами. Если же эти три условия не удовлетворяются для некоторого устройства, то оно образует систему с объемно-распределенными параметрами. К таким системам относятся, например, волноводы и объемные электромагнитные резонаторы, которые изучаются в специальном курсе. К системам с объемно-распределенными параметрами можно отнести также волновое электромагнитное поле в открытом пространстве и атмосферу, в которой распространяются акустические волны.

Если условие сосредоточенности параметров ($l_0 \ll \lambda$) не выполняется только для одного линейного размера l_0 некоторой электрической системы, то она называется цепью с линейно-распределенными параметрами или электрической длинной линией. К таким системам относятся, например, двухпроводная линия связи (симметричный фидер, рис. 7.1, а) и коаксиальная линия (несимметричный фидер, рис. 7.1, в).

Свойства длинной линии зависят от ее поперечных размеров, пренебрежимо малых в сравнении с длиной волны. Эти размеры для двухпроводного и коаксиального фидеров показаны соответственно на рис. 7.1, б, г.

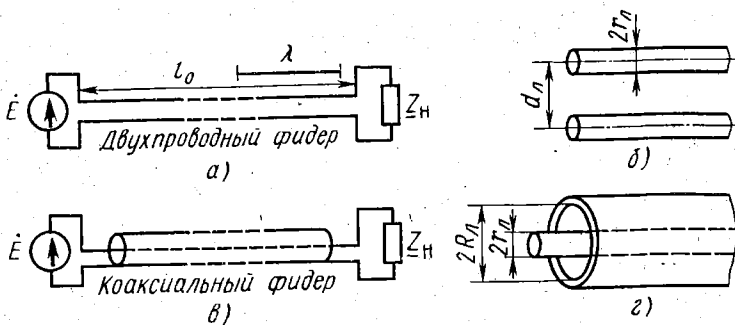


Рис. 7.1. Электрические длинные линии

§ 7.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

Волновые процессы можно описывать различным образом. Основные уравнения электрических длинных линий описывают в дифференциальной форме изменение напряжений и токов. К ним относятся телеграфные и волновые уравнения, которые изучаются в настоящем параграфе. Аналогичные волновые уравнения используются при рассмотрении и других, например акустических, волн.

1. Распределенные параметры. Свойства длинных линий определяются в первую очередь их распределенными параметрами. К ним относятся индуктивность и диссипативное сопротивление проводов, а также емкость и диссипативная проводимость утечки между проводами, которые распределены вдоль линии.

Для количественной оценки распределенных параметров используют понятие первичных параметров длинной линии, которые равны значениям соответствующих распределенных параметров, измеренных на отрезке линии единичной длины. К ним относятся погонная индуктивность L_0 (Гн/м), погонная емкость C_0 (Ф/м), погонное сопротивление потерь R_0 (Ом/м) и погонная проводимость утечки G_0 (См/м). Эти первичные параметры линии показаны условно на рис. 7.2, а. Как видно из рисунка, погонные параметры L_0 и R_0 относят не к двум, а к одному проводу длинной линии.

Определение первичных параметров линии сопряжено, в частности, с расчетами электрических и магнитных полей, которые производятся в специальных курсах. Для примера в табл. П.14 приведены некоторые расчетные формулы для двухпроводной и

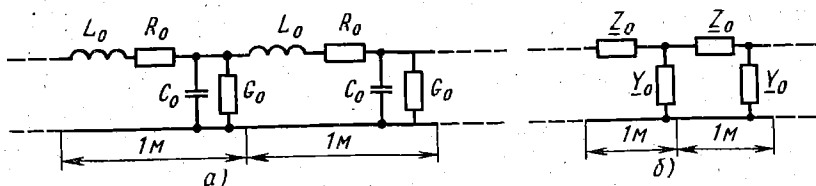


Рис. 7.2. Погонные параметры длинной линии

коаксиальной линии, справедливые для высоких частот. В этой таблице размеры линии (см. рис. 7.1, б, з) указаны в миллиметрах, частота f — в герцах, угловая частота ω — в радианах в секунду; сопротивление и проводимость приведены для медных проводов, δ — угол потерь в диэлектрике коаксиального фидера.

Если погонные параметры не изменяются вдоль линии, то ее называют однородной. Неоднородность линии может быть обусловлена, например, изменением расстояния между проводами симметричного фидера. Здесь изучаются только однородные линии.

Если в линии рассматриваются гармонические колебания, то можно применять символический метод их расчета. При этом для эквивалентной схемы рис. 7.2, а используют понятие погонного полного (комплексного) сопротивления и погонной полной (комплексной) проводимости длинной линии:

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 \quad \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 \quad (7.1)$$

Эти параметры линии показаны условно на рис. 7.2, б.

2. Телеграфные уравнения. При произвольном воздействии на входе длинной линии напряжения и токи в ней изменяются сложным образом как во времени, так и вдоль линии. Описание таких процессов возможно с помощью уравнений в частных производных. Эти уравнения содержат в общем случае частные производные по времени $\left(\frac{\partial u(t, l)}{\partial t}, \frac{\partial i(t, l)}{\partial t}\right)$ и по пространственной координате $\left(\frac{\partial u(t, l)}{\partial l}, \frac{\partial i(t, l)}{\partial l}\right)$.

Основываясь на спектральном методе анализа процессов в линейных цепях, ограничимся случаем гармонического воздействия на входе линии. При этом использование символического метода расчета гармонических напряжений и токов в длинной линии позволяет ограничиться рассмотрением производных только по одной пространственной координате $\left(\frac{d\dot{U}}{dl}, \frac{d\dot{I}}{dl}\right)$. Сле-

довательно, данный метод анализа позволяет описывать волновые процессы в длинной линии с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.

При составлении этих уравнений следует учитывать, что законы Кирхгофа и Ома сформулированы для цепей с сосредоточенными параметрами. Чтобы использовать эти законы в рассматриваемом случае, выделим в линии отрезок бесконечно малой длины dl , для которого всегда соблюдается

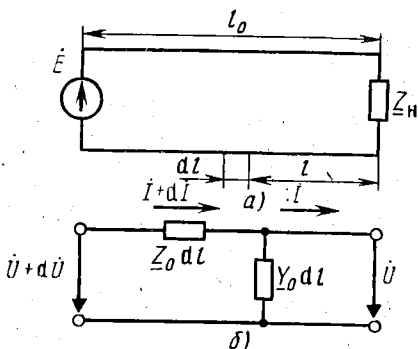


Рис. 7.3. Выделение дифференциально малого отрезка длинной линии

условие $dl \ll \lambda$, поскольку длина волны λ является конечной величиной. Такой дифференциально малый отрезок линии на произвольном расстоянии l от ее конца показан на рис. 7.3, а. С учетом рис. 7.2, б этот отрезок линии имеет сосредоточенные параметры $\underline{Z}_0 dl$ и $\underline{Y}_0 dl$, как показано на рис. 7.3, б.

Применив законы Кирхгофа и Ома к эквивалентной схеме элемента линии dl (рис. 7.3, б), получим уравнения

$$\dot{U} + d\dot{U} - i\underline{Z}_0 dl - \underline{Z}_0 dI dI - \dot{U} = 0, \quad I + dI - i - \underline{Y}_0 dl = 0.$$

Приводя здесь подобные члены в пренебрегая третьим слагаемым в первом уравнении как бесконечно малой величиной второго порядка, после деления на dl получаем

$$\frac{d\dot{U}}{dl} = \underline{Z}_0 I, \quad \frac{dI}{dl} = \underline{Y}_0 \dot{U}. \quad (7.2)$$

Эти уравнения известны под названием первого и второго телеграфных уравнений. Они описывают закон изменения амплитуды и фазы гармонических колебаний вдоль линии.

3. Волновые уравнения. Для решения телеграфных уравнений надо разделить в них переменные \dot{U} и I . С этой целью продифференцируем уравнения (7.2) по l :

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dl^2} = \underline{Z}_0 \frac{dI}{dl}, \quad \frac{d^2 I}{dl^2} = \underline{Y}_0 \frac{d\dot{U}}{dl}.$$

Подставив сюда значения первых производных из уравнений (7.2), получим так называемые волновые уравнения:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dl^2} - \underline{\gamma}^2 \dot{U} = 0, \quad \frac{d^2 I}{dl^2} - \underline{\gamma}^2 I = 0, \quad (7.3)$$

где

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta. \quad (7.4)$$

Эта величина является комплексным параметром длиной линии и называется коэффициентом (постоянной) распространения (волны). Его вещественная и мнимая части α , β рассматриваются ниже.

Из формул (7.1) следует, что при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ коэффициент распространения (7.4) является мнимой величиной:

$$\underline{\gamma} \Big|_{\substack{R_0=0 \\ G_0=0}} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta, \quad \alpha = 0, \quad \beta \Big|_{\alpha=0} = \beta_0 = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.5)$$

Длинная линия с параметрами (7.5) называется линией без потерь или идеальной длиной линией.

4. Решение основных уравнений. Для решения однородных волновых уравнений (7.3) составляем их характеристическое уравнение и определяем его корни:

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0, \quad p_{1,2} = \pm \underline{\gamma}.$$

Отсюда получаем искомое решение:

$$\dot{U} = A_1 e^{\underline{\gamma} l} + A_2 e^{-\underline{\gamma} l}, \quad I = A_3 e^{\underline{\gamma} l} + A_4 e^{-\underline{\gamma} l}. \quad (7.6)$$

Для определения постоянных интегрирования A_1, \dots, A_4 необ-

ходимо задаться граничными условиями. Обычно используют значения напряжения и тока либо на нагрузке ($\dot{U}|_{l=0} = \dot{U}_2$, $I|_{l=0} = I_2$), либо на входе линии ($\dot{U}|_{l=l_0} = \dot{U}_1$, $I|_{l=l_0} = I_1$). Чтобы не определять четырех постоянных интегрирования, решение (7.6) для тока выражают через найденное напряжение. Для этого, поделив из (7.6) производную $\frac{d\dot{U}}{dl}$, подставим ее в первое телеграфное уравнение (7.2):

$$\dot{I} = \frac{Y}{Z_0}(A_1 e^{Yl} - A_2 e^{-Yl}),$$

или с учетом обозначения (7.4)

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c}(A_1 e^{Yl} - A_2 e^{-Yl}), \quad (7.7)$$

где

$$Z_c = Z_c e^{i\varphi_c} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}. \quad (7.8)$$

Эта комплексная величина имеет размерность сопротивления и называется волновым сопротивлением длинной линии.

Из формул (7.1) следует, что волновое сопротивление (7.8) линии без потерь ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) является вещественной величиной, как и диссипативное сопротивление:

$$Z_c \Big|_{\substack{R_0=0 \\ G_0=0}} = Z_c = \rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (7.9)$$

Волновое сопротивление (7.8) и коэффициент распространения (7.4) называют также вторичными параметрами линии.

Рассмотренные основные уравнения длинной линии и их решения получены при отсчете пространственной координаты l от конца линии. В ряде случаев удобно вести отсчет расстояния l' от начала линии. При этом согласно обозначениям на рис. 7.3, а в уравнениях (7.6) и (7.7) следует произвести замену переменной $l = l_0 - l'$. Тогда получаем

$$\dot{U} = B_1 e^{-Yl'} + B_2 e^{Yl'}, \quad \dot{I} = \frac{1}{Z_c}(B_1 e^{-Yl'} - B_2 e^{Yl'}), \quad (7.10)$$

где $B_1 = A_1 e^{Yl_0}$, $B_2 = A_2 e^{-Yl_0}$ — новые константы интегрирования, которые можно определять так же, как и константы A_1 , A_2 , т. е. непосредственно из граничных условий.

§ 7.2. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Волновые процессы в длинной линии могут иметь довольно сложный характер. Изучение этих процессов основывается на рассмотрении трех основных типов волн — бегущих, стоячих и смешанных. Такие волны наблюдаются не только в электрических длинных линиях, но и в любых системах с распределенными параметрами.

1. Бегущие волны. Для анализа волновых процессов в длинной линии рассмотрим решение ее основных уравнений. Напряжение и ток (7.6), (7.7), (7.10) найдены в виде суммы двух составляющих:

$$\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}'', \quad i = i' + i'', \quad (7.11)$$

где

$$\dot{U}' = B_1 e^{-\gamma l'}, \quad \dot{U}'' = A_2 e^{-\gamma l'}, \quad i' = \dot{U}' / Z_c, \quad i'' = -\dot{U}'' / Z_c. \quad (7.12)$$

Рассмотрим каждую из этих составляющих в отдельности. Экспоненциальные множители в равенствах (7.12) являются безразмерными величинами, поэтому константы B_1 и A_2 имеют размерность напряжений. При этом величина $B_1 = \dot{U}'|_{l'=0} = \dot{U}'_1$ представляет собой действующее напряжение \dot{U}' в начале линии ($l' = 0$), а величина $A_2 = \dot{U}''|_{l=0} = \dot{U}''_2$ — действующее напряжение \dot{U}'' в конце линии ($l = 0$). Переходя к комплексным амплитудам этих напряжений, получаем

$$\dot{U}'_m = \dot{U}'_{m1} e^{-\gamma l'}, \quad \dot{U}''_m = \dot{U}''_{m2} e^{-\gamma l'}.$$

Отсюда в соответствии с символическим методом определяются мгновенные значения напряжений $u' = \text{Re}(\dot{U}'_m e^{j\omega t})$ и $u'' = \text{Re}(\dot{U}''_m e^{j\omega t})$. Учитывая при этом обозначения (7.4), находим

$$u' = U'_{m1} e^{-\alpha l'} \cos(\omega t - \beta l' + \psi'_1), \quad u'' = U''_{m2} e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \beta l + \psi''_2), \quad (7.13)$$

где ψ'_1 , ψ''_2 — начальные фазы напряжений u' и u'' соответственно в начале и в конце линии.

Рассмотрим сначала напряжения (7.13) в линии без потерь. Согласно обозначениям (7.5) в идеальной линии напряжения (7.13) имеют значения

$$u' = U'_{m1} \cos(\omega t - \beta l' + \psi'_1), \quad u'' = U''_{m2} \cos(\omega t - \beta l + \psi''_2), \quad (7.14)$$

где $\beta = \beta_0$, а нулевой индекс опущен для общности записи.

Напряжения (7.14) изменяются как во времени, так и в пространстве, т. е. вдоль линии. Следовательно, по определению (см. § 1.2.5), они представляют собой две волны напряжения.

Фазы $\Phi' = \omega t - \beta l' + \psi'_1$ и $\Phi = \omega t - \beta l + \psi''_2$ этих волн линейно нарастают во времени с угловой скоростью ω (рад/с) и линейно убывают вдоль l' и l с пространственным градиентом

$$\beta \left(\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right) = -\frac{d\Phi'}{dl'} = -\frac{d\Phi}{dl}. \quad (7.15)$$

Этот градиент, входящий в соотношение (7.4), называется фазовым коэффициентом (коэффициентом фазы) или волновым числом.

Напряжения (7.14) изменяются во времени и в пространстве по гармоническому закону. Для рассмотрения этих изменений примем для простоты $\psi'_1 = \psi''_2 = 0$ и перепишем выражения (7.14) в следующих двух формах:

$$u'(t) = U'_{m1} \cos \omega(t - t'_3), \quad u''(t) = U''_{m2} \cos \omega(t - t_3), \quad (7.16)$$

$$u'(l') = U'_{m1} \cos \beta(l' - l'_3), \quad u''(l) = U''_{m2} \cos \beta(l - l_3). \quad (7.17)$$

Здесь

$$t'_3 = l'/v, \quad t_3 = l/v \quad (7.18)$$

— время запаздывания во времени колебаний (7.16), (7.14) на заданном удалении l' и l от соответствующих концов линии;

$$l_3 = vt, \quad v = l_3/t = \omega/\beta \quad (7.19)$$

— величины, имеющие размерность соответственно расстояния ($[m]$) и скорости ($[m \cdot s^{-1}]$), смысл которых подлежит выяснению.

Расстояние l_3 для колебаний (7.17) является пространственным аналогом времени запаздывания (7.18) для колебаний (7.16). Таким образом, величина l_3 характеризует пространственное запаздывание колебаний (7.16) в фиксированный момент времени t . Согласно определению длины волны λ и соотношениям (7.17) при фиксированном значении l_3 получается $u'(l' + \lambda) = u'(l')$ и $u''(l + \lambda) = u''(l)$, если $\beta\lambda = 2\pi$. Отсюда определяется значение фазового коэффициента:

$$\beta = 2\pi/\lambda. \quad (7.20)$$

Величина $\beta l = 2\pi l/\lambda$ называется *волновым расстоянием*.

Как видно из первого равенства (7.19), пространственное запаздывание l_3 увеличивается с ростом t . Поэтому для различных моментов времени *пространственные колебания (7.17), т. е. волны напряжений (7.14), перемещаются вдоль линии*, как показано на рис. 7.4, а, б. Это перемещение происходит со скоростью v , определяемой вторыми равенствами (7.19).

Волны, перемещающиеся (распространяющиеся) в пространстве, называются бегущими волнами. Их распространение означает сдвиг в пространстве фазы колебаний, возрастающей с течением времени, т. е. перемещение фазы колебаний вдоль линии. Поэтому величина v получила название фазовой скорости. Из вторых равенств (7.19) и формулы (7.20) следует, что длина волны может быть определена как расстояние, на которое распространяется бегущая волна с фазовой скоростью v за один период колебаний $T = 2\pi/\omega$:

$$\lambda = vT. \quad (7.21)$$

Распространение бегущих волн (2.14), т. е. перемещение в пространстве их фаз, происходит в направлении убывания этих фаз. Таким образом, волна напряжения u' распространяется от входа линии к нагрузке, а волна напряжения u'' — в обратном направлении. Поэтому первая волна получила название прямой бегущей, или падающей, волны, а вторая — обратной бегущей, или отраженной, волны. Следует подчеркнуть, что здесь имеется в виду не физическое отражение волн в линии, а условное наименование бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

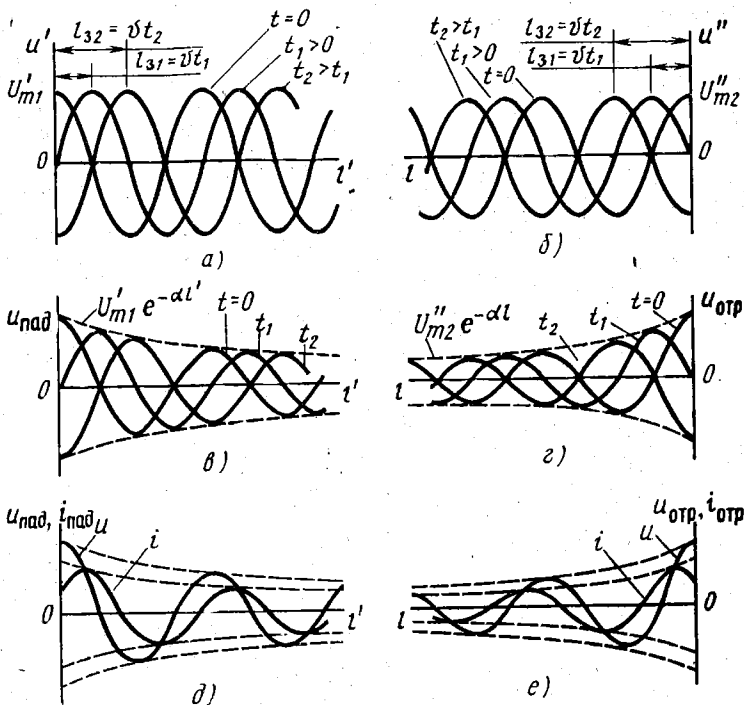


Рис. 7.4. Бегущие волны

Рассмотрим теперь бегущие волны в линиях с потерями. Соответственно названию падающих и отраженных волн изменим их обозначения, отбросив штриховые индексы. Тогда напряжения (7.12) запишутся в виде

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \dot{U}_{\text{пад}1} e^{-\gamma l'} = \dot{U}_{\text{пад}2} e^{\gamma l'}, \quad \dot{U}_{\text{отр}} = \dot{U}_{\text{отр}1} e^{\gamma l'} = \dot{U}_{\text{отр}2} e^{-\gamma l'}, \quad (7.22)$$

где

$$\dot{U}_{\text{пад}1} = U_{\text{пад}1} e^{j\psi_{\text{пад}1}} = \dot{U}_{\text{пад}} |_{l'=0}, \quad \dot{U}_{\text{пад}2} = U_{\text{пад}2} e^{j\psi_{\text{пад}2}} = \dot{U}_{\text{пад}} |_{l=0}$$

— напряжения падающей волны соответственно в начале и в конце линий;

$$\dot{U}_{\text{отр}1} = U_{\text{отр}1} e^{j\psi_{\text{отр}1}} = \dot{U}_{\text{отр}} |_{l'=0}, \quad \dot{U}_{\text{отр}2} = U_{\text{отр}2} e^{j\psi_{\text{отр}2}} = \dot{U}_{\text{отр}} |_{l=0}$$

— напряжения отраженной волны соответственно на входе линии и на нагрузке.

При этом мгновенные значения напряжений (7.13) могут быть представлены в различных формах:

$$\begin{aligned} u_{\text{пад}} &= U_{m \text{ пад}1} e^{-\alpha l'} \cos(\omega t - \beta l' + \psi_{\text{пад}1}) = \\ &= U_{m \text{ пад}2} e^{\alpha l} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад}2}), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
 u_{\text{отр}} &= U_{\text{отр1}} e^{\alpha l'} \cos(\omega t + \beta l' + \psi_{\text{отр1}}) = \\
 &= U_{\text{отр2}} e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр2}}). \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

Бегущие волны (7.13) или (7.23), (7.24) отличаются от волн (7.14) в линии без потерь убыванием их амплитуд в направлении распространения этих волн, как показано на рис. 7.4, *в, г*. Поэтому они называются *затухающими бегущими волнами* в отличие от незатухающих волн (7.14). Скорость затухания вдоль линии бегущих волн (7.23), (7.24) определяется относительным пространственным градиентом убывания амплитуд $U_{m \text{ пад}} = U_{m \text{ пад1}} e^{-\alpha l'}$ и $U_{m \text{ отр}} = U_{m \text{ отр2}} e^{-\alpha l}$:

$$\alpha = - \frac{1}{U_{m \text{ пад}}} \frac{dU_{m \text{ пад}}}{dl'} = - \frac{1}{U_{m \text{ отр}}} \frac{dU_{m \text{ отр}}}{dl}. \quad (7.25)$$

Этот градиент, входящий в соотношение (7.4), называется *коэффициентом затухания (волны)*, измеряется в Нп/м (дБ/м) и имеет размерность $[L^{-1}]$.

Для линии с потерями остаются справедливыми определения фазового коэффициента (7.15) и длины волны (7.21). Отсюда следует, что в этом случае сохраняется и значение фазового коэффициента (7.20), хотя для затухающих волн даже при гармонических колебаниях $u(t_0, l) \neq u(t_0, l + \lambda)$.

Согласно соотношениям (7.11) ток в линии, как и напряжение, представляется в виде суперпозиции падающей и отраженной волн тока. При этом в соответствии с равенствами (7.12) и принятыми обозначениями

$$Z_c = \dot{U}_{\text{пад}} / \dot{I}_{\text{пад}} = - \dot{U}_{\text{отр}} / \dot{I}_{\text{отр}}. \quad (7.26)$$

Таким образом, *волновое сопротивление длинной линии является сопротивлением, которое она оказывает току бегущей волны*. При этом отрицательный знак в последнем равенстве (7.26) обусловлен различным направлением распространения падающей и бегущей волн. На рис. 7.3, *б* при напряжении $\dot{U} = \dot{U}_{\text{пад}}$ ток $\dot{I} = \dot{I}_{\text{пад}}$ является положительным, а при $\dot{U} = \dot{U}_{\text{отр}}$ ток $\dot{I} = \dot{I}_{\text{отр}}$ является отрицательным, т. е. проходит в противоположном направлении (справа налево).

В соответствии с формулой (7.8) волновое сопротивление (7.26) имеет комплексный характер. Ниже показано, что $\varphi_c < 0$. Это означает, что в линии с потерями ток бегущей волны опережает по фазе напряжение бегущей волны на угол $-\varphi_c$. При этом в отличие от линии без потерь для тока время запаздывания (7.18) уменьшается на величину $-\varphi_c/\omega$, а пространственное запаздывание (7.19) увеличивается на величину $-\varphi_c/\beta$ (рис. 7.4, *д, е*).

Рассмотренные здесь бегущие волны складываются друг с другом при встречном распространении падающих и отраженных волн. Характер получающихся при этом волновых процессов изучается в последующих параграфах.

2. Стоячие волны. Представляет интерес волновой процесс в линии без потерь при условии, что амплитуды падающих и отраженных волн равны друг другу: $U_{\text{пад}} = U_{\text{отр}} = U_{\text{мб}}$. Такое равенство возможно на протяжении всей линии, поскольку бегущие волны не затухают в линии без потерь ($U_{\text{мб}} = \text{const}$).

Равенство амплитуд отраженной и падающей волн означает, что они переносят одинаковую энергию. Это возможно в случае, если энергия не потребляется в нагрузке. Таким образом, рассматриваемый волновой процесс может наблюдаться в линии без потерь, которая на конце либо разомкнута, либо замкнута накоротко, либо нагружена на чисто реактивное сопротивление.

Для указанного волнового процесса соотношения (7.23) и (7.24) имеют вид

$$u_{\text{пад}} = U_{\text{мб}} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад}2}), \quad u_{\text{отр}} = U_{\text{мб}} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр}2}). \quad (7.27)$$

В линии без потерь волновое сопротивление (7.9) является вещественным. Поэтому согласно равенствам (7.12) в идеальной линии токи бегущих волн совпадают по фазе с напряжениями (7.27). Отсюда находим

$$i_{\text{пад}} = I_{\text{мб}} \cos(\omega t + \beta l + \psi_{\text{пад}2}), \quad i_{\text{отр}} = -I_{\text{мб}} \cos(\omega t - \beta l + \psi_{\text{отр}2}), \quad (7.28)$$

где $I_{\text{мб}} = U_{\text{мб}}/\rho$ — амплитуда падающей и отраженной волн тока.

Сложим полученные напряжения и токи согласно равенствам (7.11). Тогда, преобразовав сумму и разность косинусов по известным тригонометрическим формулам, получим

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_n), \quad i = -I_m \sin(\omega t + \psi_n), \quad (7.29)$$

где

$$U_m = 2U_{\text{мб}} \cos(\beta l - \psi_2/2), \quad I_m = 2I_{\text{мб}} \sin(\beta l - \psi_2/2) \quad (7.30)$$

— амплитуды суммарного напряжения и суммарного тока;

$$\psi_n = (\psi_{\text{пад}2} + \psi_{\text{отр}2})/2, \quad \psi_2 = \psi_{\text{отр}2} - \psi_{\text{пад}2} \quad (7.31)$$

— начальная фаза напряжения на нагрузке и сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами на конце линии (в сечении нагрузки).

Фазы волн (7.29) не перемещаются вдоль линии. Поэтому такие волны называются стоячими. Их фазы изменяются вдоль линии скачком на угол π (рис. 7.5, а). Скачки фазы соответствуют изменению знака амплитуд (7.30). В отличие от бегущих волн (7.27), (7.28) стоячие волны напряжения и тока сдвинуты по фазе на угол $\pm \pi/2$, как следует из равенств (7.29) и показано на рис. 7.5, а.

Амплитуды (7.30) стоячих волн изменяются вдоль линии от нулевых значений $U_m = 0$, $I_m = 0$ до максимальных значений $U_{m \text{ max}} = 2U_{\text{мб}}$, $I_{m \text{ max}} = 2I_{\text{мб}}$ (рис. 7.5, б). Эти нули и максимумы

называются соответственно узлами и пучностями стоячих волн. Из равенства (7.30) и рис. 7.5, б видно, что пучности напряжения совпадают с узлами тока и наоборот. При этом пучности и узлы повторяются через расстояние $\lambda/2$.

Образование пучностей и узлов обусловлено тем, что в соответствующих сечениях линии падающие и отраженные волны совпадают по фазе или находятся в противофазе. При этом ближайшая к концу линии пучность напряжения находится на расстоянии l_n от нагрузки, которое определяется из первого выражения (7.30) при $\beta l_n - \psi_2/2 = 0$:

$$\psi_2 = 2\beta l_n, \quad \beta l_n = \psi_2/2, \quad (7.32)$$

где ψ_2 имеет прежнее значение (7.31).

Образование пучности на волновом расстоянии (7.32) от конца линии наглядно видно из векторной диаграммы волн (рис. 7.6). При перемещении от конца линии, где напряжение $\dot{U}_{\text{лин}} = \dot{U}_{\text{лин}} e^{i\psi_n} = \dot{U}_{\text{пад}2} + \dot{U}_{\text{отр}2}$, векторы падающей и отраженной волн напряжения (7.27) поворачиваются в направлении, указанном стрелками. При их повороте на угол $\psi_2/2$ напряжения (7.27) совпадают по фазе.

Рассмотренные свойства стоячих волн можно отобразить на пространственно-временных диаграммах изменения напряжения и тока (7.29). Такие диаграммы показаны на рис. 7.7, а, б, где T — период колебаний.

3. Смешанные волны. Рассмотрим волновой процесс в линии без потерь при условии, что отраженная волна имеет амплитуду, меньшую амплитуды падающей волны ($U_{\text{отр}} < U_{\text{пад}}$). Такое соотношение амплитуд возможно в том случае, если часть энергии, переносимой падающей волной, расходуется в нагрузочном сопротивлении на конце линии.

Падающую волну разобьем на две синфазные составляющие $u'_{\text{пад}}$ и $u''_{\text{пад}}$ с амплитудой второй составляющей, равной амплитуде отраженной волны:

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = u'_{\text{пад}} + u''_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}, \quad U''_{\text{пад}} = U_{\text{отр}}. \quad (7.33)$$

При этом две последние составляющие образуют в сумме стоячую волну $u_{\text{ст}} = u''_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$. Следовательно,

$$u = u'_{\text{пад}} + u_{\text{ст}}. \quad (7.34)$$

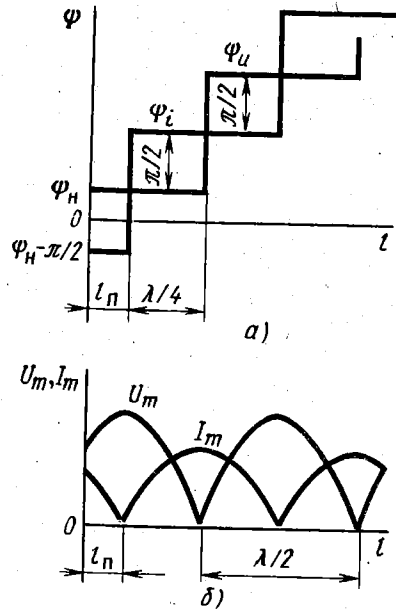


Рис. 7.5. Изменение фазы и амплитуды стоячих волн вдоль линии без потерь

Таким образом, в рассматриваемом случае волновой процесс в линии без потерь представляется в виде суперпозиции бегущей и стоячей волн. Такой процесс получил название смешанной волны.

В некоторый фиксированный момент времени фаза бегущей волны $u'_{\text{пад}}$ изменяется вдоль линии. В тот же момент времени стоячая волна $u_{\text{ст}}$ имеет фазу, одинаковую или отличающуюся на угол π в разных сечениях линии. Поэтому волны $u'_{\text{пад}}$ и $u_{\text{ст}}$ имеют различный фазовый сдвиг в разных сечениях линии. Таким образом, арифметическому сложению напряжений (7.34) соответствует векторное сложение их амплитуд $U'_{m \text{ пад}}$ и $U_{m \text{ ст}}$, как показано

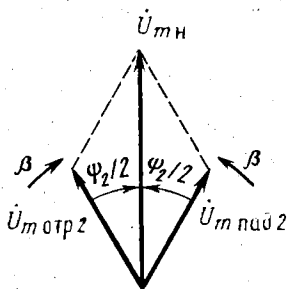
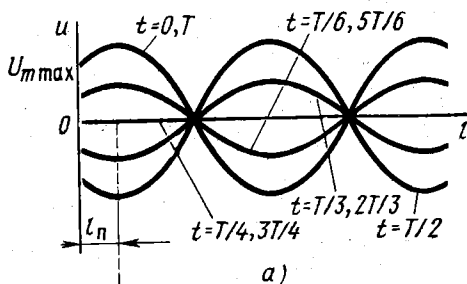
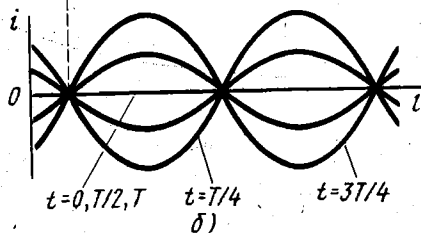


Рис. 7.6. Векторная диаграмма напряжений на конце линии для стоячих волн



а)

Рис. 7.7. Пространственно-временные изменения стоячих волн



б)

на рис. 7.8, где изображена векторная диаграмма образования смешанных волн.

При рассмотренном сложении бегущей и стоячей волн амплитуда смешанной волны плавно изменяется вдоль линии, как показано на рис. 7.9, а. Столь же плавно изменяется фаза смешанной волны, принимая промежуточные значения между фазами бегущей и стоячей волн (рис. 7.9, б).

В пучностях и узлах стоячей волны $u_{\text{ст}}$ напряжения $u''_{\text{пад}}$ и $u_{\text{отр}}$, входящие в равенство (7.33), соответственно совпадают по фазе или находятся в противофазе. Поскольку составляющие $u'_{\text{пад}}$, $u''_{\text{пад}}$ являются синфазными, в пучностях и узлах стоячей волны напряжения $u_{\text{пад}}$, $u_{\text{отр}}$, входящие в равенство (7.33), также совпадают по фазе или соответственно находятся в противофазе.

Таким образом, пучностям и узлам стоячей волны соответствуют максимальные и минимальные значения амплитуды смешанной волны. Они получили название пучностей и узлов сме-

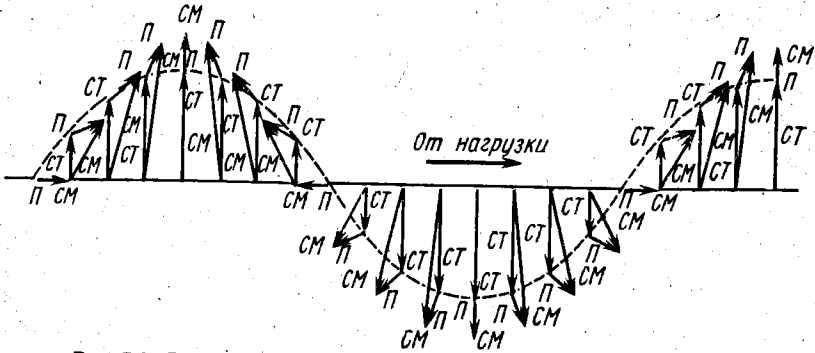


Рис. 7.8. Векторная диаграмма образования смешанных волн

шанной волны. Их значения определяют путем арифметического сложения и вычитания соответствующих амплитуд (рис. 7.9, а):

$$U_{m \max} = U_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ отр}} = U'_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ ст max}}, \quad (7.35)$$

$$U_{m \min} = U_{m \text{ пад}} - U_{m \text{ отр}} = U'_{m \text{ пад}}.$$

Для характеристики смешанных волн пользуются понятием коэффициента бегущей волны (КБВ) и коэффициента стоячей волны (КСВ):

$$k_b = U'_{\text{пад}}/U_{\text{max}} = (U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}})/(U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}) = U_{\min}/U_{\max},$$

$$k_c = 1/k_b = U_{\max}/U_{\min}. \quad (7.36)$$

Эти параметры, определенные с учетом значений амплитуд (7.35), показывают, какую долю от максимальной амплитуды смешанной волны составляет амплитуда бегущей волны $U'_{\text{пад}}$ или во сколько раз первая амплитуда превышает вторую. При значениях амплитуды отраженной волны $0 \leq U_{\text{отр}} \leq U_{\text{пад}}$ КБВ и КСВ изменяются в следующих пределах:

$$1 \geq k_b \geq 0, \quad 1 \leq k_c \leq \infty. \quad (7.37)$$

Левые границы неравенств (7.37) соответствуют так называемому режиму бегущих волн ($U_{\text{отр}} = 0$), а правые — чисто стоячих волн ($U_{\text{отр}} = U_{\text{пад}}$).

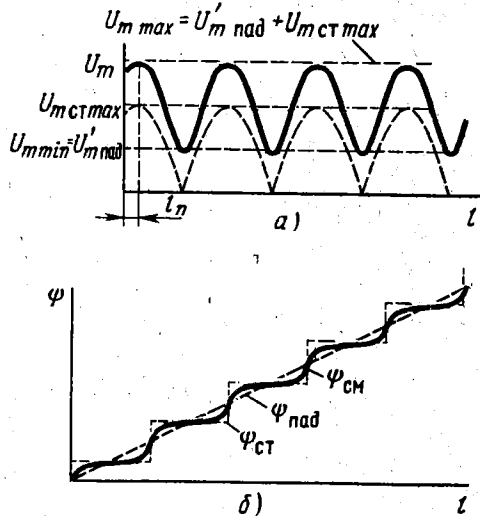


Рис. 7.9. Изменение амплитуды и фазы смешанных волн вдоль линии без потерь

КБВ и КСВ могут быть определены экспериментально. Для этого надо измерить максимальную и минимальную амплитуды смешанных волн в линии, после чего искомые параметры можно рассчитать по формулам (7.36).

4. Волновые процессы в линиях с потерями. Стоячие и смешанные волны, рассмотренные в предыдущих параграфах, образуются при суперпозиции незатухающих бегущих волн. В линии с потерями падающая и отраженная волны являются затухающими (см. § 7.1.3). При суперпозиции таких волн результирующей волновой процесс имеет специфический характер. Для его анализа введем понятие *коэффициента отражения*, показывающего соотношение между отраженной и падающей волнами напряжения или тока:

$$\underline{p} = p e^{j\psi} = \dot{U}_{отр} / \dot{U}_{пад} = -\dot{I}_{отр} / \dot{I}_{пад}. \quad (7.38)$$

Согласно этому определению при $0 \leq U_{отр} \leq U_{пад}$ модуль коэффициента отражения принимает значения

$$0 \leq p \leq 1. \quad (7.39)$$

Однако в линиях с потерями эти значения не являются фиксированными. Как следует из соотношений (7.38) и (7.22), коэффициент отражения изменяется вдоль линии:

$$\underline{p} = p_2 e^{-2\gamma l}, \quad p = p_2 e^{-2\alpha l}, \quad \psi = \psi_2 - 2\beta l, \quad (7.40)$$

где $p_2 = p_2 e^{j\psi_2}$ — коэффициент отражения на конце линии (в сечении нагрузки), причем ψ_2 имеет прежний смысл (7.31), а $p_2 = U_{отр2} / U_{пад2}$.

По формулам (7.40) может быть определен коэффициент отражения в любом сечении линии, если известно его значение в сечении нагрузки. Это значение может быть определено при заданном нагрузочном сопротивлении $\underline{Z}_н$. Согласно закону Ома и формулам (7.11)

$$\underline{Z}_н = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = (\dot{U}_{пад2} + \dot{U}_{отр2}) / (\dot{I}_{пад2} + \dot{I}_{отр2}).$$

Если вынести за скобку величины $\dot{U}_{пад2}$ и $\dot{I}_{пад2}$, то в соответствии с определениями (7.26), (7.38) получим

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{p}_2}{1 - \underline{p}_2}. \quad (7.41)$$

Отсюда определяется коэффициент отражения в сечении нагрузки:

$$\underline{p}_2 = \dot{U}_{отр2} / \dot{U}_{пад2} = (\underline{Z}_н - \underline{Z}_c) / (\underline{Z}_н + \underline{Z}_c). \quad (7.42)$$

Он равен нулю при равенстве нагрузочного и волнового сопротивления линии:

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_c. \quad (7.43)$$

При этом в любом сечении линии коэффициент отражения (7.40) равен нулю. Согласно определению (7.38) это означает

отсутствие отраженной волны, что соответствует режиму бегущих волн. Длинная линия в режиме бегущих волн называется согласованной линией, а равенство (7.43) — условием согласования.

В несогласованной линии модуль коэффициента отражения (7.40) не равен нулю и убывает вдоль линии в направлении к ее входу. При достаточной длине линии модуль ρ стремится к нулю, как бы ни был мал коэффициент затухания α .

Подобное изменение коэффициента отражения приводит к соответствующему изменению КБВ в линии. Действительно, второе равенство (7.36) можно представить в виде

$$k_6 = (1 - U_{отр}/U_{пад}) / (1 + U_{отр}/U_{пад}),$$

или

$$k_6 = (1 - \rho)/(1 + \rho), \quad \rho = (1 - k_6)/(1 + k_6). \quad (7.44)$$

Таким образом, при изменении вдоль линии коэффициента отражения в пределах (7.39) КБВ (7.44) изменяется в пределах (7.37). Следовательно, волновой процесс в разных сечениях линии с потерями характеризуется различной близостью к режиму бегущих волн. В сечениях, прилегающих к нагрузке, волновой процесс может быть близок к режиму стоячих волн. Однако и в этом случае при значительных удалениях от нагрузки устанавливается практически режим бегущих волн (рис. 7.10).

5. Переходные волновые процессы. Рассмотренные волновые режимы являются установившимися. При включении и выключении источника на входе линии в ней возникают переходные волновые процессы, которые протекают следующим образом.

При включении, например, источника э. д. с. (рис. 7.11, а) на входе линии возникает бегущая волна, которую обозначим $u_{пад}^{(1)}$. Бегущая волна распространяется вдоль линии с фазовой скоростью v и через время $\tau = l_0/v$ достигает конца линии, где происходит ее физическое отражение от нагрузки. При этом возникает отраженная волна, которую обозначим $u_{отр}^{(1)}$. Через то же время τ после отражения она достигает входа линии. Здесь снова

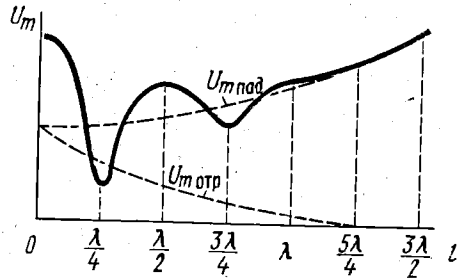


Рис. 7.10. Изменение амплитуды волн вдоль линии с потерями

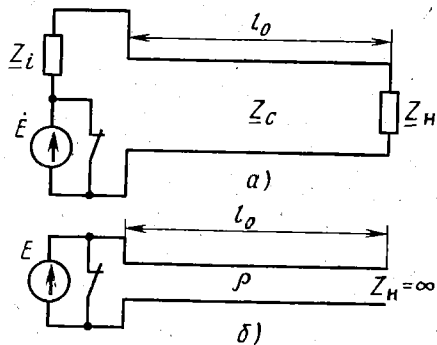


Рис. 7.11. Включение источника э. д. с. на входе длинной линии

происходит физическое отражение, но уже волны $u_{отр}^{(1)}$. Возникает новая волна, распространяющаяся к сечению нагрузки. Обозначим ее $u_{пад}^{(2)}$. Далее процесс отражения на конце и на входе линии многократно повторяется. При этом в линии возникают новые бегущие волны $u_{отр}^{(2)}$, $u_{пад}^{(3)}$, $u_{отр}^{(3)}$, $u_{пад}^{(4)}$, $u_{отр}^{(4)}$ и т. д. до бесконечности.

Падающая и отраженная (прямая и обратная) волны в установившемся режиме являются по существу результатом суперпозиции падающих и отраженных волн переходного режима:

$$u_{пад} = u_{пад}^{(1)} + u_{пад}^{(2)} + \dots + u_{пад}^{(N)}, \quad (7.45)$$

$$u_{отр} = u_{отр}^{(1)} + u_{отр}^{(2)} + \dots + u_{отр}^{(N)},$$

где $N \rightarrow \infty$. Теоретически этот процесс длится бесконечно долго, как и переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами. Практически суммы (7.45) могут быть ограничены конечным числом слагаемых, так что длительность переходного волнового процесса получается конечной. Такое ограничение обусловлено убыванием амплитуд многократно отраженных волн $u_{пад}^{(k)}$ и $u_{отр}^{(k)}$ с ростом номера k , которое обусловлено двумя факторами. Во-первых, сами многократно отраженные волны затухают в процессе своего распространения. Во-вторых, при каждом физическом отражении волны амплитуда отраженной волны получается меньше амплитуды отражаемой волны. Это можно установить, рассмотрев коэффициенты отражения волн от конца и от входа линии.

Коэффициент отражения волны от конца линии, или от ее нагрузки, имеет одинаковое значение для всех многократно отраженных волн:

$$r_n = \dot{U}_{отр2}^{(1)} / \dot{U}_{пад2}^{(1)} = \dot{U}_{отр2}^{(2)} / \dot{U}_{пад2}^{(2)} = \dots = \dot{U}_{отр2}^{(N)} / \dot{U}_{пад2}^{(N)}. \quad (7.46)$$

Коэффициенты отражения (7.42), (7.46) на конце и от конца линии имеют одинаковые значения, хотя их физический смысл различен. Учитывая специально измененные обозначения, значение коэффициента отражения (7.46) находим из формулы (7.42):

$$r_n = (Z_n - Z_c) / (Z_n + Z_c). \quad (7.47)$$

Отражение волн от входа линии также можно характеризовать коэффициентом отражения, который одинаков для всех отраженных волн:

$$r_i = \dot{U}_{пад1}^{(2)} / \dot{U}_{отр1}^{(1)} = \dot{U}_{пад1}^{(3)} / \dot{U}_{отр1}^{(2)} = \dots = \dot{U}_{пад1}^{(N)} / \dot{U}_{отр1}^{(N-1)}. \quad (7.48)$$

Согласно формуле (7.47) отражение волн от конца линии является следствием расхождения в значениях нагрузочного и волнового сопротивлений. Аналогично, отражение волн от входа линии происходит в результате расхождения в значениях волнового сопротивления и внутреннего сопротивления Z_i источника, включенного на входе линии. Поэтому по аналогии с формулой (7.47) получаем значение коэффициента отражения (7.48) от входа линии:

$$r_i = (Z_i - Z_c) / (Z_i + Z_c) \quad (7.49)$$

Следует подчеркнуть, что коэффициенты отражения от входа и на входе линии не равны друг другу, т. е. $p_i \neq p_i = p|_{l=0}$, как это видно из сравнения формул (7.49) и (7.40), (7.42).

Из формул (7.47), (7.49) следует, что в общем случае $p_n < 1$ и $p_i < 1$. Это и обуславливает уменьшение амплитуд волн при их отражении, как было отмечено выше. Однако в некоторых частных случаях может наблюдаться так называемое полное отражение волн, при котором $p_n = p_i = 1$.

Волны тока в переходном режиме имеют аналогичный характер. Однако при определении многократно отраженных волн тока следует учитывать, что согласно равенствам (7.26) коэффициенты отражения по напряжению и по току имеют разные знаки. В частности, из формул (7.47) и (7.49) находим следующие значения указанных коэффициентов:

$$\underline{p}_n = -(\underline{Z}_n - \underline{Z}_c)/(\underline{Z}_n + \underline{Z}_c), \quad \underline{p}_i = -(\underline{Z}_i - \underline{Z}_c)/(\underline{Z}_i + \underline{Z}_c). \quad (7.50)$$

Рассмотрим для примера переходный волновой процесс в разомкнутой линии без потерь. Пусть в момент времени $t=0$ на входе этой линии включается источник постоянной э. д. с. E , имеющей внутреннее сопротивление $\underline{Z}_i = 0$ (рис. 7.11, б). При этом из формул (7.47), (7.49), (7.50) находим

$$\underline{p}_n = 1, \quad \underline{p}_{nl} = -1, \quad \underline{p}_i = -1, \quad \underline{p}_{il} = 1. \quad (7.51)$$

Таким образом, в данном случае происходит полное отражение волн напряжения и тока как от конца, так и от входа линии. Знаки «+» и «-» у вещественных коэффициентов отражения (7.51) означают, что отражение волн происходит соответственно в фазе или в противофазе с отражаемой волной. При постоянных напряжениях и токах это означает сохранение или смену полярности напряжения и направления тока для отраженной волны по отношению к отражаемой волне.

Для бегущей волны постоянного тока, как и при гармонических колебаниях, линия без потерь оказывает сопротивление, равное волновому сопротивлению (7.9). Поэтому при $u_{\text{пад}}^{(1)} = E$ получается $i_{\text{пад}}^{(1)} = I = E/\rho$. Многократно отраженные волны находят через коэффициенты отражения (7.51) в соответствии с определениями (7.46) и (7.48):

$$\begin{aligned} u_{\text{отр}}^{(1)} &= E, \quad i_{\text{отр}}^{(1)} = -I, \quad u_{\text{пад}}^{(2)} = -E, \quad i_{\text{пад}}^{(2)} = -I, \\ u_{\text{отр}}^{(2)} &= -E, \quad i_{\text{отр}}^{(2)} = I, \quad u_{\text{пад}}^{(3)} = E, \quad i_{\text{пад}}^{(3)} = I \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Дальнейшие значения многократно отраженных волн повторяются, поскольку $u_{\text{пад}}^{(3)}, i_{\text{пад}}^{(3)}$ совпадают с $u_{\text{пад}}^{(1)}, i_{\text{пад}}^{(1)}$.

Представляют интерес ток i_1 на входе линии и напряжение u_2 на выходе линии, которые будем определять сложением падающих и отраженных волн (7.52) переходного режима. Учитывая моменты возникновения отражений от конца линии ($\tau, 3\tau, 5\tau, \dots$) и от входа линии ($2\tau, 4\tau, 6\tau, \dots$), находим:

$$i_1|_{0 \leq t < 2\tau} = i_{\text{пад}}^{(1)} = I = E/\rho,$$

$$i_1|_{2\tau \leq t < 4\tau} = i_{\text{пад}}^{(1)} + i_{\text{отр}}^{(1)} + i_{\text{пад}}^{(2)} = -I,$$

$$i_1|_{4\tau \leq t < 6\tau} = i_{\text{пад}}^{(1)} + i_{\text{отр}}^{(1)} + i_{\text{отр}}^{(2)} + i_{\text{пад}}^{(3)} = I \text{ и т. д.}$$

$$u_2|_{0 \leq t < \tau} = 0,$$

$$u_2|_{\tau \leq t < 3\tau} = u_{\text{пад}}^{(1)} + u_{\text{отр}}^{(1)} = 2E,$$

$$u_2|_{3\tau \leq t < 5\tau} = u_{\text{пад}}^{(1)} + u_{\text{отр}}^{(1)} + u_{\text{пад}}^{(2)} + u_{\text{отр}}^{(2)} = 0 \text{ и т. д.}$$

Найденное изменение i_1 и u_2 показано на рис. 7.12, а, б. Из этих графиков видно, что в разомкнутой линии без потерь при включении источника постоянной э. д. с. возникают прямоугольные колебания с периодом $T_0 = 4\tau = 4l_0/v$. Этому периоду соответствует частота колебаний $f_0 = 1/T_0 = v/4l_0$ и длина волны $\lambda_0 = vT_0 = 4l_0$, так что $l_0 = \lambda_0/4$.

Такой период колебаний обусловлен различными условиями отражения от конца и от входа линии. На конце линии $p_n = 1$

(режим холостого хода), а на входе линии $p_l = -1$ (режим короткого замыкания). При этом говорят о разноименных граничных условиях на двух концах линии. При одноименных граничных условиях (х. х. или к. з.) на входе и на конце линии период колебаний получается другим.

Пусть, например, в той же линии (см. рис. 7.11, б) включается не источник э. д. с., а источник постоянного тока J . Для него $Z_i = \infty$, так что в разомкнутой линии получается режим холостого хода на обоих ее концах. При этом $p_{nl} = p_{ll} = -1$. Тогда $i_{\text{пад}}^{(1)} = i_{\text{пад}}^{(2)} = i_{\text{пад}}^{(3)} = \dots = J$ и $i_{\text{отр}}^{(1)} = i_{\text{отр}}^{(2)} = i_{\text{отр}}^{(3)} = \dots = -J$. В сечении линии на некотором расстоянии $\Delta l/2$ от ее выхода все падающие волны появятся в моменты времени $(2k+1)\tau - \Delta\tau/2$, а все отраженные волны — в моменты времени $(2k+1)\tau + \Delta\tau/2$, где $k=0,$

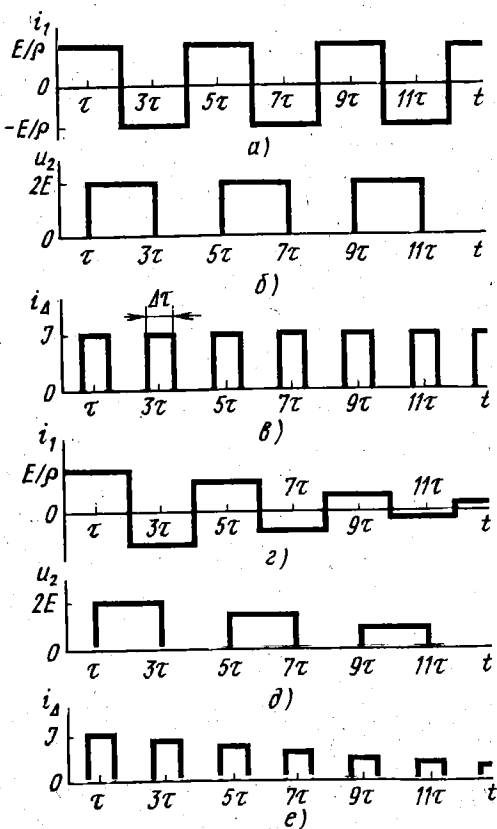


Рис. 7.12. Переходные процессы в длинной линии

1, 2, ..., а $\Delta\tau/2 = \Delta l/2v$. Таким образом, в указанном сечении линии образуются импульсы тока i_{Δ} длительностью $\Delta\tau$, как показано на рис. 7.12, в. Эти импульсы следуют с периодом $T_0 = 2\tau = 2l_0/v$, которому соответствует частота $f_0 = 1/T_0 = 1/2\tau$ и длина волн $\lambda_0 = vT_0 = 2l_0$, так что $l_0 = \lambda_0/2$.

Из рассмотренных примеров видно, что при полном отражении от обоих концов линии она обладает колебательными свойствами, как и колебательные цепи с сосредоточенными параметрами. Получающиеся в линии осесимметричные прямоугольные колебания могут быть разложены на гармонические составляющие с частотами $f_1 = f_0, f_3 = 3f_0, f_5 = 5f_0, \dots$, а прямоугольные импульсы с периодом T_0 — на гармонические составляющие с частотами $f_1 = f_0, f_2 = 2f_0, f_3 = 3f_0$ и т. д. Этим частотам гармоник соответствуют длины волн $\lambda_1 = \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_0/2, \lambda_3 = \lambda_0/3$ и т. д. Поэтому длинные линии называют многоволновыми колебательными системами.

При разноименных граничных условиях, когда $l_0 = \lambda_0/4$, для любых гармоник в линии укладывается нечетное число четвертей волн. При одноименных граничных условиях, когда $l_0 = \lambda_0/2$, в линии укладывается целое число полуволн для любых гармоник возникающих колебаний.

Рассмотренные периодические колебания являются незатухающими, что обусловлено отсутствием потерь в линии. В линии с потерями эти колебания затухают, как показано на рис. 7.12, г—е. Такой же эффект затухания колебаний получается при неполном отражении от конца и от входа линии, когда часть энергии поглощается в сопротивлениях R_n и R_i , не равных нулю, ни бесконечности.

§ 7.3. ВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛИНИИ

Параметры α, β, Z_c, ρ и фазовая скорость v характеризуют бегущие волны в линии и соотношения между ними. Поэтому вместе с коэффициентом распространения γ они получили название волновых параметров длинной линии.

В соответствии со спектральным методом анализа процессов в цепях передача по линии сложных сигналов означает прохождение в этой линии гармонических колебаний с разными частотами. Поэтому на такое прохождение существенное влияние оказывают частотные зависимости волновых параметров, которые рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Волновое сопротивление. Вещественное волновое сопротивление (7.9) идеальной линии не зависит от частоты. Комплексное волновое сопротивление (7.8) линии с потерями является частотозависимым. Его модуль и аргумент определяются из соотношений (7.8) и (7.1):

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}}, \quad \varphi_c = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{\omega L_0}{R_0} - \arctg \frac{\omega C_0}{G_0} \right). \quad (7.53)$$

Отсюда определяются предельные значения этих параметров на постоянном токе и при бесконечно большой частоте:

$$Z_c|_{\omega=0} = \rho_H = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}, \quad Z_c|_{\omega=\infty} = \rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \varphi_c|_{\omega=0} = \varphi_c|_{\omega=\infty} = 0, \quad (7.54)$$

где обозначение ρ соответствует формуле (7.9).

Обычно погонные параметры фидеров удовлетворяют некоторому неравенству, которое запишем в двух видах:

$$L_0/C_0 < R_0/G_0, \quad L_0/R_0 < C_0/G_0. \quad (7.55)$$

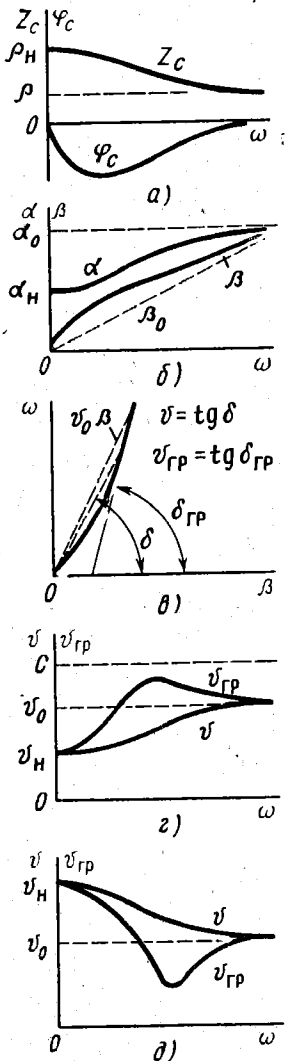


Рис. 7.13. Графики частотных зависимостей волновых параметров

Эти неравенства обусловлены теми же обстоятельствами, которые определяют соотношения между добротностями катушки индуктивности и конденсатора ($Q_L = \omega L/r_L < Q_C = \omega C/G_C$). С учетом неравенств (7.55) и значений параметров (7.54) определяются графики частотных зависимостей (7.53). Они показаны на рис. 7.13, а.

Эти зависимости означают, что в режиме бегущих волн, образуемых сложным сигналом, напряжение и ток зависят от частоты неодинаково. При заданном токе сигнал в согласованной линии претерпевает частотные и фазовые искажения по напряжению. При заданном же напряжении сигнал в согласованной линии претерпевает частотные и фазовые искажения по току.

2. Коэффициент распространения.

В согласованной линии частотные и фазовые искажения по напряжению и по току возникают также за счет зависимости от частоты коэффициента распространения. В режиме бегущих волн передача сигналов по линии может быть охарактеризована коэффициентом передачи

$$\underline{K}(\omega) = K(\omega)e^{i\theta(\omega)} = \dot{U}_{\text{пад}2}/\dot{U}_{\text{пад}1} = I_{\text{пад}2}/I_{\text{пад}1}. \quad (7.56)$$

Значение этого коэффициента для линии длиной l_0 определяется из соотношений (7.22):

$$\underline{K}(\omega) = e^{-\gamma(\omega)l_0}, \quad K(\omega) = e^{-\alpha(\omega)l_0}, \quad (7.57)$$

$$\theta(\omega) = -\beta(\omega)l_0,$$

В идеальной линии коэффициент распространения определяется равенствами (7.5). При этом частотная и фазовая характеристики (7.57) удовлетворяют условиям отсутствия частотных и фазовых искажений (см. § 6.1.6).

В линии с потерями коэффициент распространения имеет сложную частотную зависимость и определяется из соотношений (7.4), (7.1):

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (7.58)$$

Для определения коэффициентов затухания и фазы возведем в квадрат это выражение:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(R_0 C_0 + G_0 L_0),$$

откуда

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0. \quad (7.59)$$

С другой стороны, квадрат модуля коэффициента (7.58) имеет значение

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}. \quad (7.60)$$

Складывая и вычитая равенства (7.60), (7.59), находим точные значения коэффициентов затухания и фазы:

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} [R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}]}, \quad (7.61)$$

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}]}. \quad (7.62)$$

Эти точные соотношения показывают, что $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ увеличиваются с ростом частоты. Однако для качественного анализа этой частотной зависимости равенства (7.61) и (7.62) неудобны. Для упрощения анализа воспользуемся приближенной формулой бинорма Ньютона:

$$\sqrt{a+b} \Big|_{b \ll a} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}. \quad (7.63)$$

При $\omega \rightarrow 0$ можно принять $\omega L_0 \ll R_0$ и $\omega C_0 \ll G_0$, как бы ни были малы потери. При этом в соответствии с формулой (7.63) соотношение (7.58) преобразуется следующим образом:

$$\gamma|_{\omega \rightarrow 0} = \gamma_n = \alpha_n + j\beta_n = \left(\sqrt{R_0} + \frac{j\omega L_0}{2\sqrt{R_0}} \right) \left(\sqrt{G_0} + \frac{j\omega C_0}{2\sqrt{G_0}} \right).$$

При раскрытии скобок пренебрежем здесь произведением вторых слагаемых. Тогда получим

$$\alpha_n = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \beta_n = 0,5\omega(L_0/\rho_n + \rho_n C_0), \quad (7.64)$$

где ρ_n определяется первым равенством (7.54).

При $\omega \rightarrow \infty$ можно принять $R_0 \ll \omega L_0$ и $G_0 \ll \omega C_0$, как бы ни были велики потери. При этом в соответствии с формулой (7.63) соотношение (7.58) преобразуется к виду

$$\gamma|_{\omega \rightarrow \infty} = \gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0 \approx \left(\sqrt{j\omega L_0} + \frac{R_0}{2\sqrt{j\omega L_0}} \right) \left(\sqrt{j\omega C_0} + \frac{G_0}{2\sqrt{j\omega C_0}} \right).$$

Аналогично предыдущему отсюда получаем

$$\alpha_0 = 0,5(R_0/\rho + \rho G_0), \quad \beta_0 = \omega\sqrt{L_0 C_0}, \quad (7.65)$$

где ρ определяется формулой (7.9), а значение β_0 совпало с такой же величиной (7.5) для линии без потерь.

Из соотношений (7.64) и (7.65) следует, что

$$\frac{\alpha_0}{-\alpha_n} = \frac{d\beta_n}{d\omega} / \frac{d\beta_0}{d\omega} = \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right), \quad \text{где } A = \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \frac{G_0}{R_0}}.$$

Из неравенств (7.55) следует, что $A < 1$. При этом найденные значения параметров удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_0 > \alpha_n, \quad \frac{d\beta_n}{d\omega} > \frac{d\beta_0}{d\omega}. \quad (7.66)$$

Последнее неравенство означает, что на низких частотах $\beta(\omega)$ возрастает быстрее, чем на высоких. С учетом неравенств (7.66) на рис. 7.13, б построены графики частотных зависимостей коэффициентов (7.61) и (7.62). Из этих графиков и формул (7.57) видно, что в режиме бегущих волн линия с потерями вносит частотные искажения за счет частотной зависимости $\alpha(\omega)$ и фазовые искажения за счет нелинейности характеристики $\beta(\omega)$. Следует также иметь в виду, что вследствие зависимости от частоты погонных параметров R_0 и G_0 (см. табл. П. 14) частотная зависимость $\alpha(\omega)$ получается еще сложнее.

3. Фазовая и групповая скорости. О фазовых искажениях в линии с потерями можно судить также по значению фазовой скорости (7.19). В идеальной линии эта скорость постоянна, как следует из соотношений (7.19) и (7.5):

$$v|_{\alpha=0} = v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (7.67)$$

Подставив сюда значения погонных параметров (см. табл. П.14), для двухпроводных и коаксиальных фидеров получаем

$$v_0 = 1/\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (7.68)$$

Для воздушных фидеров (для фидеров с воздушной изоляцией) магнитная проницаемость μ и диэлектрическая проницаемость ϵ имеют значения, близкие к их значениям в вакууме (см. табл. II.14). При этом фазовая скорость (7.68) практически равна скорости света:

$$v_0 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.} \quad (7.69)$$

В режиме бегущих волн все спектральные составляющие сложного сигнала распространяются в линии без потерь с постоянной и одинаковой скоростью, имеющей одно из значений (7.67) — (7.69). При этом все они достигают конца линии одновременно. Такая одновременность означает отсутствие взаимных временных сдвигов для всех спектральных составляющих сигнала, что эквивалентно отсутствию его фазовых искажений в режиме бегущих волн.

В линии с потерями фазовая скорость зависит от частоты. Это наглядно видно из графика $\omega(\beta)$, который построен на рис. 7.13, в по графику $\beta(\omega)$ рис. 7.13, б. Из рис. 7.13, в и формулы (7.19) следует, что с ростом частоты фазовая скорость увеличивается, как показано на рис. 7.13, г. Поэтому в линиях с потерями гармонические волны разных частот распространяются с разной скоростью и сдвигаются относительно друг друга. Это явление называется дисперсией волн (от лат. dispersio — рассеяние). Вследствие дисперсии гармонические составляющие сигнала достигают конца линии неодновременно, что эквивалентно наличию его фазовых искажений в режиме бегущих волн.

Распространение бегущих волн в линии можно характеризовать не только фазовой, но и так называемой групповой скоростью $v_{гр}$. Эта скорость характеризует распространение в линии группы из двух бегущих волн с бесконечно близкими частотами $\omega - d\omega$, $\omega + d\omega$, чем и обусловлено ее название.

Для указанных волн фазовые коэффициенты отличаются на бесконечно малую величину и имеют значения $\beta - d\beta$, $\beta + d\beta$. Примем для простоты амплитуды этих волн одинаковыми. Тогда две падающие волны напряжения (7.23) можно описать следующим образом:

$$u'_{пад} = U_{мпал} e^{-\alpha l'} \cos[(\omega - d\omega)t - (\beta - d\beta)l' + \psi_{пад}],$$

$$u''_{пад} = U_{мпал} e^{-\alpha l'} \cos[(\omega + d\omega)t - (\beta + d\beta)l' + \psi_{пад}].$$

При сложении этих колебаний с близкими частотами образуются биения (см. § 5.6.4):

$$u = u'_{пад} + u''_{пад} = U_m(t, l') \cos(\omega t - \beta l' + \psi_{пад}), \quad (7.70)$$

где

$$U_m(t, l') = 2U_{мпал} e^{-\alpha l'} \cos(l' - l_{ог}) d\beta. \quad (7.71)$$

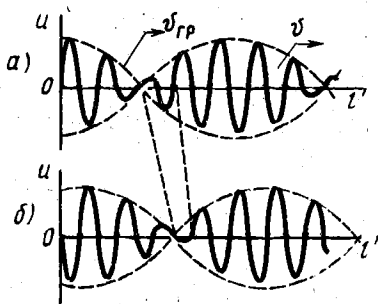


Рис. 7.14. Распространение биений (группы волн) в линии

групповая скорость имеет и для модулированных колебаний, характеризую скорость распространения вдоль линии их огибающей.

На рис. 7.13, в видно, что групповую скорость (7.72) можно определить как крутизну характеристики $\omega(\beta)$. При этом, как видно из построения, групповая скорость превышает фазовую, поскольку $\delta_{гр} > \delta$. Из этого же графика видно, что с ростом частоты групповая скорость немонотонно увеличивается, как показано на рис. 7.13, г.

Итак, при рассмотренной дисперсии волн, обусловленной потерями в линии, фазовая скорость увеличивается с ростом частоты, а групповая скорость превышает фазовую. Такая дисперсия называется аномальной. При нормальной дисперсии фазовая скорость превышает групповую и уменьшается с ростом частоты (рис. 7.13, д). Нормальная дисперсия может быть обусловлена не энергетическими потерями, а другими физическими факторами. Она наблюдается, например, в электромагнитных и акустических волноводах, хотя для них графики $v(\omega)$ и $v_{гр}(\omega)$ отличаются от графиков рис. 7.13, д.

4. Коэффициент отражения. При наличии отраженной волны она накладывается на падающую волну:

$$\dot{U} = \dot{U}_{пад} + \dot{U}_{отр} = \dot{U}_{пад}(1 + \rho). \quad (7.73)$$

Это приводит к изменению амплитуды и фазы суммарной волны по сравнению с амплитудой и фазой падающей волны. Подобное изменение может явиться причиной частотных и фазовых искажений сигнала при отсутствии этих искажений в режиме бегущих волн.

Указанные искажения зависят от частотных свойств коэффициента отражения (7.40), который сам зависит от коэффициента отражения (7.42) в конце линии. Поскольку искажения сигнала представляют интерес в сечении нагрузки, требуется рассмотреть значение $\rho_2 = \rho|_{l=0}$. Частотные свойства ρ_2 , т. е. $\rho_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ зависят от частотных свойств нагрузочного и волнового сопротивлений. В идеальной линии с частотнезависимым волновым

$$l_{3,ог} = v_{гр}t, \quad v_{гр} = \frac{l_{3,ог}}{t} = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (7.72)$$

Пространственное запаздывание $l_{3,ог}$ и скорость $v_{гр}$ имеют здесь тот же смысл, что и величины (7.19), но относятся они к огибающей биений (7.71). Поэтому сами биения (7.70) распространяются в линии с фазовой скоростью (7.19), а их огибающая перемещается вдоль линии с групповой скоростью (7.72), как показано на рис. 7.14, а, б. Этот смысл

сопротивлением (7.9) частотные свойства p_2 и искажения сигналов в нагрузке целиком определяются ее частотными зависимостями $Z_n(\omega)$ и $\varphi_n(\omega)$. Если при этом и нагрузочное сопротивление $Z = R_n$ является диссипативным и частотонезависимым, то коэффициент отражения (7.42) становится постоянной величиной:

$$p_2 = p_2 = (R_n - \rho)/(R_n + \rho). \quad (7.74)$$

Из соотношений (7.73) и (7.74) следует, что в идеальной линии при диссипативном нагрузочном сопротивлении искажения сигналов отсутствуют.

5. Волновые параметры сбалансированной линии. Длинная линия называется сбалансированной, если ее первичные параметры удовлетворяют условию О. Хевисайда, сформулированному им в 1893 г.:

$$L_0/C_0 = R_0/G_0, \quad L_0/R_0 = C_0/G_0. \quad (7.75)$$

Обычные линии, параметры которых удовлетворяют неравенствам (7.55), являются несбалансированными. Для выполнения условия (7.75) существует единственно приемлемый путь — увеличение L_0 , поскольку уменьшение C_0 и R_0 практически невозможно, а увеличение G_0 невыгодно. Увеличение погонной индуктивности достигается включением в линии через одинаковые интервалы катушек индуктивности или обмоткой проводов ферромагнитной лентой. Первый способ балансировки линии связи называется пупинизацией (М. Пупин, 1900), а второй — краунизацией (Ц. Крауп, 1902).

Волновые параметры сбалансированной линии существенно отличаются от рассмотренных. При подстановке условия (7.75) в формулу (7.8) получаем

$$\begin{aligned} \underline{Z}_c &= \underline{Z}_{c6} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)/(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{R_0/G_0} \sqrt{(1 + j\omega L_0/R_0)/(1 + j\omega C_0/G_0)}, \end{aligned}$$

или

$$\underline{Z}_{c6} = \rho_6 = \rho = \sqrt{R_0/G_0} = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (7.76)$$

Таким образом, волновое сопротивление сбалансированной линии при любых потерях является вещественным и частотонезависимым. При этом волновое сопротивление (7.76) совпадает с волновым сопротивлением (7.9) линии без потерь и с предельными значениями (7.54).

Постоянная распространения (7.4) при выполнении условия (7.75) принимает значение

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R_0 G_0} \sqrt{(1 + j\omega L_0/R_0)(1 + j\omega C_0/G_0)} = \sqrt{R_0 G_0} (1 + j\omega L_0/R_0),$$

или

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_6 = \alpha_6 + j\beta_6, \quad \alpha_6 = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \beta_6 = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.77)$$

Следовательно, коэффициент затухания (7.77) сбалансированной линии является постоянной частотонезависимой величиной. Поскольку же $\alpha_n < \alpha_0$ (см. рис. 7.13, б), этот коэффициент имеет минимальное значение (7.64) на всех частотах, включая высокие. Коэффициент затухания (7.65) на этих частотах минимизируется за счет увеличения волнового сопротивления до значения $\rho = \rho_0$. Поэтому волновое сопротивление (7.76) называется оптимальным.

Фазовый коэффициент (7.77) пропорционален частоте. Поэтому фазовая скорость (7.19) в сбалансированной линии является постоянной величиной, как и фазовая скорость (7.67) в линии без потерь:

$$v_0 = v_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.78)$$

Рассмотренные свойства волновых параметров (7.76) — (7.78) означают, что в режиме бегущих волн, т. е. при согласованной нагрузке, сбалансированная линия, как и линия без потерь, является неискажающей, поскольку она не вносит частотных и фазовых искажений.

§ 7.4. РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

Некоторые из полученных формул могут использоваться при расчете длинных линий. В ряде же расчетов удобно применять специальные соотношения, которые рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Расчет вторичных параметров. Для определения вторичных параметров (7.4) и (7.8) необходимо знать величину потерь в линии. Расчет погонных параметров R_0 и G_0 , определяющих потери в линии, возможен по приближенным формулам. Например, на высоких частотах пригодны формулы, приведенные в табл. П.14. С их помощью определяется, в частности, коэффициент затухания (7.65). В ряде же случаев коэффициент затухания точнее определяется экспериментально, как показано ниже.

Если потери в линии пренебрежимо малы, то вторичные параметры (7.5) и (7.9) определяются достаточно точно. Для этого можно использовать значения погонных параметров L_0 и C_0 , приведенные в табл. П.14. Тогда, в частности, для волнового сопротивления (7.5) получаются следующие расчетные формулы:

$$\rho \approx 276 \lg \frac{d_n - r_n}{r_n} \approx 276 \frac{d_n}{r_n}, \quad \rho \approx 138 \lg \frac{R_n}{r_n}. \quad (7.79)$$

Здесь первая формула относится к двухпроводной линии, причем приближенные равенства справедливы при $d_n \gg r_n$. Вторая формула (7.79) определяет волновое сопротивление коаксиальной линии.

Расчетные формулы для вторичных параметров фидеров различных конструкций, пригодные в отдельных частных случаях, приводятся в справочных пособиях.

2. Расчет напряжений и токов. Напряжение и ток в произвольном сечении линии на расстоянии l от нагрузки описываются общими решениями (7.6), (7.10) телеграфных уравнений. Как отмечалось, постоянные интегрирования в этих решениях определяются из граничных условий. Зададимся значениями напряжения и тока в нагрузке: $\dot{U}|_{l=0} = \dot{U}_n$, $\dot{I}|_{l=0} = \dot{I}_n$. Тогда из уравнений (7.6), (7.7) получим

$$\dot{U}_n = A_1 + A_2, \quad \dot{I}_n = (A_1 - A_2)/Z_c,$$

откуда

$$A_1 = \dot{A}_1 = (\dot{U}_n + Z_c \dot{I}_n)/2, \quad A_2 = \dot{A}_2 = (\dot{U}_n - Z_c \dot{I}_n)/2.$$

Подставляя эти константы в уравнения (7.6), (7.7) и переходя к гиперболическим функциям, получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_n \text{ch} \underline{\gamma} l + Z_c \dot{I}_n \text{sh} \underline{\gamma} l, \quad \dot{I} = \dot{I}_n \text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\dot{U}_n}{Z_c} \text{sh} \underline{\gamma} l. \quad (7.80)$$

Если задаться граничными условиями на входе линии ($\dot{U}|_{l'=0} = \dot{U}_0$, $\dot{I}|_{l'=0} = \dot{I}_0$), то из соотношений (7.10) найдем

$$\dot{U}_0 = B_1 + B_2, \quad \dot{I}_0 = (B_1 - B_2)/Z_c,$$

откуда

$$B_1 = \dot{B}_1 = (\dot{U}_0 + Z_c \dot{I}_0)/2, \quad B_2 = \dot{B}_2 = (\dot{U}_0 - Z_c \dot{I}_0)/2.$$

При этих константах интегрирования из уравнений (7.10) получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_0 \text{ch} \underline{\gamma} l' - Z_c \dot{I}_0 \text{sh} \underline{\gamma} l', \quad \dot{I} = \dot{I}_0 \text{ch} \underline{\gamma} l' - \frac{\dot{U}_0}{Z_c} \text{sh} \underline{\gamma} l'. \quad (7.81)$$

Учитывая, что $\text{ch} jx = \cos x$, $\text{sh} jx = j \sin x$, из соотношений (7.80), (7.81) и (7.5), (7.9) находим напряжение и ток в идеальной линии:

$$\dot{U} = \dot{U}_n \cos \beta l + j \rho \dot{I}_n \sin \beta l = \dot{U}_0 \cos \beta l' - j \rho \dot{I}_0 \sin \beta l', \quad (7.82)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_n \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_n}{\rho} \sin \beta l = \dot{I}_0 \cos \beta l' - j \frac{\dot{U}_0}{\rho} \sin \beta l'. \quad (7.83)$$

Кроме формул (7.80)–(7.83) можно использовать расчетные соотношения для линии, рассматриваемой в качестве четырехполюсника (см. гл. 8).

3. Расчет энергетических параметров. При использовании длинной линии в качестве фидера необходимо определять его к. п. д.:

$$\eta = P_n/P_0, \quad (7.84)$$

где P_n — мощность, потребляемая нагрузкой; P_0 — мощность, отдаваемая источником в фидер.

Мощность, переносимая волной по фидеру, может быть представлена в любом сечении линии как разность мощностей $P_{пад}$ и $P_{отр}$, переносимых падающей и отраженной волнами. Поэтому, используя прежние индексы «1» и «2» для входа и выхода линии, представим выражение (7.84) в виде

$$\eta = (P_{пад2} - P_{отр2}) / (P_{пад1} - P_{отр1}).$$

Это соотношение с учетом формул (7.26), (7.38) и (7.40) может быть преобразовано к виду, удобному для расчетов:

$$\eta = \frac{U_{пад2}^2 - U_{отр2}^2}{U_{пад1}^2 - U_{отр1}^2} = \left(\frac{U_{пад2}}{U_{пад1}} \right)^2 \frac{1 - (U_{отр2}/U_{пад2})^2}{1 - (U_{отр1}/U_{пад1})^2},$$

или

$$\eta = e^{-2\alpha l_0} \frac{1 - \rho_2^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{1 - \rho_2^2}{e^{2\alpha l_0} - \rho_2^2 e^{-2\alpha l_0}}. \quad (7.85)$$

Отсюда видно, что при увеличении потерь, когда αl_0 возрастает, и модуля коэффициента отражения (7.42) к. п. д. фидера снижается (рис. 7.15). Максимальное значение к. п. д. получается в режиме бегущих волн, когда $\rho_2 = 0$. Это значение к. п. д. согласованной линии определяется из формулы (7.85):

$$\eta_{max} = e^{-2\alpha l_0} \approx 1 - 2\alpha l_0. \quad (7.86)$$

Последнее приближенное равенство справедливо при $2\alpha l_0 \ll 1$.

Из формул (7.85), (7.86) видно, что балансировка линии, минимизирующая коэффициент затухания, также повышает к. п. д. фидера.

При некоторых применениях длинной линии надо знать ее добротность (3.55). Добротность отрезка линии определяется в режиме стоячих волн, когда напряжение и ток сдвинуты по

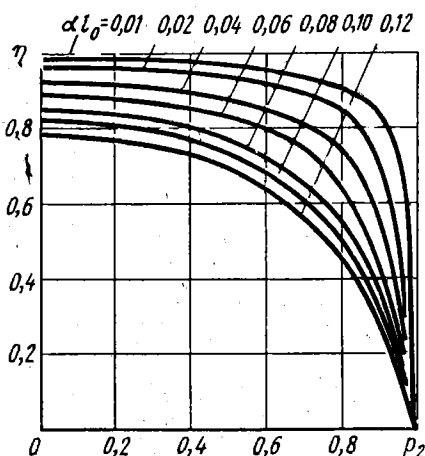


Рис. 7.15. График зависимости к. п. д. фидера от коэффициента отражения и потерь в линии

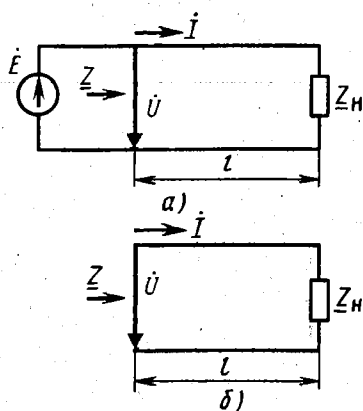


Рис. 7.16. Определение входного сопротивления линии

фазе на угол $\pi/2$. При этом запасенная энергия поочередно переходит из магнитного в электрическое поле и обратно. Таким образом, запас энергии в отрезке линии остается неизменным и равным максимальной энергии в магнитном поле, когда ток принимает амплитудное значение, или максимальной энергии в электрическом поле, когда напряжение принимает амплитудное значение:

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{L_0}{2} \int_0^{l_0} I_m^2 dl = \frac{C_0}{2} \int_0^{l_0} U_m^2 dl \quad (7.87)$$

Мощность потерь в рассматриваемом отрезке линии складывается из мощности потерь на сопротивлении R_0 и проводимости G_0 :

$$P = \frac{R_0}{2} \int_0^{l_0} I_m^2 dl + \frac{G_0}{2} \int_0^{l_0} U_m^2 dl. \quad (7.88)$$

Разделив мощность (7.88) на одно из значений энергии (7.87), в соответствии с определением добротности и затухания (3.55) получим

$$d = 1/Q = R_0/\omega L_0 + G_0/\omega C_0. \quad (7.89)$$

С учетом соотношений (7.65), (7.54) и (7.20) формулу (7.89) можно преобразовать к виду, удобному для расчетов:

$$Q = \beta_0/2\alpha_0 = \pi/\alpha_0\lambda. \quad (7.90)$$

В ряде случаев добротность отрезка линии может быть измерена экспериментально с помощью специальных приборов. Тогда по известной добротности из формулы (7.90) может быть определен коэффициент затухания.

4. Расчет входного сопротивления. *Входное сопротивление линии в произвольном ее сечении на расстоянии l от нагрузки определяется в соответствии с законом Ома (рис. 7.16, а):*

$$\underline{Z} \approx \dot{U}/\dot{I}. \quad (7.91)$$

Такое определение соответствует входному сопротивлению линии длиной l , как показано на рис. 7.16, б.

Входное сопротивление находят подстановкой соотношений (7.80) и (7.82), (7.83) в определение (7.91). Тогда с учетом значения нагрузочного сопротивления $\underline{Z}_n = \dot{U}_2/\dot{I}_2$ получаем

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_c(\underline{Z}_n \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma l)/(\underline{Z}_c \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_n \operatorname{sh} \gamma l) = \\ &= \underline{Z}_c(\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \operatorname{th} \gamma l)/(\underline{Z}_c + \underline{Z}_n \operatorname{th} \gamma l) \end{aligned} \quad (7.92)$$

— для линии с потерями и

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \rho(\underline{Z}_n \cos \beta l + j\rho \sin \beta l)/(\rho \cos \beta l + j\underline{Z}_n \sin \beta l) = \\ &= \rho(\underline{Z}_n + j\rho \operatorname{tg} \beta l)/(\rho + j\underline{Z}_n \operatorname{tg} \beta l) \end{aligned} \quad (7.93)$$

— для линии без потерь.

Из формул (7.92) и (7.93) видно, что входное сопротивление линии зависит прежде всего от нагрузочного сопротивления. В частности, при $\underline{Z}_n = 0$ (режим короткого замыкания) и $Z_n = \infty$ (режим холостого хода) получаются следующие выражения для входных сопротивлений:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_c \operatorname{th} \gamma l = j \rho \operatorname{tg} \beta_0 l, \quad \underline{Z}_x = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \gamma l = j \rho \operatorname{ctg} \beta_0 l. \quad (7.94)$$

Последние равенства в этих формулах относятся к линиям без потерь.

Из формул (7.92) — (7.94) видно, что входное сопротивление линии зависит также от ее параметров. В частности, оно является функцией длины l отрезка линии или его волновой волны $\beta l = 2\pi l/\lambda$. При заданной длине отрезка линии его можно использовать в качестве трансформатора сопротивлений, который определенным образом трансформирует сопротивление от значения \underline{Z}_n до значения \underline{Z} . Эти трансформирующие свойства отрезка линии изменяются в широких пределах в зависимости от выбранной длины l . Например, для полуволнового и четвертьволнового отрезка линии без потерь, когда $l = \lambda/2$ ($\beta l = \pi$) и $l = \lambda/4$ ($\beta l = \pi/2$), из первой формулы (7.93) находим

$$\underline{Z}_{\lambda/2} = \underline{Z}_n, \quad \underline{Z}_{\lambda/4} = \rho^2/\underline{Z}_n. \quad (7.95)$$

Таким образом, полуволновой отрезок идеальной линии вообще не трансформирует сопротивлений. Согласно же второй формуле (7.95) четвертьволновый отрезок идеальной линии является инвертором сопротивлений и называется четвертьволновым трансформатором. Его свойства сохраняются в узком диапазоне частот, в котором соблюдаются неравенства $Z_n \cos \beta l \ll \rho \sin \beta l$ и $\rho \cos \beta l \ll Z_n \sin \beta l$.

Входное сопротивление линии может быть определено также через коэффициент отражения (7.38). По аналогии с выводом формулы (7.41) для произвольного сечения линии получаем формулы

$$\underline{Z} = R + jX = \underline{Z}_c (1 + \underline{p}) / (1 - \underline{p}) = \rho (1 + \underline{p}) / (1 - \underline{p}), \\ z = r + jx = (1 + \underline{p}) / (1 - \underline{p}). \quad (7.96)$$

Здесь последние равенства написаны для линии без потерь, причем $z = \underline{Z}/\rho$, $r = R/\rho$, $x = X/\rho$ — нормированные сопротивления.

5. Круговая диаграмма. Круговая диаграмма длинной линии, предложенная независимо друг от друга Ф. Смитом (1939) и А. Р. Вольпертом (1940), служит для графического определения входных сопротивлений линий без потерь. Для таких линий $\underline{Z}_c = \rho$ и из формулы (7.96) определяется зависимость коэффициента отражения от нормированного входного сопротивления:

$$\underline{p} = \rho e^{j\Phi} = u + jv = (z - 1)/(z + 1) = \\ = (r - 1 + jx)/(r + 1 + jx), \quad (7.97)$$

где u, v — соответственно вещественная и мнимая части коэффициента отражения.

На комплексной плоскости \underline{p} значения коэффициента отражения могут отсчитываться в декартовой системе координат (u, v) и в полярной системе координат (ρ, ψ) . Координатная сетка в полярной системе координат образуется окружностями постоянных $\rho = \text{const}$ и радиусами постоянных $\psi = \text{const}$. Такая координатная сетка показана на рис. 7.17 с учетом предельных значений коэффициента отражения (7.39).

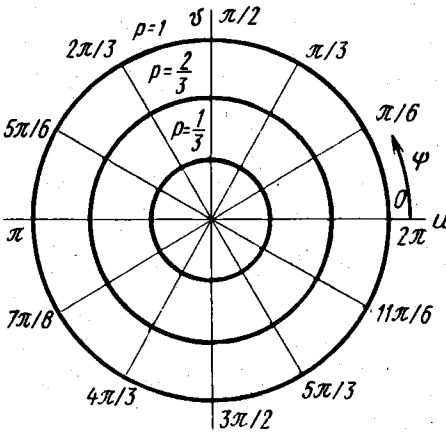
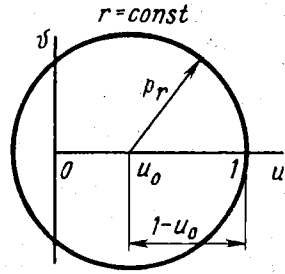
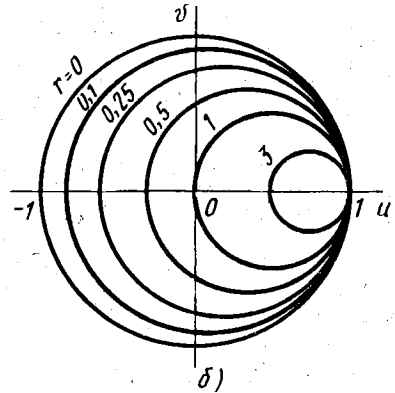


Рис. 7.17. Семейство ρ -окружностей и ψ -радиусов



a)



b)

Рис. 7.18. Построение r -окружности и семейство r -окружностей

На координатной сетке в соответствии с формулой (7.97) можно отсчитывать также значения нормированных входных сопротивлений r и x . Для удобства отсчета сделаем замену переменной \underline{p} :

$$\underline{p}_r = \underline{p} - u_0, \quad u_0 = r/(r + 1). \quad (7.98)$$

Эта замена переменной означает, что центр полярной системы координат переносится по вещественной оси u на величину u_0 , т. е. в точку $(u_0, 0)$, как показано на рис. 7.18, а. Из соотношений (7.98) и (7.97) находим новую переменную:

$$\underline{p}_r = \frac{r - 1 + jx}{r + 1 + jx} - \frac{r}{r + 1} = \frac{1}{r + 1} \frac{-(r + 1) + jx}{r + 1 + jx},$$

или, поскольку модуль последней дроби равен единице,

$$\underline{p}_r = p_r e^{j\theta_r}, \quad p_r = \frac{1}{r+1}, \quad \theta_r = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{r+1}. \quad (7.99)$$

Таким образом, при заданном значении $r = \text{const}$ и разных значениях x ($-\infty \leq x \leq \infty$) переменная (7.99) описывает окружность с радиусом p_r , как показано на рис. 7.18, а. При любом значении r эта окружность проходит через точку $(1, 0)$, поскольку $1 - u_0 = 1 - r/(r+1) = 1/(r+1) = p_r$ (рис. 7.18, а). Задаваясь различными значениями r в диапазоне $0 \leq r \leq \infty$, получаем семейство r -окружностей, показанное на рис. 7.18, б.

Для отсчета в полярной системе координат нормированных реактивных сопротивлений сделаем новую замену переменной \underline{p} :

$$\underline{p}_x = \underline{p} - (1 + jv_0), \quad v_0 = 1/x. \quad (7.100)$$

Эта замена переменной означает, что центр полярной системы координат смещен на вертикальную прямую $u_1 = 1$ и находится на этой прямой в точке $(1, jv_0)$, как показано на рис. 7.19, а. Из соотношений (7.100), (7.97) находим новую переменную:

$$\underline{p}_x = \frac{r-1+jx}{r+1+jx} - 1 - j \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \frac{-j(r+1-jx)}{r+1+jx}.$$

Поскольку модуль последней дроби равен единице, а x может быть положительной и отрицательной величиной, отсюда получаем

$$\underline{p}_x = p_x e^{j\theta_x}, \quad p_x = \left| \frac{1}{x} \right|, \quad \theta_x = \mp \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{r+1}. \quad (7.101)$$

Таким образом, при заданном значении $x = \text{const}$ и разных значениях r ($0 \leq r \leq \infty$) переменная (7.101) описывает окружность с радиусом p_x , если аргумент θ_x изменяется в пределах $0 \leq \theta_x \leq 2\pi$ (рис. 7.19, а). Практически этот аргумент изменяется в меньших пределах. При этом реальным значениям r соответствует часть указанной x -окружности, называемая x -ду-

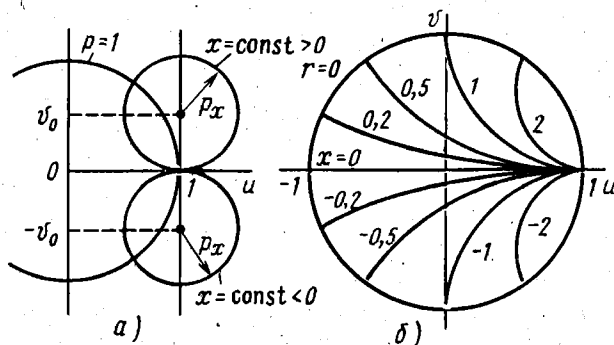


Рис. 7.19. Построение x -окружностей и семейство x -дуг

гой, которая находится внутри ρ -окружности максимального (единичного) радиуса (рис. 7.19, а). При любом значении x эта дуга проходит через точку $(1, 0)$, поскольку $\rho_x = \pm v_0$, где знак определяется знаком x (рис. 7.19, а). Задаваясь различными значениями x в диапазоне $-\infty \leq x \leq \infty$, получаем семейство x -дуг, показанное на рис. 7.19, б.

Из предыдущего рассмотрения видно, что на ρ -плоскости точка $(1, 0)$ отображает сечение линии, в котором линия является разомкнутой ($r = \infty$, $x = \pm \infty$). При этом положительная полуось u , проходящая через указанную точку, соответствует пучностям напряжения в линии, поскольку на этой полуоси $\psi = 0$, т. е. падающая и отраженная волны напряжения совпадают по фазе. Противоположная точка $(-1, 0)$, в которой пересекаются r -окружности при $r = 0$ и x -дуга (прямая) при $x = 0$, отображает сечение линии, в котором она является короткозамкнутой. При этом отрицательная полуось u , проходящая через указанную точку, соответствует узлам напряжения в линии, так как на этой полуоси $\psi = \pi$, т. е. падающая и отраженная волны напряжения находятся в противофазе.

Поскольку графики, изображенные на рис. 7.17, 7.18, б и 7.19, б, построены в одной и той же ρ -плоскости, их можно совместить. При этом получается номограмма для непосредственного пересчета параметров r , x и ρ , ψ . На такой номограмме пересчет нормированных сопротивлений r , x в различных сечениях линии получается более удобным при смене маркировки полярных координат. С учетом формулы (7.44) ρ -окружности (см. рис. 7.17) обозначим как КБВ-окружности (рис. 7.20). Одновременно изменим маркировку ψ -радиусов. Согласно формулам (7.40) и (7.32) аргумент ψ имеет значение

$$\psi = 2(\beta l_n - \beta l) = -2(\beta l - \beta l_n). \quad (7.102)$$

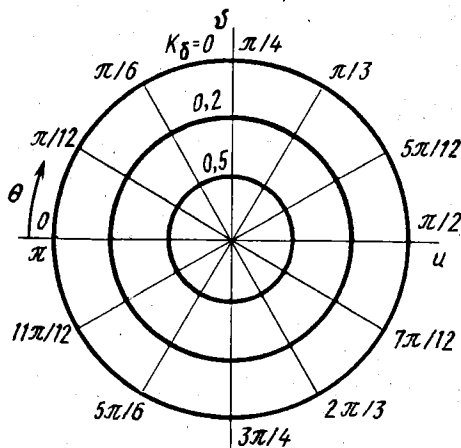


Рис. 7.20. Семейство КБВ-окружностей и θ -радиусов

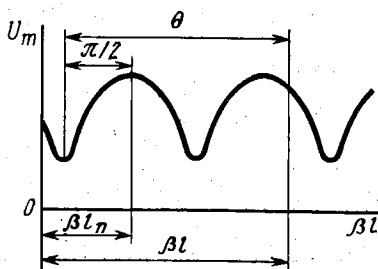


Рис. 7.21. Определение волнового расстояния до узла напряжения

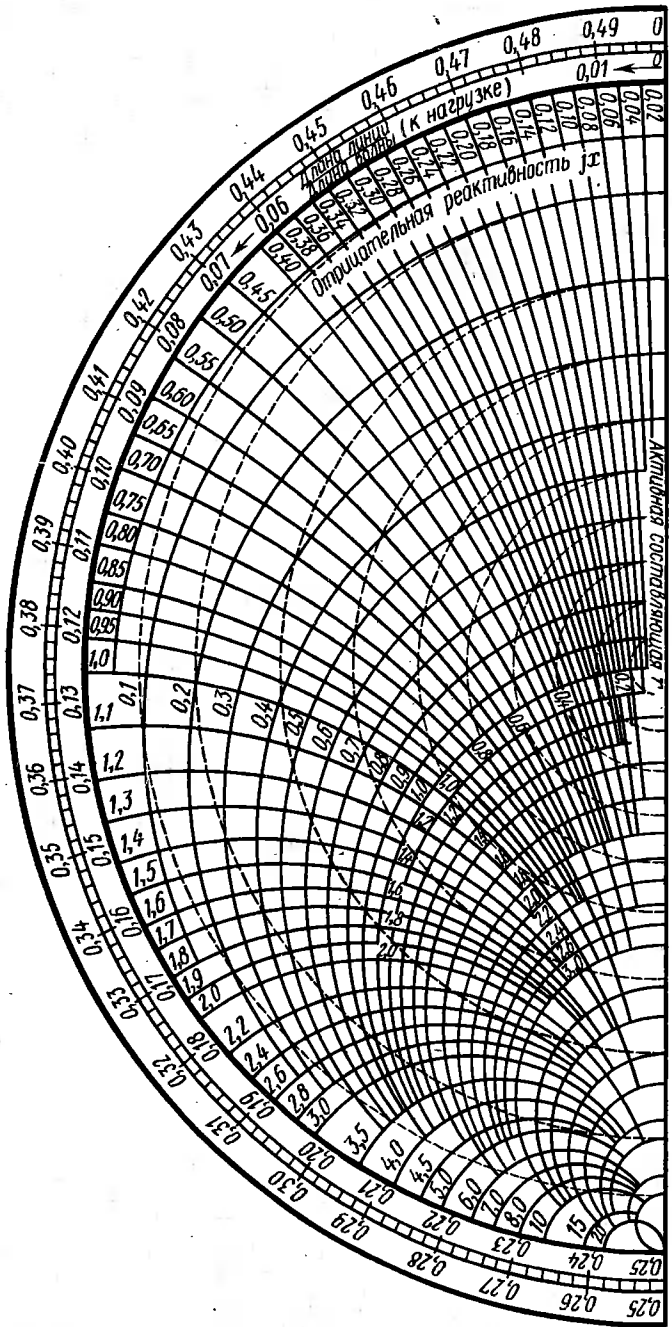
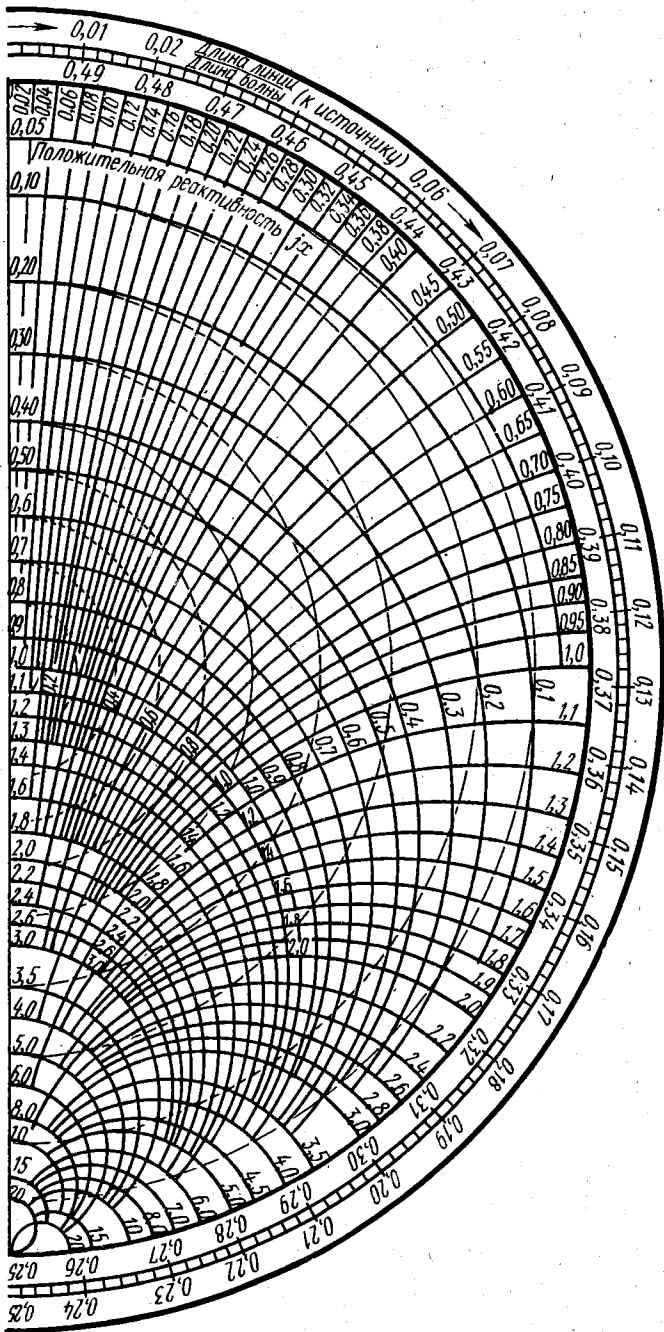


Рис. 7.22. Круговая диаграмма



длинной линии

Таким образом, определение ψ возможно путем измерения волнового расстояния от заданного сечения линии до первой пучности напряжения (рис. 7.21). Практически удобно измерять волновое расстояние до узла напряжения:

$$\theta = \beta l - \beta l_y. \quad (7.103)$$

Из рис. 7.21 и формул (7.102), (7.103) видно, что

$$\theta = \beta l - \beta l_n + \pi/2 = (\pi - \psi)/2, \quad \psi = \pi - 2\theta. \quad (7.104)$$

Следовательно, ψ -радиусы можно обозначить как θ -радиусы (см. рис. 7.20). Согласно формулам (7.104) для θ -радиусов отсчет ведется от отрицательной полуоси u по направлению вращения часовой стрелки. При этом изменению аргумента ψ на угол 2π соответствует изменение волнового расстояния βl на величину π .

Совмещение r -окружностей, x -дуг и КБВ-окружностей дает круговую диаграмму длинной линии (диаграмму А. Р. Вольперта), или диаграмму сопротивлений, показанную на рис. 7.22. На этой диаграмме положительная полуось u направлена вниз, а волновые расстояния $\beta l = 2\pi l/\lambda$ отсчитываются от верхней полуоси не в угловых, а в относительных единицах l/λ . На круговой диаграмме сопротивлений маркировка КБВ-окружностей и r -окружностей при $r < 1$ совпадает, поскольку в соответствии с формулами (7.44) и (7.93)

$$k_0 = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1-(1-r)/(r+1)}{1+(1-r)/(r+1)} = r.$$

По круговой диаграмме можно рассчитывать не только нормированные входные сопротивления, но и нормированные входные проводимости линии:

$$\underline{y} = 1/\underline{z} = g + jb, \quad (7.105)$$

где $g = G/g_c$; $b = B/g_c$ — нормированные диссипативные и реактивные проводимости; $g_c = 1/\rho$ — волновая проводимость линии.

Из формул (7.105) и (7.96) следует

$$\underline{y} = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1+pe^{j\pi}}{1-e^{j\pi}} = \frac{1+pe^{j(\psi+\pi)}}{1-pe^{j(\psi+\pi)}}. \quad (7.106)$$

Из равенств (7.106) и (7.96) вытекает, что при переходе от сопротивления к проводимости происходит изменение аргумента p на угол π при неизменном модуле p . Это означает, что при заданном на круговой диаграмме сопротивлении \underline{z} соответствующая ему проводимость $\underline{y} = 1/\underline{z}$ может быть определена перемещением из заданной точки по КБВ-окружности (p -окружности) на угол π . Тем самым осуществляется переход из заданной точки \underline{z} в диаметрально противоположную симметрично

расположенную точку y (рис. 7.23). Проходящие через эту новую точку r -окружность и x -дуга дают значения проводимостей g и b . Таким образом, r -окружности и x -дуги могут быть приняты в качестве g -окружностей и b -дуг. Такую замену обозначений можно осуществить на всей диаграмме сопротивлений. Следовательно, круговая диаграмма длиной линии может быть использована в качестве круговой диаграммы сопротивлений и проводимостей.

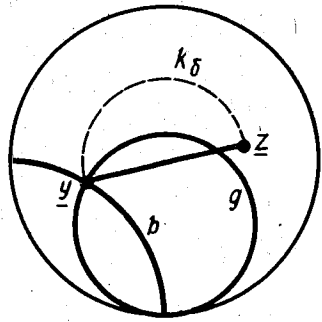


Рис. 7.23. Пересчет сопротивления в проводимость

§ 7.5. ВОЛНОВЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

На метровых и более коротких волнах элементы с сосредоточенными параметрами теряют свои свойства. Например, катушка индуктивности в этом диапазоне волн не обладает свойствами индуктивного элемента, поскольку здесь сказывается влияние междувитковой емкости. В конденсаторе же на очень высоких частотах нельзя пренебрегать влиянием индуктивности отводящих проводов. Поэтому в указанном диапазоне волн (частот) элементы с сосредоточенными параметрами заменяются элементами с распределенными параметрами. Роль таких элементов играют отрезки длинной линии. Встречаются и другие специфические применения отрезков длинной линии, которые рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Реактивные двухполюсники. Волновым двухполюсником является любой отрезок длинной линии с произвольным нагрузочным сопротивлением Z_n (рис. 7.24, а). Зажимами такого двухполюсника являются входные зажимы отрезка линии, а входное сопротивление Z этого отрезка является сопротивлением волнового двухполюсника.

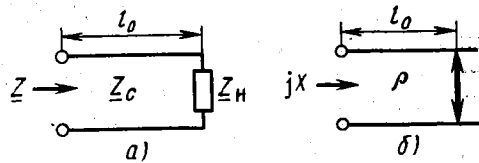


Рис. 7.24. Волновые двухполюсники

При достаточно малой длине l_0 отрезка линии потерями в нем можно пренебречь. Поэтому в качестве реактивных волновых двухполюсников можно использовать отрезки линии в режиме стоячих волн, в частности короткозамкнутые и разомкнутые отрезки идеальной линии. Согласно формулам (7.94) входное

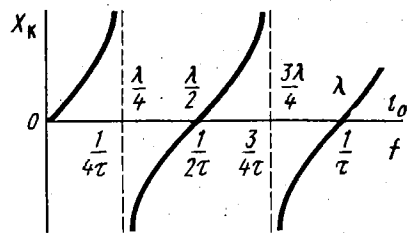


Рис. 7.25. График зависимости сопротивления реактивного волнового двухполюсника от длины отрезка линии и частоты

сопротивление указанных отрезков является чисто реактивным.

В качестве реактивного волнового двухполюсника удобно применять отрезок линии с подвижной короткозамыкающей перемычкой, как условно показано на рис. 7.24, б. При перемещении перемычки изменяется длина отрезка линии l_0 . При этом изменяется сопротивление волнового двухполюсника в соответствии с первой формулой (7.94), которую перепишем в виде

$$Z_k = jX_k = j \rho \operatorname{tg} 2\pi l_0 / \lambda = j \rho \operatorname{tg} \tau \omega, \quad (7.107)$$

где $\tau = l_0 / v_0$ — время распространения бегущей волны вдоль отрезка линии.

Зависимость $X_k(l_0)$ при $\lambda = \lambda_0 = \operatorname{const}$ ($\omega = \omega_0 = \operatorname{const}$) показана на рис. 7.25. Согласно последней формуле (7.107) пространственную характеристику на рис. 7.25 можно рассматривать также в качестве частотной характеристики $X_k(\omega)$ при $l_0 = \operatorname{const}$ ($\tau = \operatorname{const}$).

Из соотношений (7.107) и рис. 7.25 видно, что короткозамкнутый отрезок линии может иметь как индуктивное, так и емкостное сопротивление. В частности, при $l_0 < \lambda_0 / 4$ рассматриваемый двухполюсник имеет индуктивное сопротивление. Поэтому на некоторой частоте $\omega_0 < 1/4\tau$ его можно использовать в качестве индуктивного элемента, как показано на рис. 7.26, а, б, где

$$l_0 = \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 L_{\text{ЭК}}}{\rho}, \quad L_{\text{ЭК}} = \frac{\rho}{\omega_0} \operatorname{tg} \frac{l_0 \omega_0}{v_0}. \quad (7.108)$$

Эквивалентность элементов с параметрами (7.108) сохраняется в малом диапазоне частот $\omega_0 \pm \Delta\omega$ при $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Из соотношений (7.107) и рис. 7.25 видно также, что при $\lambda_0 / 4 < l_0 < \lambda_0 / 2$ короткозамкнутый отрезок имеет емкостное сопротивление. Поэтому в малом диапазоне частот $\omega_0 \pm \Delta\omega$, где $1/4\tau < \omega_0 < 1/2\tau$ и $\Delta\omega \ll \omega_0$, такой волновой двухполюсник может использоваться в качестве емкостного элемента с емкостью $C_{\text{ЭК}}$, если

$$l_0 = (v_0 / \omega_0) \operatorname{arctg} (1 / \omega_0 \rho C_{\text{ЭК}}), \\ C_{\text{ЭК}} = (1 / \omega_0 \rho) \operatorname{tg} (l_0 \omega_0 / v_0). \quad (7.109)$$

Эквивалентные элементы с параметрами (7.109) показаны на рис. 7.26, в, г.

Реактивные волновые двухполюсники в виде короткозамкнутого отрезка линии называют реактивными шлейфами.

2. Резонансные двухполюсники. Из формул (7.107) видно, что при $l_0 = k\lambda_0 / 4$ ($k = 1, 2, \dots$) корот-

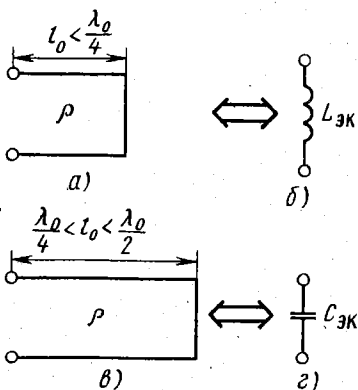


Рис. 7.26. Эквивалентные реактивные элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами

козамкнутый отрезок линии имеет либо бесконечно большое сопротивление, либо сопротивление, равное нулю. Реальный волновой элемент не может иметь таких сопротивлений. Это свидетельствует о недопустимости пренебрежения потерями в области частот $\omega_0 = k/4\tau$. Для определения сопротивления волнового двухполюсника в виде отрезка короткозамкнутой линии с потерями воспользуемся первым равенством (7.94), в котором значение $\underline{Z}_c = \rho$ является допустимым:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \rho \operatorname{th} \gamma l_0 = \rho \operatorname{th}(\alpha_0 + j\beta_0)l_0 = \\ &= \rho(\operatorname{th} \alpha_0 l_0 + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0)(1 + j \operatorname{th} \alpha_0 l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0), \end{aligned} \quad (7.110)$$

где α_0, β_0 определяются формулами (7.65).

Поскольку $\alpha_0 l_0 \ll 1$, можно принять $\operatorname{th} \alpha_0 l_0 \approx \alpha_0 l_0$, и формула (7.110) упрощается:

$$\underline{Z} = \rho(\alpha_0 l_0 + j \operatorname{tg} \beta_0 l_0)/(1 + j \alpha_0 l_0 \operatorname{tg} \beta_0 l_0). \quad (7.111)$$

Рассмотрим это сопротивление для четвертьволнового отрезка линии. Тогда $l_0 = \lambda_0/4$, $\omega_0 = 1/4\tau$, $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_0 l_0 &= \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0} = \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right), \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{tg} \beta_0 l_0 = -1/\operatorname{tg} \frac{\pi \Delta\omega}{2\omega_0} \approx -\frac{4}{\pi v}. \quad (7.112)$$

Последнее приближенное равенство написано для случая малых расстроек, когда $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ и $v \approx 2\lambda\omega/\omega_0$.

Кроме того, при $l_0 = \lambda_0/4$ согласно формуле (7.90)

$$\alpha_0 l_0 = \pi/4Q. \quad (7.113)$$

С учетом равенств (7.112), (7.113) сопротивление (7.111) имеет значение

$$\underline{Z} = \rho \frac{\pi/4Q - j \cdot 4/\pi v}{1 - j/Qv} \approx -j \cdot 4\rho/\pi v(1 - j/Qv),$$

или

$$\underline{Z} = \frac{R_{\text{эк}}}{1 + jQv}, \quad R_{\text{эк}} = Q\rho_{\text{эк}}, \quad \rho_{\text{эк}} = \frac{4}{\pi} \rho. \quad (7.114)$$

Таким образом, четвертьволновому отрезку короткозамкнутой линии эквивалентен параллельный резонансный контур с добротностью Q , резонансным сопротивлением $R_{\text{эк}}$, характеристическим сопротивлением $\rho_{\text{эк}} = \sqrt{L_{\text{эк}}/C_{\text{эк}}}$ и резонансной частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{L_{\text{эк}}C_{\text{эк}}}$. Отсюда с учетом последнего равенства (7.114) определяются параметры эквивалентного контура

$$L_{\text{эк}} = \frac{4\rho}{\pi\omega_0}, \quad C_{\text{эк}} = \frac{\pi}{4\omega_0\rho}. \quad (7.115)$$

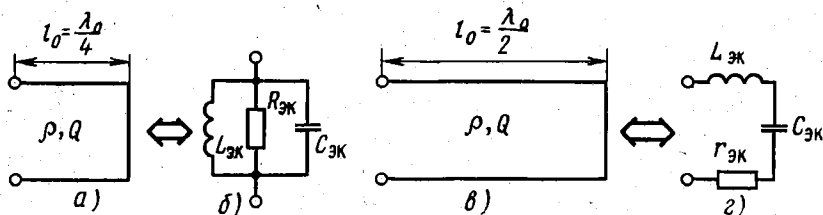


Рис. 7.27. Эквивалентные резонансные элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами

Эквивалентные резонансные двухполюсники с параметрами (7.114), (7.115) показаны на рис. 7.27, а, б.

Аналогичное рассмотрение полуволнового отрезка линии ($l_0 = \lambda_0/2$) показывает, что его сопротивление (7.111) в области малых расстройк имеет значение

$$\underline{Z} = \rho \frac{(\pi/2Q + j\pi\nu/2)}{(1 + j\pi^2\nu/4Q)} \approx \rho \left(\frac{\pi}{2Q} + j \frac{\pi}{2} \nu \right),$$

или

$$\underline{Z} = r_{\text{эк}} (1 + jQ\nu), \quad r_{\text{эк}} = \rho_{\text{эк}}/Q, \quad \rho_{\text{эк}} = \pi\rho/2. \quad (7.116)$$

Отсюда следует, что *полуволновому отрезку короткозамкнутой линии эквивалентен последовательный резонансный контур с добротностью Q , резонансным сопротивлением (сопротивлением потерь) $r_{\text{эк}}$, характеристическим сопротивлением $\rho_{\text{эк}} = \sqrt{L_{\text{эк}}/C_{\text{эк}}}$ и резонансной частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{L_{\text{эк}}C_{\text{эк}}}$* . Отсюда с учетом последнего равенства (7.116) определяются параметры эквивалентного последовательного контура:

$$L_{\text{эк}} = \frac{\pi\rho}{2\omega_0}, \quad C_{\text{эк}} = \frac{2}{\pi\omega_0\rho}. \quad (7.117)$$

Эквивалентные резонансные двухполюсники с параметрами (7.116), (7.117) показаны на рис. 7.27, в, г.

Таким образом, при соответствующих условиях отрезки длинной линии обладают резонансными свойствами. Такие волновые резонансные двухполюсники и подобные им системы (отрезки волноводов и др.) называют резонаторами (волновыми резонаторами).

Сопротивления волновых резонаторов изменяются в области резонансов в соответствии с рис. 4.4 и 4.13. Аналогично изменяются сопротивления волновых двухполюсников при малых расстройках в области значений $l_0 = k\lambda_0/4$ при $k > 2$. Поэтому для отрезков линий с потерями (диссипативных волновых двухполюсников) характеристика, представленная на рис. 7.25, должна быть скорректирована с учетом частотных характеристик резонансных контуров (см. рис. 4.4, 4.13). Скорректированная характеристика сопротивления показана на рис. 7.28, где изобра-

жена также характеристика $R(f)$ с учетом формул (7.114) и (7.116). Из рис. 7.28 видно, что короткозамкнутый отрезок линии является многорезонансной системой. Этот вывод можно сделать и в отношении разомкнутого отрезка линии. Рассмотренное свойство отрезков длинной линии согласуется с их свойствами в переходном режиме, когда они проявляют себя в качестве многоволновых систем.

3. Применения резонансных двухполюсников. На метровых и более коротких волнах резонансные контуры имеют низкую добротность. Поэтому для селекции сигналов в этом диапазоне волн используют резонансные волновые двухполюсники, добротность которых доходит до тысяч и десятков тысяч единиц.

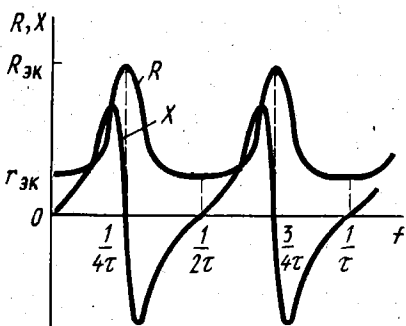


Рис. 7.28. Частотные характеристики диссипативного и реактивного сопротивления волнового двухполюсника с потерями

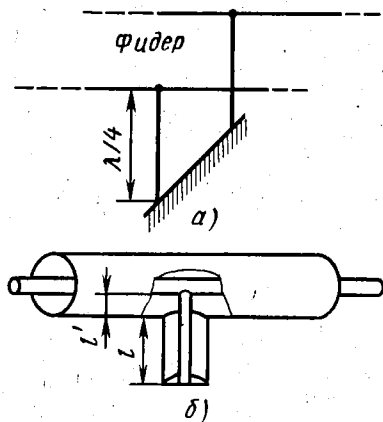


Рис. 7.29. Металлические изоляторы

Наряду с этим резонансные свойства волновых двухполюсников находят и другие применения. Например, четвертьволновый отрезок линии, обладая высокой добротностью, имеет резонансное сопротивление (7.114) порядка сотен килоом и мегаом. При столь большом сопротивлении он используется в качестве *металлических изоляторов*. Такие четвертьволновые изоляторы применяют для крепления проводов двухпроводного фидера (рис. 7.29, а) и внутреннего провода коаксиального фидера. В коаксиальном фидере металлический изолятор выполняется в виде стакана, представляющего собой короткозамкнутый отрезок коаксиальной линии (рис. 7.29, б). Однако длину стакана делают несколько больше четверти длины волны ($l > \lambda/4$). При этом получается емкостная входная проводимость изолятора, которая компенсирует индуктивную проводимость выступающей части опорного стержня длиной l' .

Другое применение находит четвертьволновый короткозамкнутый шлейф в *линейном вольтметре*, используемом для изме-

рения напряжений в длинной линии. В этом шлейфе в качестве короткозамыкающей перемычки можно использовать измерительный прибор (амперметр) с сопротивлением $Z_H = 0$. Такое устройство называется *измерительным шлейфом*. Подключение измерительного шлейфа к фидеру (рис. 7.30, а) практически не нарушает волнового режима в фидере, поскольку этот шлейф имеет очень высокое входное сопротивление. Перемещая измерительный шлейф, можно измерять напряжение U в различных сечениях фидера, т. е. применять его в качестве линейного вольтметра.

Возможность подобного измерения основана на пропорциональности тока I_2 измерительного прибора и напряжения \dot{U} на входе измерительного шлейфа. Действительно, из первого равенства (7.82) при $\dot{U}_2 = 0$ и $\beta l = \pi/2$ получаем

$$\dot{U} = j\rho I_2, \quad U = \rho I_2. \quad (7.118)$$

Следовательно, амперметр, используемый в качестве измерительного прибора в линейном вольтметре, может быть проградуирован в единицах напряжения.

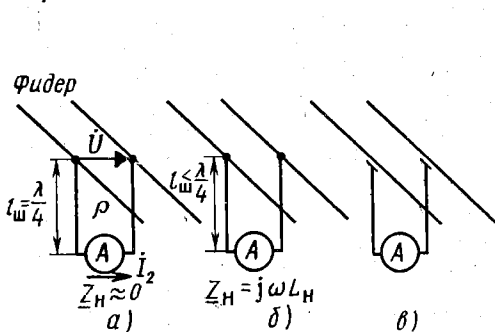


Рис. 7.30. Измерительные шлейфы

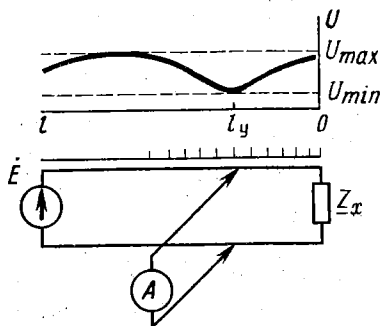


Рис. 7.31. Измерительная линия

Практически сопротивление амперметра бывает отличным от нуля и может быть принято чисто индуктивным: $Z_H = j\omega L_n$. При этом длина измерительного шлейфа должна быть изменена. Согласно рис. 7.26, а, б индуктивность L_n может быть получена с помощью короткозамкнутого отрезка линии длиной $l_0 < \lambda/4$. Если амперметр заменить указанным отрезком, то должно выполняться условие $l_0 + l_{sh} = \lambda/4$, т. е. $l_{sh} < \lambda/4$. Таким образом, с учетом индуктивного сопротивления амперметра измерительный шлейф должен быть укорочен, как показано на рис. 7.30, б. При этом формула, используемая при градуировке амперметра, несколько усложняется по сравнению с формулой (7.118). Аналогичный результат получается и при учете комплексного сопротивления амперметра $Z_H = R_n + j\omega L_n$.

Измерительный шлейф не нарушает волнового режима фидера только в идеальном случае и при тщательной настройке.

Реальный измерительный шлейф влияет на волновой режим. Для ослабления этого влияния между измерительным шлейфом и фидером делают зазоры, как показано на рис. 7.30, в. При этом связь измерительного шлейфа с фидером осуществляется через емкость зазоров.

4. Измерительная линия. Измерительная линия используется на очень высоких и ультравысоких частотах для измерения неизвестных комплексных сопротивлений \underline{Z}_x . Она представляет собой отрезок линии с пренебрежимо малыми потерями, снабженный передвижным измерительным шлейфом и шкалой, по которой определяется расстояние от нагрузки до измерительного шлейфа (рис. 7.31).

Неизвестное сопротивление подключается к измерительной линии в качестве ее нагрузочного сопротивления. Известными параметрами измерительной линии являются волновое сопротивление ρ и длина волны λ .

Линейным вольтметром измеряют напряжения U_{\max} , U_{\min} в пучности и узле смешанной волны. Одновременно измеряют расстояние l_y от нагрузки до узла напряжения. По этим данным определяют КБВ (7.36) и расстояние до пучности $l_n = l_y + \lambda/4$ (или $l_n = l_y - \lambda/4$). Затем по формуле (7.44) вычисляют $\rho = \rho_2$, а по формуле (7.32) — величину ψ_2 . Таким образом, найденное значение $\rho_2 = \rho_2 e^{j\psi_2}$ позволяет определить неизвестное сопротивление $\underline{Z}_x = \underline{Z}_n$ по формуле (7.41) (при $\underline{Z}_c = \rho$).

Расчет сопротивления \underline{Z}_x по измеренным значениям k_δ и l_y значительно упрощается при его определении с помощью круговой диаграммы. Такое определение показано на рис. 7.32, где искомое сопротивление $\underline{z}_x = r_x + jx_x$ находят по точке пересечения k_δ -окружности и θ -радиуса, соответствующего отметке l_y/λ .

5. Согласующие четырехполюсники. При заданном нагрузочном сопротивлении \underline{Z}_n и волновом сопротивлении \underline{Z}_c условие согласования (7.43) обычно не выполняется. В этом случае для

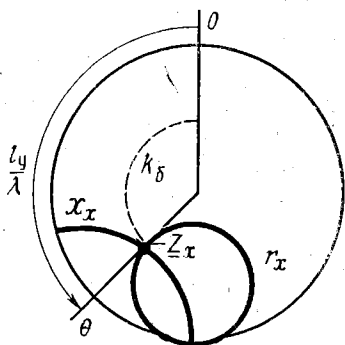


Рис. 7.32. Определение неизвестного сопротивления по круговой диаграмме

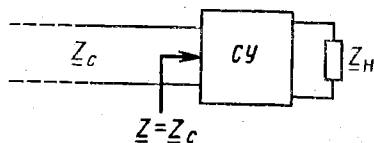


Рис. 7.33. Согласование фидера с нагрузкой

получения в фидере режима бегущих волн нагрузку подключают к нему через согласующее устройство СУ (рис. 7.33). При этом условию согласования (7.43) должно удовлетворять входное сопротивление \underline{Z} согласующего устройства:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_c. \quad (7.119)$$

Если потерями в фидере можно пренебречь или фидер сбалансирован, то его волновое сопротивление ρ является вещественным. При этом условии согласования (7.119) видоизменяется:

$$\underline{Z} = R = \rho. \quad (7.120)$$

В качестве согласующих устройств используют обычно волновые четырехполюсники. Простейшим волновым четырехполюсником является четвертьволновый трансформатор сопротивлений в виде отрезка линии длиной $l_t = \lambda/4$. Его можно включать непосредственно между фидером и нагрузкой (рис. 7.34, а), если

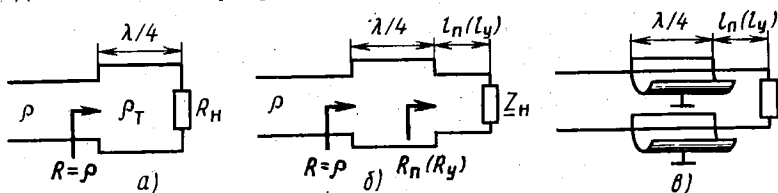


Рис. 7.34. Согласующие устройства с четвертьволновым трансформатором

она имеет диссипативное сопротивление $\underline{Z}_n = R_n$. При этом входное сопротивление (7.95) трансформатора является вещественным:

$$\underline{Z}_{\lambda/4} = R = \rho^2 / R_n. \quad (7.121)$$

Приравнявая сопротивления (7.120) и (7.121), находим волновое сопротивление трансформатора, обеспечивающего согласование:

$$\rho_t = \sqrt{\rho R_n}. \quad (7.122)$$

Комплексное нагрузочное сопротивление \underline{Z}_n также может быть согласовано с фидером с помощью четвертьволнового трансформатора. Для этого фидер надо разрезать в сечении пучности или узла, ближайшего к нагрузке, и поставить трансформатор в этом разрезе (рис. 7.34, б). В сечении пучности (узла) входное сопротивление является вещественным и равным R_n (R_y). Поэтому четвертьволновый трансформатор осуществляет согласование с фидером указанного сопротивления, так что в расчетную формулу (7.122) вместо сопротивления R_n следует подставить сопротивление R_n (R_y).

Такое согласующее устройство образовано четвертьволновым трансформатором и отрезком линии l_n (l_y). При его расчете опре-

делению подлежат длина отрезка l_n (l_y) и сопротивление R_n (R_y), которое необходимо знать для расчета трансформатора. Обе эти величины легко определяются по круговой диаграмме, как показано на рис. 7.35.

В рассмотренном согласующем устройстве для размещения четвертьволнового трансформатора надо разрезать фидер, что конструктивно неудобно. К тому же параметры согласующего устройства в такой конструкции получаются жестко фиксированными и не поддаются регулировке. От этих недостатков свободна конструкция, показанная на рис. 7.34, в. В ней трансформатор образован самими проводами линии на участке $\lambda/4$, где с некоторым зазором расположены экраны в виде желобов. Экраны изменяют погонную емкость C_0 , что позволяет регулировать волновое сопротивление ρ четвертьволнового трансформатора путем изменения зазора. Перемещением же экранов вдоль проводов можно регулировать длину отрезка l_n (l_y).

Для согласования с фидером комплексных нагрузочных сопротивлений широко используют согласующее устройство с реактивным шлейфом, предложенное В. В. Татариновым в 1940 г.

Конструктивная схема такого одношлейфового согласующего устройства показана на рис. 7.36, где $g_c = 1/\rho$ — волновая проводимость фидера и реактивного шлейфа с регулируемой длиной l_w ; l_0 — регулируемое расстояние от нагрузки до сечения 1—1', в котором подключен реактивный шлейф. Отрезок линии длиной l_0 является в этой конструкции трансформатором, преобразующим проводимость нагрузки $Y_n = G_n + jB_n$ в некоторую комплексную проводимость $Y_{11} = G_{11} + jB_{11}$.

Согласующее устройство в этом случае образовано трансформатором сопротивлений (проводимостей) и реактивным шлейфом. Его входная проводимость складывается из проводимости трансформатора и шлейфа:

$$Y = Y_{11} + jB_w = G_{11} + j(B_{11} + B_w).$$

В соответствии с условием согласования (7.120) эта проводимость должна равняться волновой проводимости:

$$Y = G + jB = G_{11} + j(B_{11} + B_w) = g_c.$$

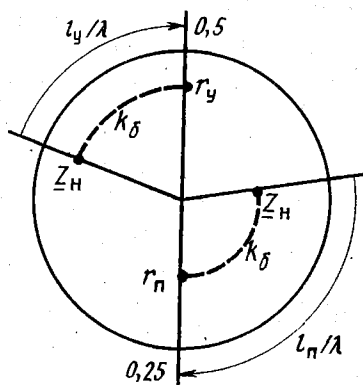


Рис. 7.35. Расчет согласующего устройства с четвертьволновым трансформатором

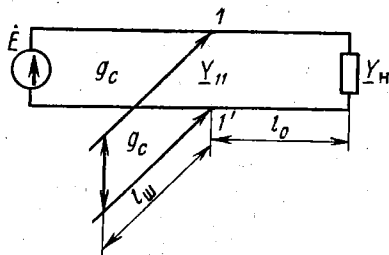


Рис. 7.36. Согласующее устройство с реактивным шлейфом

Отсюда находим необходимые параметры согласующего устройства:

$$G = G_{11} = g_c, \quad B = B_{11} + B_{ш} = 0. \quad (7.123)$$

Первое равенство (7.123) означает, что вещественная составляющая проводимости трансформатора должна равняться волновой проводимости, т. е. $g = g_{11} = G_{11}/g_c = 1$. Это условие выполняется установкой соответствующей длины l_0 . Такая установка всегда возможна, как видно из круговой диаграммы рис. 7.37, где показаны две точки y и y' , удовлетворяющие указанному условию. При заданной проводимости нагрузки $y_n = Y_n/g_c$ из приведенного на круговой диаграмме построения определяют и необходимую длину трансформатора l_0 .

Второе равенство (7.123) означает, что реактивная составляющая проводимости трансформатора B_{11} , получающаяся при выбранной длине l_0 , должна быть скомпенсирована реактивной проводимостью шлейфа. Величину B_{11} определяют на круговой

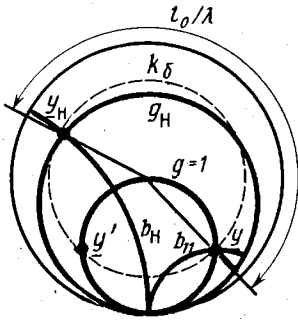


Рис. 7.37. Расчет одношлейфового согласующего устройства

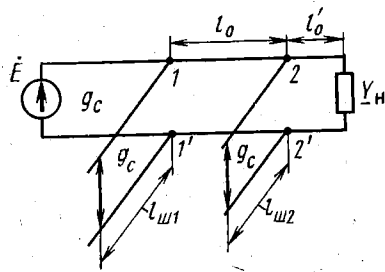


Рис. 7.38. Двухшлейфовое согласующее устройство

диаграмме по точке пересечения с единичной g -окружностью КБВ-окружности, проходящей через заданную точку y_n (рис. 7.37). Отсюда определяют необходимую проводимость шлейфа $B_{ш} = -B_{11}$, а по найденной проводимости $B_{ш}$ — длину шлейфа $l_{ш}$. Такое определение производят с помощью первой формулы (7.94) либо по круговой диаграмме.

Регулировка одношлейфового согласующего устройства сопряжена с перемещением шлейфа. От этого недостатка свободно двухшлейфовое согласующее устройство (рис. 7.38). В нем согласование осуществляется подбором размеров $l_{ш1}$ и $l_{ш2}$ двух реактивных шлейфов. При этом фиксированное расстояние l_0 между шлейфами выбирают обычно равным $3\lambda/8$, а расстоянием l'_0 задаются из конструктивных соображений.

Проводимость Y_{11} в сечении 1—1' складывается из реактивной входной проводимости $\underline{Y}_{ш1} = jB_{ш1}$ первого шлейфа и комп-

лексной входной проводимости $\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1$ отрезка линии длиной l_0 :

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_{ш1} = G_1 + j(B_1 + B_{ш1}).$$

Отсюда по условию согласования (7.120) находим

$$G_1 = g_c, B_1 + B_{ш1} = 0, \rightarrow B_{ш1} = -B_1. \quad (7.124)$$

Выполнение первого равенства (7.124) достигается подбором проводимости \underline{Y}_{22} в сечении 2—2', которая является нагрузкой отрезка линии длиной l_0 . При этом реактивная проводимость B_1 в сечении 1—1' компенсируется реактивной проводимостью $B_{ш1}$ первого шлейфа в соответствии со вторым равенством (7.124). Такая компенсация достигается подбором длины $l_{ш1}$ указанного шлейфа.

Проводимость $\underline{Y}_{22} = G_{22} + jB_{22}$ складывается из фиксированной входной проводимости $\underline{Y}_2 = G_2 + jB_2$ отрезка линии длиной l_0 и регулируемой входной проводимости $\underline{Y}_{ш2} = jB_{ш2}$ второго шлейфа. При этом диссипативная проводимость $G_{22} = G_2$ получается фиксированной, а реактивная проводимость $B_{22} = B_2 + B_{ш2}$ изменяется до нужного значения, обеспечивающего соблюдение первого равенства (7.124). Это достигается подбором длины $l_{ш2}$ второго шлейфа.

Поскольку при соблюдении первого равенства нормированная проводимость $g_1 = G_1/g_c = 1$, необходимая нормированная проводимость $b_{22} = B_{22}/g_c$ может быть найдена по круговой диаграмме поворотом единичной g -окружности на $l_0/\lambda = 3/8$ (рис. 7.39). При этом определяют два возможных значения b'_{22} и b''_{22} искомой величины по точкам пересечения окружности $g_{22} = G_{22}/g_c$ с повернутой окружностью $g = 1$. По найденному значению B_{22} определяют и проводимость шлейфа $B_{ш2}$, где B_2 — известная величина. Зная проводимость шлейфа $B_{ш2}$, можно известным образом определить и его длину $l_{ш2}$.

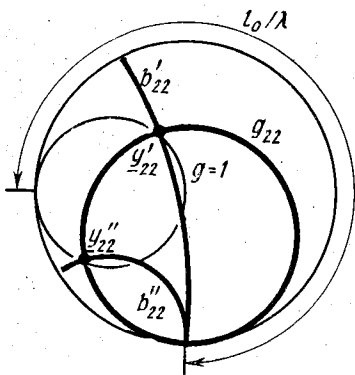


Рис. 7.39. Расчет двухшлейфового согласующего устройства

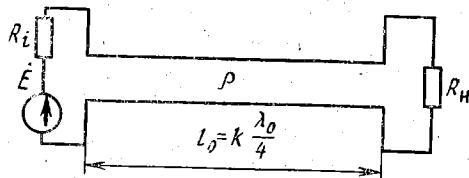


Рис. 7.40. Резонансный волновой четырех-полюсник

6. Резонансные четырехполюсники. Отрезки длиной линии, используемые в качестве четырехполюсников, при их длине $l_0 = k\lambda_0/4$ обладают резонансными свойствами, как и резонансные волновые двухполюсники. Чтобы в волновых четырехполюсниках могли проявиться резонансные явления, в них должен установиться волновой режим, близкий к режиму стоячих волн. Это означает, что нагрузочное сопротивление в таких четырехполюсниках (рис. 7.40) должно удовлетворять одному из условий

$$R_n \gg \rho, R_n \ll \rho. \quad (7.125)$$

Подобно тому как в последовательном и параллельном контурах предъявляются определенные требования к внутреннему сопротивлению источника, в резонансном волновом четырехполюснике к источнику также предъявляется одно из следующих требований:

$$R_i \gg \rho, R_i \ll \rho. \quad (7.126)$$

Условия (7.125) и (7.126) должны сочетаться друг с другом различным образом в зависимости от длины отрезка линии. Если $l_0 = k\lambda_0/2$, то на концах резонансного отрезка линии должны быть одновременно либо пучности, либо узлы напряжения. Следовательно, в этом случае должны соблюдаться одноименные условия (7.125), (7.126), т. е. либо первые, либо вторые из этих неравенств.

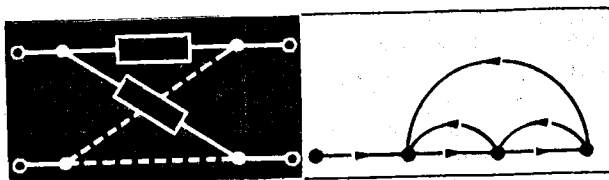
Если же $l_0 = (2k + 1)\lambda_0/4$, то на одном из концов резонансного отрезка линии должна быть пучность, а на другом — узел напряжения. При этом одновременно должны выполняться разноименные условия (7.125), (7.126), т. е. либо первое неравенство (7.125) и второе неравенство (7.126), либо второе неравенство (7.125) и первое неравенство (7.126). Если при $l_0 = (2k + 1)\lambda_0/4$ одновременно выполняются одноименные условия (7.125), (7.126), то отрезок линии получается не резонансным, а максимально расстроенным волновым четырехполюсником.

При рассмотренных сочетаниях граничных условий (7.125) и (7.126) необходимые пучности или узлы напряжений на концах резонансного отрезка линии формируются в переходном режиме. Образование этих узлов и пучностей обеспечивается соответствующими значениями коэффициентов отражения (7.47), (7.49). При рассмотрении в переходном режиме суперпозиции многократно отраженных гармонических волн необходимо также учитывать их фазовые сдвиги на отрезках линии длиной $l_0 = k\lambda_0/4$.

Вопросы для самоконтроля

- 7.1. Изменяются ли вдоль однородной линии ее вторичные параметры?
- 7.2. Почему коэффициент затухания в волновом уравнении измеряется в Нп/м?
- 7.3. Почему фазовый коэффициент в волновом уравнении измеряется в рад/м?
- 7.4. Как рассчитать коэффициент затухания α (Нп/м) по измеренным значениям $U_{пад1}$, $U_{пад2}$ в начале и в конце линии длиной l_0 ?

- 7.5. Как рассчитать коэффициент затухания α (дБ/м) по измеренным значениям $U_{пад1}$, $U_{пад2}$ в начале и в конце линии длиной l_0 ?
- 7.6. Какой вид имеют уравнения для падающей и отраженной волн тока в линии с потерями при заданных напряжениях (7.23) и (7.24)?
- 7.7. Почему фаза стоячей волны не перемещается вдоль линии?
- 7.8. Чем отличаются стоячие волны в короткозамкнутой, разомкнутой и нагруженной на реактивное сопротивление линиях?
- 7.9. В каких сечениях линии происходят скачки фазы стоячих волн напряжения и тока?
- 7.10. Почему на векторной диаграмме стоячих волн (см. рис. 7.6) вектор $U_{т\text{ отр}}$ поворачивается в направлении вращения часовой стрелки, а вектор $U_{т\text{ пад}}$ — в противоположном направлении?
- 7.11. Почему на векторной диаграмме смешанных волн (см. рис. 7.8) при перемещении по линии слева направо вектор падающей волны поворачивается против направления вращения часовой стрелки?
- 7.12. Почему фаза смешанной волны имеет значения, промежуточные между фазами бегущей и стоячей волн?
- 7.13. Почему в пучностях смешанной волны амплитуды бегущей и стоячей волн складываются арифметически?
- 7.14. Как изменяется в линии с потерями амплитуда смешанной волны тока?
- 7.15. Почему в последнем равенстве (7.38) стоит отрицательный знак?
- 7.16. Почему коэффициент отражения ρ изменяется вдоль линии?
- 7.17. Совпадают ли пучности напряжения с узлами тока в линиях с потерями?
- 7.18. Почему в режиме бегущих волн коэффициенты передачи по напряжению и по току получаются одинаковыми?
- 7.19. Почему коэффициенты отражения (7.47), (7.42) от конца линии и в сечении нагрузки имеют разный физический смысл?
- 7.20. Какими двумя способами можно доказать равенство коэффициентов отражения (7.46) и (7.42)?
- 7.21. Почему коэффициенты отражения от входа линии и на входе линии количественно не совпадают друг с другом?
- 7.22. Как должна изменяться амплитуда колебаний в каком-либо сечении линии при включении на ее входе источника гармонической э. д. с.?
- 7.23. Почему полуволновый отрезок линии без потерь не трансформирует сопротивлений?
- 7.24. Какие линии на круговой диаграмме проводимостей соответствуют пучностям и узлам напряжений?
- 7.25. Какие эквивалентные схемы с сосредоточенными параметрами имеют отрезки разомкнутой линии при $l_0 < \lambda/4$, $l_0 = \lambda/4$, $\lambda/4 < l_0 < \lambda/2$ и $l_0 = \lambda/2$?



Четырехполюсники

В устройствах связи многие цепи используются в качестве четырехполюсников. Некоторые их общие свойства можно изучать безотносительно к схемам конкретных цепей. Существуют специфические методы анализа общих свойств и общие методы расчета четырехполюсников с произвольной схемой. Такие методы рассматриваются в настоящей главе.

§ 8.1. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

В общей теории четырехполюсников рассматриваются пассивные и активные четырехполюсники. В этом параграфе изучаются свойства только линейных пассивных четырехполюсников. Активным четырехполюсникам посвящен § 8.5.

1. Основные уравнения. Основываясь на принципе суперпозиции и спектральном методе анализа, рассмотрим линейные пассивные четырехполюсники при гармонических напряжениях и токах. В соответствии с обозначениями на рис. 2.1, б примем положительные направления отсчета входных и выходных напряжений и токов, показанных на рис. 8.1, а при передаче сигнала слева направо.

Эти напряжения и токи связаны друг с другом. Для установления вида связи заменим напряжения \dot{U}_1, \dot{U}_2 некоторыми э. д. с. \dot{E}_1, \dot{E}_2 в соответствии с рис. 2.10, а. Тогда получим схему, показанную на рис. 8.1, б, где $\dot{E}_1 = \dot{U}_1, \dot{E}_2 = \dot{U}_2$. Токи I_1 и I_2 можно считать контурными токами входного и выходного контуров четырехполюсников. При этом согласно принципу суперпозиции и формулам (3.192), (3.193) получаем

$$I_1 = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{(11)} - \dot{E}_2 / \underline{Z}_{(21)}, \quad I_2 = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{(12)} - \dot{E}_2 / \underline{Z}_{(22)},$$

где $\underline{Z}_{(21)}$, $\underline{Z}_{(12)}$ — сопротивления передачи из выходного во входной контур и из входного в выходной контур; $\underline{Z}_{(11)}$, $\underline{Z}_{(22)}$ — входные сопротивления четырехполюсника слева при замыкании э. д. с. \dot{E}_2 и справа при замыкании э. д. с. \dot{E}_1 ; отрицательные знаки в последних слагаемых поставлены вследствие противоположного направления \dot{E}_2 и \dot{I}_2 .

Переходя в полученных равенствах к исходным напряжениям, перепишем их в виде

$$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2, \quad \dot{I}_2 = y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2, \quad (8.1)$$

где

$$y_{11} = 1/\underline{Z}_{(11)}, \quad y_{12} = -1/\underline{Z}_{(21)}, \quad y_{21} = 1/\underline{Z}_{(12)}, \quad y_{22} = -1/\underline{Z}_{(22)}. \quad (8.2)$$

Соотношения (8.1) называются основными уравнениями четырехполюсника, поскольку они исчерпывающе и однозначно описывают все его свойства при известных проводимостях (8.2). Эти проводимости (y -параметры) называют основными параметрами четырехполюсника.

Основные уравнения четырехполюсника могут быть записаны в матричной форме:

$$(\dot{I}) = (y)(\dot{U}), \quad (\dot{I}) = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (\dot{U}) = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (y) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Здесь (\dot{I}) — матрица-столбец токов; (\dot{U}) — матрица-столбец напряжений; (y) — квадратная матрица проводимостей четырехполюсника. Произведение матриц (8.3) находят по известному правилу умножения строки на столбец (см. § 2.6.2). При этом перемножение матриц (8.3) дает уравнения (8.1).

В основных уравнениях четырехполюсника (8.1) напряжения \dot{U}_1 , \dot{U}_2 считаются заданными. По ним определяются неизвестные токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 . Однако из четырех переменных \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 можно задавать любую пару величин. При этом другая пара переменных определяется через эти заданные величины. Такое определение возможно путем решения системы из двух уравнений (8.1) относительно двух неизвестных переменных. Например, при неизвестных напряжениях \dot{U}_1 , \dot{U}_2 решив систему уравнений (8.1), получим

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2, \quad (8.4)$$

где

$$z_{11} = y_{22}/|y|, \quad z_{12} = -y_{12}/|y|, \quad z_{21} = -y_{21}/|y|, \quad z_{22} = y_{11}/|y| \quad (8.5)$$

— z -параметры четырехполюсника;

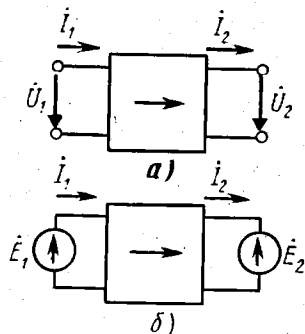


Рис. 8.1. Передача сигнала через четырехполюсник слева направо

$$|y| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \quad (8.6)$$

— определитель матрицы проводимостей четырехполюсника.

Соотношения (8.4) также являются основными уравнениями четырехполюсника, а величины (8.5) — его основными параметрами. Эти уравнения тоже представляют в матричной форме

$$(\dot{U}) = (z)(I), \quad (8.7)$$

где

$$(z) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|y|} \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

— матрица сопротивлений четырехполюсника.

Матричное равенство (8.8) записано с учетом значений параметров (8.5) и (8.6). Оно называется уравнением связи между основными параметрами четырехполюсника.

По основным уравнениям (8.4) или (8.7) определяют неизвестные напряжения по заданным токам. Аналогично этим уравнениям могут быть найдены и другие основные уравнения четырехполюсника:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (a) \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad (a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = (b) \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad (b) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = (f) \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (h) \begin{pmatrix} I_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (h) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Квадратные матрицы (8.9)—(8.12) называются a -, b -, f - и h -матрицами, а их коэффициенты — a -, b -, f - и h -параметрами (основными параметрами) четырехполюсника. Матрица (8.9) называется также цепочечной матрицей четырехполюсника. Методы расчета четырехполюсников с помощью матричных уравнений (8.3) и (8.7)—(8.12) называются матричными методами. При составлении уравнений (8.9)—(8.12) находят уравнения связи между основными параметрами четырехполюсника. Все уравнения связи приведены в табл. П.15, а значения определителей, использованные в этих уравнениях связи, — в табл. П.16.

Как было отмечено, основные параметры четырехполюсников однозначно определяют их свойства. Поэтому разные четырехполюсники при совпадении их основных параметров обладают одинаковыми свойствами, т. е. являются эквивалентными. Таким образом, условиями эквивалентности различных четырехполюсников являются равенства их соответствующих основных параметров.

2. Основные свойства. Линейные пассивные четырехполюсники являются обратимыми цепями (см. § 3.5.5). Рассмотрим свой-

ства обратимых четырехполюсников, базируясь на основных уравнениях (8.9):

$$\dot{U}_1 = a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}\dot{I}_2. \quad (8.13)$$

С учетом уравнений связи (см. табл. П.15) система основных уравнений (8.10) также выражается через a -параметры:

$$\dot{U}_2 = \frac{a_{22}}{|a|}\dot{U}_1 - \frac{a_{12}}{|a|}\dot{I}_1, \quad \dot{I}_2 = -\frac{a_{21}}{|a|}\dot{U}_1 + \frac{a_{11}}{|a|}\dot{I}_1. \quad (8.14)$$

Изменим направление передачи через четырехполюсник и примем обозначения, показанные на рис. 8.2, а. Тогда, учитывая изменение положительного направления токов, уравнения (8.14) перепишем в виде

$$\dot{U}'_2 = \frac{a_{22}}{|a|}\dot{U}'_1 + \frac{a_{12}}{|a|}\dot{I}'_1, \quad \dot{I}'_2 = \frac{a_{21}}{|a|}\dot{U}'_1 + \frac{a_{11}}{|a|}\dot{I}'_1. \quad (8.15)$$

Для обратимых четырехполюсников перенос э. д. с. $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ (см. рис. 8.1) в выходной контур (рис. 8.2, б) означает, что $\dot{I}'_1 = -\dot{I}_2$ при $\dot{U}'_2 = \dot{E}_1 = \dot{U}_1$. При этом первое уравнение (8.15) принимает вид

$$\dot{U}'_1 = \frac{a_{22}}{|a|}\dot{U}'_1 + \frac{a_{12}}{|a|}\dot{I}_2. \quad (8.16)$$

Сравним это соотношение с первым основным уравнением (8.13). Оба они устанавливают связь между напряжением \dot{U}_1 и током \dot{I}_2 . Эта связь является идентичной, если слагаемые (8.16) имеют следующие значения:

$$\frac{a_{22}}{|a|}\dot{U}'_1 = a_{11}\dot{U}_2, \quad \frac{a_{12}}{|a|}\dot{I}_2 = a_{12}\dot{I}_2. \quad (8.17)$$

Из второго равенства следует, что *определитель цепочечной матрицы обратимого четырехполюсника должен равняться единице*. С учетом значений этого определителя (см. табл. П.16)

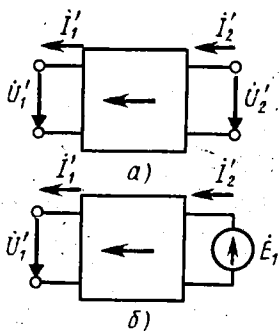


Рис. 8.2. Передача сигнала через четырехполюсник справа налево

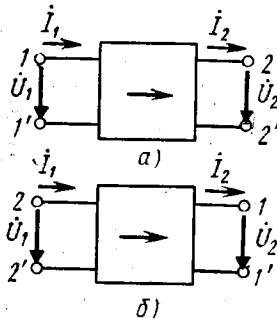


Рис. 8.3. Напряжения и токи в симметричном четырехполюснике

указанное условие обратимости четырехполюсника запишем в различных формах:

$$\begin{aligned} -y_{12}/y_{21} &= -z_{12}/z_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \\ &= f_{12}/f_{21} = h_{12}/h_{21} = 1. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Таким образом, обратимые четырехполюсники имеют только три независимых параметра, задавшись которыми, можно определить и четвертый основной параметр по одному из условий (8.18).

Первое равенство (8.17) должно выполняться при произвольном значении U_1 . В частности, может наблюдаться равенство $U_1 = U_2$. Это означает, что в таких обратимых четырехполюсниках при изменении направления передачи сохраняются значения как выходного тока, так и выходного напряжения. Если в четырехполюсниках подводимые и отводимые напряжения и токи не изменяются при перестановке местами входных и выходных зажимов (рис. 8.3, а, б), то такие обратимые четырехполюсники называются симметричными.

Учитывая условие обратимости (8.18), из первого равенства (8.17) находим, что в симметричных четырехполюсниках должны быть равны основные параметры a_{11} и a_{22} . С учетом соотношения этих параметров (см. табл. П.16) запишем условие симметрии четырехполюсника в различных формах:

$$\begin{aligned} -y_{11}/y_{22} &= -z_{11}/z_{22} = a_{11}/a_{22} = b_{11}/b_{22} = f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22} = \\ &= h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22} = 1. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Следует иметь в виду, что условия симметрии (8.19) должны выполняться одновременно с условиями обратимости (8.18) четырехполюсника. Отсюда следует, что симметричные четырехполюсники имеют два независимых основных параметра.

3. Канонические схемы. Различные электрические цепи с неодинаковым количеством элементов могут обладать одинаковыми свойствами. Для разных классов цепей можно установить правила составления схем с минимальным количеством элементов при заданных свойствах. Такие схемы с минимальным количеством элементов называются каноническими (от греч. κανών — правило, норма).

Канонические схемы обратимых четырехполюсников могут быть составлены из трех произвольных двухполюсников с некоторыми сопротивлениями Z_1, Z_2, Z_3 . Это вытекает из того, что обратимые четырехполюсники имеют только три независимых параметра. Свойства же четырехполюсников могут характеризоваться не только основными параметрами, но и сопротивлениями двухполюсников, из которых составлены эти четырехполюсники. Следовательно, существует только три независимых сопротивления двухполюсника, из которых можно составить произвольный обратимый четырехполюсник с любыми заданными свойствами.

Для получения канонических схем обратимых четырехпо-

люсников указанные двух- полюсники можно соединить двумя способами — звездой и треугольником. При этом получаются Т-образная (рис. 8.4, а) и П-образная (рис. 8.4, б) канонические схемы четырехполюсников. Их называют также цепочечными каноническими схемами.

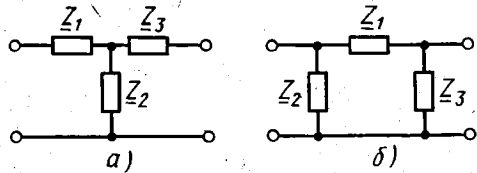


Рис. 8.4. Канонические схемы обратимых четырехполюсников

Канонические схемы симметричных четырехполюсников должны содержать два независимых сопротивления, поскольку в этих четырехполюсниках имеется только два независимых основных параметра. Получающиеся при этом Т-образная и П-образная канонические схемы симметричных четырехполюсников показаны на рис. 8.5, а, б.

В этих четырехполюсниках нижние плечи имеют нулевые сопротивления в отличие от верхних плеч с сопротивлениями Z_1 . Четырехполюсники с неодинаковыми сопротивлениями нижних и верхних плеч называются неуравновешенными. Уравновешенные симметричные четырехполюсники могут быть отображены X-образной мостовой канонической схемой, показанной на рис. 8.5, в

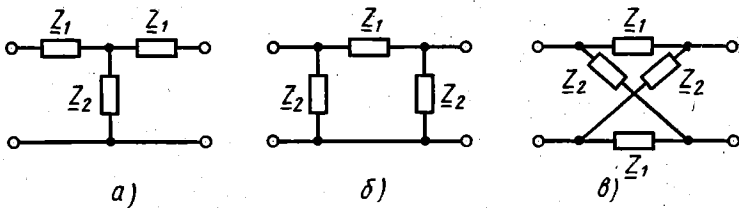


Рис. 8.5. Канонические схемы симметричных четырехполюсников

(ср. с рис. 2.19). Возможны и другие разновидности мостовых цепей, под которыми понимают цепи, обеспечивающие прохождение сигнала с их входа на выход несколькими параллельными путями.

4. Соединения четырехполюсников. Четырехполюсники могут соединяться друг с другом своими зажимами. В зависимости от способа подключения зажимов различают три основных вида соединения четырехполюсников: параллельное (параллельно-параллельное, рис. 8.6, а), последовательное (последовательно-последовательное, рис. 8.6, б) и цепочечное, или каскадное (рис. 8.6, в). Кроме того, существует два вида смешанного соединения четырехполюсников — параллельно-последовательное (рис. 8.6, г) и последовательно-параллельное (рис. 8.6, д).

На рис. 2.1, б показано, что *втекающий и вытекающий токи должны быть одинаковыми как на входе, так и на выходе четы-*

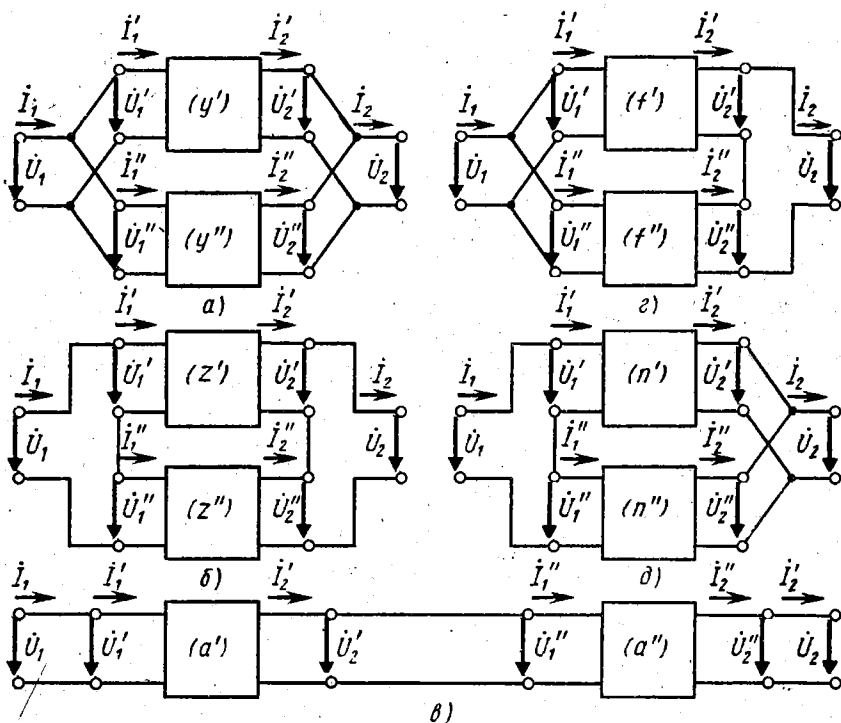


Рис. 8.6. Виды соединений четырехполюсников

рехполюсника. Если это равенство токов сохраняется и при различных соединениях четырехполюсников, то такие их соединения называются *регулярными*. Из рис. 8.6, в видно, что цепочечное соединение четырехполюсников всегда является регулярным. Остальные виды соединений могут быть нерегулярными.

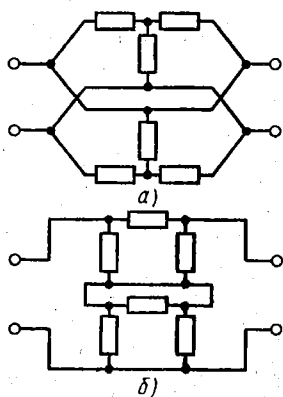


Рис. 8.7. Нерегулярные соединения четырехполюсников

Одним из схемных признаков нерегулярности соединения четырехполюсников является, например, короткое замыкание элементов четырехполюсника при подключении к нему другого четырехполюсника (рис. 8.7, а, б). Однако по виду схемы не всегда удобно судить о нерегулярности соединения четырехполюсников. Поэтому на практике пользуются количественным критерием регулярности их соединения.

Рассмотрим условие регулярности параллельного соединения выходных зажимов четырехполюсников. При этом входные зажимы могут соединяться произ-

вольным образом, как условно показано на рис. 8.8, а. Равенство втекающего и вытекающего токов должно соблюдаться в любом режиме работы четырехполюсников, в том числе и при коротком замыкании их выходных зажимов. Если $Z_{02} = 0$ (рис. 8.8, б), то по первому закону Кирхгофа токи связаны соотношениями

$$I_2' = I_{2к}' + I_{2к}, \quad I_2'' = I_{2к}'' + I_{2к}.$$

При этом соединение регулярно, если $I_2' = I_{2к}'$ и $I_2'' = I_{2к}''$, т. е. при $I_{2к} = 0$. Последнее равенство возможно только в том случае, если напряжение между зажимами 2—2' равно нулю даже при отсутствии короткозамыкающей перемычки между ними. Тогда при подключении этой перемычки ток в ней будет равен нулю. Поэтому *регулярность параллельного соединения следует проверять по схеме рис. 8.8, в, где равенство $\dot{U} = 0$ является условием регулярности этого соединения.*

Регулярность последовательного соединения выходных зажимов четырехполюсников также проверяют при произвольном соединении их входных зажимов, как условно показано на

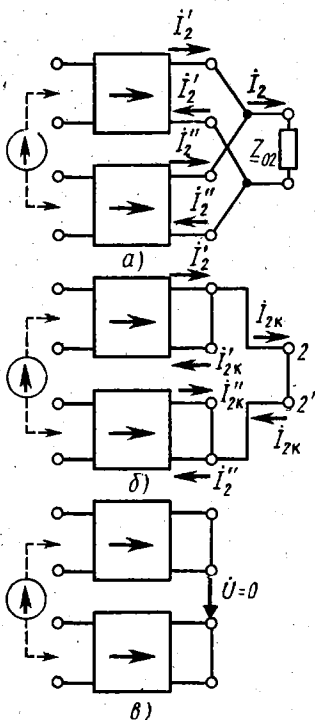


Рис. 8.8. Проверка регулярности параллельного соединения выходных зажимов четырехполюсников

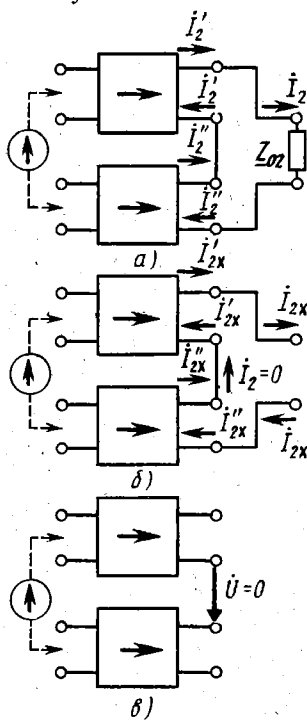


Рис. 8.9. Проверка регулярности последовательного соединения выходных зажимов четырехполюсников

рис. 8.9, а. Регулярность такого соединения означает равенство втекающего и вытекающего токов в каждом из четырехполюсников. Это равенство должно соблюдаться в любом из режимов. В частности, в режиме холостого хода ток I_2 должен равняться нулю (рис. 8.9, б), что возможно только при $\dot{U} = 0$, как показано на рис. 8.9, в. Последнее равенство и является условием регулярности последовательного соединения.

Регулярность соединения четырехполюсников на их входе можно проверить аналогичным образом. Для этого надо лишь изменить направление передачи, включив источник э. д. с. справа. Тогда проверка критерия $\dot{U} = 0$ будет производиться на левых зажимах четырехполюсников при их коротком замыкании или размыкании.

При различных соединениях четырехполюсников они образуют составной четырехполюсник более сложного вида. Матрица составного четырехполюсника может быть найдена по матрицам соединяемых четырехполюсников, если соединение является регулярным. Например, при цепочечном соединении четырехполюсников (см. рис. 8.6, в) всегда соблюдаются равенства

$$\dot{U}_2 = \dot{U}'_1, I_2 = I'_1. \quad (8.20)$$

При этом основные уравнения (8.9) для таких четырехполюсников можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ I'_1 \end{pmatrix} = (a') \begin{pmatrix} \dot{U}'_2 \\ I'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ I'_1 \end{pmatrix} = (a'') \begin{pmatrix} \dot{U}''_2 \\ I''_2 \end{pmatrix} = (a'') \begin{pmatrix} \dot{U} \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

В силу справедливости равенств (8.20) эти уравнения можно объединить:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = (a') \begin{pmatrix} \dot{U}''_1 \\ I''_1 \end{pmatrix} = (a')(a'') \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая последнее равенство с уравнением (8.9), приходим к выводу, что цепочечная матрица цепочно соединенных четырехполюсников равна произведению их цепочечных матриц:

$$(a) = (a')(a''). \quad (8.21)$$

При параллельном регулярном соединении входных или выходных зажимов четырехполюсников суммируются токи, проходящие через эти зажимы, при последовательном регулярном соединении — напряжения на этих зажимах. Поэтому при параллельном, последовательном или смешанном регулярном соединении четырехполюсников следует выбрать основные уравнения, определяющие суммируемые напряжения и токи. Например, при последовательно-параллельном соединении четырехполюсников (см. рис. 8.6, д) необходимо рассматривать основные уравнения (8.12), которые определяют суммируемые входные напряжения и выходные токи:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} I'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{U}''_1 \\ I''_2 \end{pmatrix} = (h'') \begin{pmatrix} I''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда определяются входное напряжение и выходной ток результирующего четырехполюсника:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{U}'_3 \end{pmatrix} + (h'') \begin{pmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{pmatrix} = [(h') + (h'')] \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix},$$

поскольку $\dot{I}'_1 = \dot{I}''_1 = \dot{I}_1$ и $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 = \dot{U}_2$. Сравнивая полученное равенство с уравнением (8.12), находим, что при последовательно-параллельном регулярном соединении четырехполюсников складываются их h -матрицы:

$$(h) = (h') + (h''). \quad (8.22)$$

Аналогично правилам (8.21), (8.22) определяются необходимые действия с матрицами и при других регулярных соединениях четырехполюсников. Эти действия приведены в табл. П.17.

5. Передаточные функции. Передачу сигналов через четырехполюсник (рис. 8.10, а) можно характеризовать различными

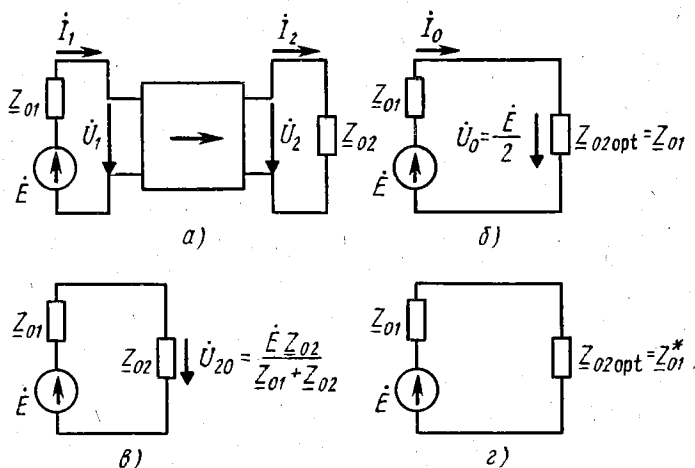


Рис. 8.10. Определение рабочих, вносимых и действующих ослаблений и затуханий четырехполюсника

передаточными функциями. Ими могут быть, в частности, коэффициенты трансформации (3.135) и коэффициент передачи (3.28), где $\dot{U}_m = \dot{U}_{m2}$. Возможно также использование любой из обобщенных передаточных функций (6.9). Однако все эти функции характеризуют передачу сигнала либо по напряжению, либо по току. В технике связи удобно использовать передаточную функцию, характеризующую передачу сигнала и по напряжению и по току, что позволяет оценивать энергетические соотношения.

Кроме того, эта передаточная функция позволяет оценивать ослабление сигналов (и помех), подобно параметрам (4.1) — (4.4). Наиболее распространенной является *рабочая передаточная функция*:

$$\underline{H}_p = H_p e^{jb_p} = e^{g_p} = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{U_2 I_2}} = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (8.23)$$

Здесь

$$H_p = |\underline{H}_p| = e^{a_p} = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{U_2 I_2}} = \sqrt{\frac{P_{S0}}{P_{S2}}} = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (8.24)$$

— модуль рабочей передаточной функции, называемый *рабочим ослаблением* четырехполюсника;

$$g_p = a_p + jb_p \quad (8.25)$$

— *рабочий коэффициент передачи* четырехполюсника;

$$a_p(\text{Нп}) = \ln H_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{S0}}{P_{S2}}, \quad a_p(\text{дБ}) = 10 \lg H_p^2 = 10 \lg \frac{P_{S0}}{P_{S2}} \quad (8.26)$$

— *рабочее затухание* четырехполюсника;

$$b_p = \arg \underline{H}_p = \frac{1}{2} \arg \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} \quad (8.27)$$

— *рабочая фаза* четырехполюсника (с точностью до угла π); U_0, I_0, P_{S0} — напряжение, ток и полная мощность на согласованном нагрузочном сопротивлении $Z_{02 \text{ опт}} = Z_{01}$, подключенном непосредственно к источнику (рис. 8.10, б);

$K = \dot{U}_2 / \dot{E}_2$ — коэффициент передачи четырехполюсника.

Таким образом, *рабочее ослабление* (8.24) и *рабочее затухание* (8.26) показывают уменьшение полной мощности $P_{S2} = U_2 I_2$ на выходе четырехполюсника (рис. 8.10, а) по отношению к максимальной полной мощности P_{S0} в согласованной нагрузке (рис. 8.10, б). При этом параметры (8.23) — (8.27) позволяют судить об изменении сигнала, проходящего через четырехполюсник, по сравнению с идеальным случаем, когда сигнал поступает в нагрузку без искажений.

Рабочее ослабление (8.24) и *рабочее затухание* (8.26) характеризуют уменьшение полной мощности как за счет влияния четырехполюсника, так и за счет рассогласования между нагрузочным сопротивлением Z_{02} и внутренним сопротивлением источника Z_{01} . При необходимости оценить уменьшение мощности только за счет влияния четырехполюсника пользуются понятием *вносимого ослабления* $H_{\text{вн}}$ и *вносимого затухания* $a_{\text{вн}}$:

$$H_{\text{вн}} = e^{a_{\text{вн}}} = \sqrt{\frac{P_{S20}}{P_{S2}}} = \frac{Z_{02}}{K|Z_{01} + Z_{02}|} \quad (8.28)$$

$$a_{\text{вн}}(\text{Нп}) = \ln H_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{S20}}{P_{S2}}, \quad a_{\text{вн}}(\text{дБ}) = 20 \lg H_{\text{вн}} = 10 \lg \frac{P_{S20}}{P_{S2}}, \quad (8.29)$$

где $P_{S20} = E^2 Z_{02} / |Z_{01} + Z_{02}|^2$ — полная мощность на нагрузочном сопротивлении \underline{Z}_{02} , подключенном непосредственно к источнику (рис. 8.10, а).

Согласно смыслу рабочего затухания (8.26) и вносимого затухания (8.29) разность между ними характеризует уменьшение мощности за счет рассогласования между сопротивлениями \underline{Z}_{02} и \underline{Z}_{01} . Эта величина, называемая *затуханием несогласованности*, определяется с помощью формул (8.24) и (8.28):

$$a_{\text{н}}(\text{Нп}) = a_{\text{р}} - a_{\text{вн}} = \ln \frac{H_{\text{р}}}{H_{\text{вн}}} = \ln \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} + \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right|. \quad (8.30)$$

При $\underline{Z}_{02} = \underline{Z}_{01}$ затухание несогласованности (8.30) обращается в нуль.

Иногда оценивают уменьшение в нагрузке не полной, а активной мощности. Для этого используют понятие *действующего ослабления* $H_{\text{д}}$ и *действующего затухания* $a_{\text{д}}$:

$$H_{\text{д}} = e^{a_{\text{д}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{max max}}}{P_2}} = \frac{Z_{02}}{2K\sqrt{R_{01}R_{02}}}, \quad (8.31)$$

$$a_{\text{д}}(\text{Нп}) = \ln H_{\text{д}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{\text{max max}}}{P_2},$$

$$a_{\text{д}}(\text{дБ}) = 20 \lg H_{\text{д}} = 10 \lg \frac{P_{\text{max max}}}{P_2}, \quad (8.32)$$

где $P_2 = U_2^2 R_{02} / Z_{02}^2$ — активная мощность на нагрузочном сопротивлении $\underline{Z}_{02} = R_{02} + jX_{02}$ (рис. 8.10, а); $P_{\text{max max}} = E^2 / 4R_{01}$ — мощность максимум-максимум, отдаваемая источником с внутренним сопротивлением $\underline{Z}_{01} = R_{01} + jX_{01}$ в согласованное нагрузочное сопротивление $\underline{Z}_{02\text{opt}} = \underline{Z}_{01}^* = R_{01} - jX_{01}$ (рис. 8.10, з).

Согласно формулам (8.24), (8.26) и (8.31), (8.32) между рабочими и действующими ослаблениями и затуханиями существует связь:

$$H_{\text{д}} = H_{\text{р}} \sqrt{Z_{01} Z_{02} / R_{01} R_{02}}, \quad a_{\text{д}} = a_{\text{р}} + 0,5 \ln Z_{01} / R_{01} + 0,5 \ln Z_{02} / R_{02}. \quad (8.33)$$

Таким образом, при диссипативных нагрузочных сопротивлениях четырехполюсника $\underline{Z}_{01} = Z_{01} = R_{01}$ и $\underline{Z}_{02} = Z_{02} = R_{02}$ действующие и рабочие ослабления и затухания соответственно равны друг другу, как это видно из формул (8.33).

Затухания (8.26), (8.29), (8.30) и (8.32) являются логарифмическими мерами передачи четырехполюсника. Рассмотренные здесь величины (8.23) — (8.32) объединяются под общим названием *рабочих параметров четырехполюсника*.

§ 8.2. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПО ОСНОВНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Все характеристики четырехполюсников, параметры канонических схем и другие величины, определяющие их свойства, можно рассчитывать через основные параметры четырехполюсников. Поскольку различные системы основных параметров (8.2), (8.5) и (8.9) — (8.12) связаны между собой (см. табл. П.15), в настоящем параграфе рассматриваются методы расчета четырехполюсников только через a -параметры. Эти методы излагаются после рассмотрения способов определения основных параметров.

1. Расчет основных параметров. Существует три метода расчета матричных коэффициентов, являющихся основными параметрами четырехполюсников: 1) *метод нахождения матриц путем составления основных уравнений четырехполюсника*; 2) *метод холостого хода и короткого замыкания*; 3) *метод разбиения сложного четырехполюсника на более простые четырехполюсники с известными матрицами*.

Метод составления основных уравнений четырехполюсника базируется на законах токопрохождения. В нем могут использоваться любые прямые и косвенные методы расчета цепей. Примером использования такого метода является определение y -параметров (8.2) через сопротивления передачи и входные сопротивления четырехполюсника. Другим примером может служить вывод уравнений (7.80), из которых при $l = l_0$ определяется цепочечная матрица волнового четырехполюсника:

$$(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma l_0 & Z_c \operatorname{sh} \gamma l_0 \\ (\operatorname{sh} \gamma l_0)/Z_c & \operatorname{ch} \gamma l_0 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы или непосредственно по уравнениям (7.82), (7.83) определяется также цепочечная матрица отрезка линии без потерь. При использовании же значений тригонометрических функций в области резонансных частот (см. § 7.5.2) отсюда можно найти цепочечные матрицы резонансных волновых четырехполюсников.

Из приведенных примеров видно, что описанный метод является универсальным, но довольно громоздким. Однако в ряде случаев искомый результат достигается достаточно просто. Например, для идеального трансформатора непосредственно из законов токопрохождения (2.23) и (2.25) определяется его цепочечная матрица:

$$(a) = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Метод холостого хода и короткого замыкания основан на упрощении основных уравнений четырехполюсника и всех расчетов в указанных режимах. В этих режимах (рис. 8.11, a , b) при $I_2 = 0$ или $U_2 = 0$ основные уравнения (8.9) принимают вид

$$\dot{U}_{1x} = a_{11}\dot{U}_{2x}, \quad \dot{I}_x = a_{21}\dot{U}_{2x}, \quad \dot{U}_{1k} = a_{12}\dot{I}_k, \quad \dot{I}_k = a_{22}\dot{I}_k.$$

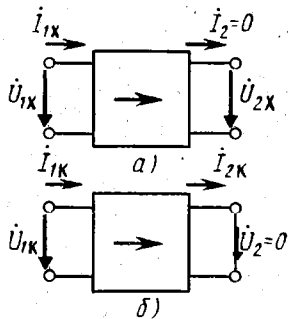


Рис. 8.11. Режимы холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника

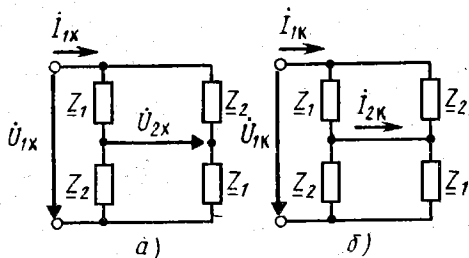


Рис. 8.12. Мостовая схема в режиме холостого хода и короткого замыкания

Отсюда вытекают соответствующие расчетные формулы, которые определяют и физический смысл a -параметров:

$$a_{11} = \dot{U}_{1x} / \dot{U}_{2x} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{i_2=0}, \quad a_{12} = \dot{U}_{1k} / \dot{I}_{2k} = \dot{U}_1 / I_2 |_{U_2=0},$$

$$a_{21} = \dot{I}_{1x} / \dot{U}_{2x} = \dot{I}_1 / \dot{U}_2 |_{i_2=0}, \quad a_{22} = \dot{I}_{1k} / \dot{I}_{2k} = \dot{I}_1 / I_2 |_{U_2=0} \quad (8.34)$$

Покажем применение этих формул на примере мостовой канонической схемы четырехполюсника (см. рис. 8.5, β). В режиме холостого хода (рис. 8.12, a), используя закон Ома и формулы (3.67) для делителя напряжения, находим

$$\dot{U}_{2x} = \dot{U}_{1x} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \dot{U}_{1x} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \dot{U}_{1x} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

$$\dot{I}_{1x} = \frac{2\dot{U}_{1x}}{Z_1 + Z_2}.$$

В режиме короткого замыкания (рис. 8.12, b), используя закон Ома и формулы (3.68) для делителя тока, получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1k} &= 2\dot{I}_{1k} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \dot{I}_{2k} = \dot{I}_{1k} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \dot{I}_{1k} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \\ &= \dot{I}_{1k} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned}$$

Из найденных соотношений и формул (8.34) определяется цепочечная матрица мостовой канонической схемы:

$$(a) = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}.$$

Метод разбиения сложного четырехполюсника на более простые четырехполюсники основан на использовании действий с матрицами в соответствии с табл. П.17 и видом соединения этих простых четырехполюсников. Например, Т-образная каноническая схема (см. рис. 8.4, a) может быть представлена в виде трех элементарных четырехполюсников, соединенных це-

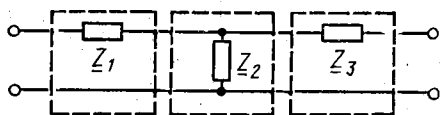


Рис. 8.13. Разбиение Т-образной канонической схемы на цепочно соединенные четырехполюсники

почечно друг с другом (рис. 8.13). Цепочечные матрицы этих простейших четырехполюсников определяются элементарно любым из двух рассмотренных методов:

$$(a_1) = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a_3) = \begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $Y_2 = 1/Z_2$ — проводимость поперечного плеча второго четырехполюсника.

Отсюда согласно правилу (8.21) определяется цепочечная матрица Т-образной канонической схемы четырехполюсника:

$$(a) = (a_1)(a_2)(a_3) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1 Y_2}{Y_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Y_2 Z_3}{1 + \frac{Y_2 Z_3}{Y_2}} \\ \frac{Y_2}{1 + \frac{Y_2 Z_3}{Y_2}} & 1 + \frac{Y_2 Z_3}{Y_2} \end{pmatrix}.$$

После нахождения любой матрицы четырехполюсника все остальные его параметры определяют по уравнениям связи (см. табл. П. 15). Найденные таким образом матрицы типовых четырехполюсников приведены в табл. П. 18, а матрицы волновых четырехполюсников — в табл. П. 19.

2. Расчет входных сопротивлений. Входные сопротивления четырехполюсника рассматривают с двух сторон — при передаче слева направо и справа налево (рис. 8.14, а, б). Эти сопротивления, как и нагрузочные сопротивления справа и слева, определяют в соответствии с законом Ома:

$$\underline{Z}_{вх1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1, \quad \underline{Z}_{вх2} = \dot{U}'_2 / \dot{I}'_2, \quad \underline{Z}_{02} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2, \quad \underline{Z}_{01} = \dot{U}'_1 / \dot{I}'_1. \quad (8.35)$$

Сопротивление $\underline{Z}_{вх2}$ называют также *входным сопротивлением*.

Подставив в первые два равенства (8.35) значения напряжений и токов (8.13), (8.15), с учетом последних двух равенств (8.35) получим

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вх1} &= (a_{11} \underline{Z}_{02} + a_{12}) / (a_{21} \underline{Z}_{02} + a_{22}), \\ \underline{Z}_{вх2} &= (a_{22} \underline{Z}_{01} + a_{12}) / (a_{21} \underline{Z}_{01} + a_{11}). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Если симметричные четырехполюсники ($a_{11} = a_{22}$) нагружены также симметрично ($\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02} = \underline{Z}_0$), то входные сопротивления (8.36) получаются одинаковыми:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вх1} &= \underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_{вх} = \\ &= (a_{11} \underline{Z}_0 + a_{12}) / (a_{21} \underline{Z}_0 + a_{11}). \end{aligned} \quad (8.37)$$

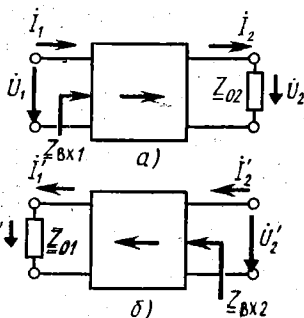


Рис. 8.14. Входные сопротивления четырехполюсника слева и справа

Из формул (8.36) определяются также входные сопротивления четырехполюсника в режимах холостого хода ($Z_{02} = \infty$ или $Z_{01} = \infty$) и короткого замыкания ($Z_{02} = 0$ или $Z_{01} = 0$):

$$\underline{Z}_{1x} = a_{11}/a_{21}, \underline{Z}_{1к} = a_{12}/a_{22}, \underline{Z}_{2x} = a_{22}/a_{21}, \underline{Z}_{2к} = a_{12}/a_{11}. \quad (8.38)$$

Здесь для удобства записи опущен индекс «вх». Для симметричных четырехполюсников эти входные сопротивления также получаются одинаковыми. Опуская при этом индексы «1» и «2», находим

$$\underline{Z}_x = a_{11}/a_{21}, \underline{Z}_к = a_{12}/a_{11}. \quad (8.39)$$

По формулам (8.35) — (8.39) с помощью уравнений связи (см. табл. П. 15) можно определять соответствующие входные сопротивления и через другие системы основных параметров.

3. Расчет передаточных функций. Коэффициенты трансформации четырехполюсника находят подстановкой основных уравнений (8.13) в определение (3.135) и входного сопротивления (8.36) в определение (3.136). Учитывая при этом третье равенство (8.35), получаем

$$\underline{n}_U = \frac{Z_{02}}{a_{11}Z_{02} + a_{12}}, \underline{n}_I = a_{21}Z_{02} + a_{22}, \underline{n}_Z = \frac{a_{21}Z_{02} + a_{22}}{a_{12}/Z_{02} + a_{11}}. \quad (8.40)$$

Для определения комплексного коэффициента передачи четырехполюсника (см. рис. 8.10, а) используем второй закон Кирхгофа и основные уравнения (8.13):

$$\dot{E} = \underline{Z}_{01}\dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \underline{Z}_{01}(a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}\dot{I}_2) + a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}\dot{I}_2.$$

Подставляя это значение э. д. с. в определение (3.28), где $\dot{U} = \dot{U}_2$, с учетом третьего равенства (8.35) получаем

$$\underline{K} = \underline{Z}_{02}/(a_{11}\underline{Z}_{02} + a_{12} + a_{21}\underline{Z}_{01}\underline{Z}_{02} + a_{22}\underline{Z}_{01}). \quad (8.41)$$

Используя эту формулу, находим значение рабочей передаточной функции (8.23):

$$\underline{H}_p = \frac{1}{2} \left(a_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right). \quad (8.42)$$

Отсюда определяются рабочее ослабление (8.24), рабочее затухание (8.26) и рабочая фаза (8.27):

$$H_p = \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right|, \quad (8.43)$$

$$\varphi_p(H_p) = \ln \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right|, \quad (8.44)$$

$$a_p \text{ (дБ)} = 20 \lg \frac{1}{2} \left| a_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right|, \quad (8.45)$$

$$b_p = \arg \left(a_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right). \quad (8.46)$$

Система a -параметров, использованная в соотношениях (8.40) — (8.46), является в этих расчетах наиболее удобной. При необходимости применения систем других параметров их целесообразно выразить через a -параметры (см. табл. П. 15).

4. Расчет канонических схем. Параметры канонических схем четырехполюсников (см. рис. 8.4), т. е. сопротивления входящих в них двухполюсников, достаточно просто можно рассчитать через основные параметры четырехполюсника. Например, по цепочечной матрице Т-образной схемы (см. табл. П. 18) находим

$$a_{21} = \underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2, \quad a_{11} = \underline{Y}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = a_{21}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2), \\ a_{22} = \underline{Y}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = a_{21}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3).$$

Отсюда определяются искомые параметры:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1T} = (a_{11} - 1)/a_{21}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2T} = 1/a_{21}, \\ \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{3T} = (a_{22} - 1)/a_{21}. \quad (8.47)$$

Аналогично определяются параметры П-образной канонической схемы:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1П} = a_{12}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2П} = a_{12}/(a_{22} - 1), \\ \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{3П} = a_{12}/(a_{11} - 1). \quad (8.48)$$

Соотношения (8.47) и (8.48) свидетельствуют о том, что канонические схемы могут использоваться в качестве эквивалентных схем произвольных четырехполюсников с известными основными параметрами. Аналогично определяются параметры канонических схем, эквивалентных симметричным четырехполюсникам.

Для канонических схем симметричных четырехполюсников (см. рис. 8.5, а, б) формулы (8.47), (8.48) принимают вид

$$\underline{Z}_{1T} = (a_{11} - 1)/a_{21}, \quad \underline{Z}_{2T} = 1/a_{21}, \\ \underline{Z}_{1П} = a_{12}, \quad \underline{Z}_{2П} = a_{12}/(a_{11} - 1). \quad (8.49)$$

Для мостовой Х-образной канонической схемы симметричного четырехполюсника (см. рис. 8.5, в) из матрицы сопротивлений (см. табл. П. 18) при $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1X}$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2X}$ находим

$$\underline{Z}_{1X} = z_{11} - z_{21} = (a_{11} - 1)/a_{21}, \\ \underline{Z}_{2X} = z_{11} + z_{21} = (a_{11} + 1)/a_{21}. \quad (8.50)$$

Здесь последние равенства получены с помощью уравнений связи (см. табл. П. 15). Формулы (8.47) — (8.49), как и формулы (8.50), можно также модифицировать с помощью указанных уравнений.

В ряде случаев параметры канонических схем симметричных четырехполюсников (см. рис. 8.5) удобно находить, разделив их на две симметричные половины, как показано на рис. 8.15, *a—в*. Такое разделение симметричных четырехполюсников называется их *бисекцией*. Из рис. 8.15 видно, что сопротивления двухполюсников, из которых составлены эти четырехполюсники, легко определяются из опытов холостого хода и короткого замыка-

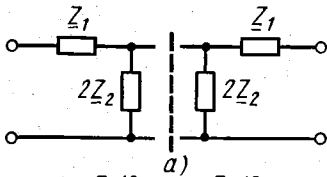


Рис. 8.15. Бисекция канонических схем симметричных четырехполюсников

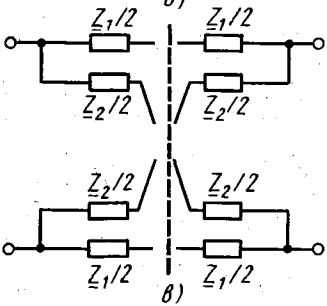
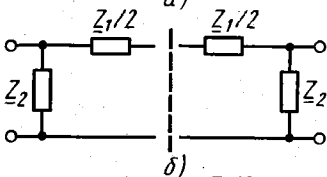
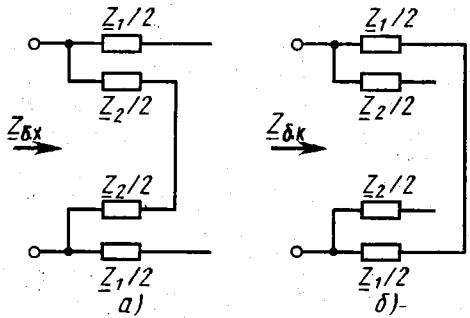


Рис. 8.16. Режимы холостого хода и короткого замыкания при бисекции мостовой схемы



ния для их левой отсеченной половины. Особенно просто указанные сопротивления можно найти для мостовой схемы. Для нее под опытом холостого хода следует понимать размыкание прямых плеч и соединение накоротко скрещенных плеч (рис. 8.16, *a*). Под опытом короткого замыкания здесь подразумевается соединение накоротко прямых плеч и размыкание скрещенных плеч (рис. 8.16, *б*). Из рис. 8.16 видно, что

$$Z_{1X} = Z_{б.к.}, \quad Z_{2X} = Z_{б.к.} \quad (8.51)$$

Поскольку симметричные четырехполюсники имеют только два независимых параметра, формулы (8.51) можно использовать для определения параметров мостовой канонической схемы, экви-

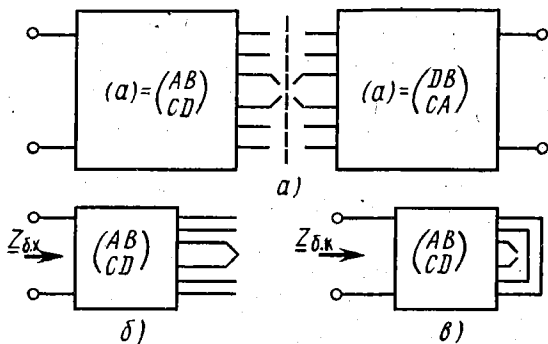


Рис. 8.17. Бисекция произвольного симметричного четырехполюсника

валентной произвольному симметричному четырехполюснику. Произвольный четырехполюсник может иметь любое количество прямых и скрещивающихся проводов, пересекающих линию бисекции (рис. 8.17, а). Определив при бисекции сопротивления $\underline{Z}_{\delta, x}$ (рис. 8.17, б) и $\underline{Z}_{\delta, k}$ (рис. 8.17, в), по формулам (8.51) находим искомые параметры. Такое определение параметров мостовой канонической схемы составляет содержание *теоремы бисекции*.

§ 8.3. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

Характеристическими параметрами четырехполюсника называют его входные сопротивления и передаточные функции в режиме двустороннего согласования четырехполюсника с нагрузочными сопротивлениями по полной мощности. Использование этих параметров в некоторых случаях существенно упрощает анализ и расчет четырехполюсников.

1. Характеристические сопротивления. В режиме двустороннего согласования четырехполюсника по критерию (3.159) одновременно выполняются следующие равенства:

$$\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_{c1}, \quad \underline{Z}_{02} = \underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_{c2}. \quad (8.52)$$

Эти равенства являются определением характеристических сопротивлений \underline{Z}_{c1} и \underline{Z}_{c2} . Их значения находят при подстановке равенств (8.52) в формулы (8.36):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{c1} &= (a_{11}\underline{Z}_{c2} + a_{12}) / (a_{21}\underline{Z}_{c2} + a_{22}), \\ \underline{Z}_{c2} &= (a_{22}\underline{Z}_{c1} + a_{12}) / (a_{21}\underline{Z}_{c1} + a_{11}). \end{aligned}$$

Решив совместно полученную систему уравнений, получим характеристические сопротивления четырехполюсника слева и справа:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{c1} &= \sqrt{a_{11}a_{12}/a_{21}a_{22}} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}}, \\ \underline{Z}_{c2} &= \sqrt{a_{22}a_{12}/a_{21}a_{11}} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Здесь вторые равенства написаны с учетом формулы (3.38). Учитывая формулы (8.39), из соотношений (8.53) находим характеристическое сопротивление симметричных четырехполюсников:

$$\underline{Z}_{c1} \Big|_{a_{11}=a_{22}} = \underline{Z}_{c2} \Big|_{a_{11}=a_{22}} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k}. \quad (8.54)$$

Используя значения цепочечных матриц (см. табл. П.18), из формулы (8.54) найдем характеристические сопротивления канонических схем симметричных четырехполюсников (см. рис. 8.5):

$$\underline{Z}_{cT} = \underline{Z}_1 \sqrt{1 + 2\underline{Z}_2/\underline{Z}_1}, \quad \underline{Z}_{cП} = \underline{Z}_2/\sqrt{1 + 2\underline{Z}_2/\underline{Z}_1}, \quad (8.55)$$

$$\underline{Z}_{cX} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}.$$

Согласно последнему равенству (8.54) формулы (8.55) могут быть получены также из опытов холостого хода и короткого замыкания.

2. Характеристическая передаточная функция. В соответствии с обозначениями на рис. 8.10, б на входе согласованного четырехполюсника $\dot{U}_1 = \dot{U}_0$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_0$. При этом определение (8.23) переходит в определение *характеристической передаточной функции* с учетом значений сопротивлений (8.52). Подставив эти значения в соотношения (8.42), с учетом формул (8.53) находим характеристическую передаточную функцию:

$$\underline{H}_c = \sqrt{\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}} = H_c e^{jb_c} = e^{a_c} = \sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}. \quad (8.56)$$

Здесь

$$H_c = |\underline{H}_c| = e^{a_c} = |\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}| \quad (8.57)$$

— *характеристическое ослабление* четырехполюсника;

$$g_c = a_c + jb_c = \ln(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}) \quad (8.58)$$

— *характеристический коэффициент передачи* четырехполюсника;

$$a_c = \ln H_c = \ln |\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}| \quad (8.59)$$

— *характеристическое, или собственное затухание* четырехполюсника;

$$b_c = \arg H_c = \arg(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}) \quad (8.60)$$

— *характеристическая, или собственная фаза* четырехполюсника.

Формулы (8.57) — (8.60) не всегда удобны при расчетах. Для характеристического коэффициента передачи можно получить и другие выражения. С этой целью из соотношения (8.56) находим

$$e^{-g_c} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}}. \quad (8.61)$$

Складывая и вычитая равенства (8.56) и (8.61), с учетом свойств (8.18) получаем

$$\operatorname{ch} g_c = \sqrt{a_{11} a_{22}}, \operatorname{sh} g_c = \sqrt{a_{12} a_{21}}. \quad (8.62)$$

Для симметричных четырехполюсников первая формула (8.62) упрощается:

$$\operatorname{ch} g_c = a_{11}, \operatorname{th}(g_c/2) = \sqrt{(a_{11} - 1)/(a_{11} + 1)}. \quad (8.63)$$

Последнее равенство вытекает из известной формулы $\operatorname{th}(x/2) = \sqrt{(\operatorname{ch} x - 1)/(\operatorname{ch} x + 1)}$.

Отсюда для канонических схем симметричных четырехполюсников получаются соотношения

$$\operatorname{ch} g_{cT} = \operatorname{ch} g_{cП} = 1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2, \operatorname{th}(g_{cX}/2) = \sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Z}_2}. \quad (8.64)$$

Первое соотношение (8.64) вытекает из первой формулы (8.63) при подстановке значения a_{11} из табл. П.18. Второе соотношение (8.64) следует из второй формулы (8.63) и равенств (8.50).

3. Расчет основных параметров. Поскольку характеристические параметры выражаются через a -параметры, цепочечная матрица четырехполюсника может быть выражена через его характеристические параметры. Для этого из формулы (8.53) находим

$$\sqrt{\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}} = \sqrt{a_{11}/a_{22}}, \sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} = \sqrt{a_{12}/a_{21}}. \quad (8.65)$$

Умножив и разделив друг на друга первые равенства (8.62), (8.65), определим основные параметры a_{11} и a_{22} . Аналогично из вторых равенств (8.62), (8.65) определяются коэффициенты a_{12} и a_{21} . Таким образом, находим цепочечную матрицу четырехполюсника:

$$(a) = \begin{pmatrix} \sqrt{\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}} \operatorname{ch} g_c & \sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} \operatorname{sh} g_c \\ (\operatorname{sh} g_c)/\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} & \sqrt{\underline{Z}_{c2}/\underline{Z}_{c1}} \operatorname{ch} g_c \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

Для симметричных четырехполюсников с характеристическими сопротивлениями (8.54) матрица (8.66) упрощается:

$$(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} g_c & \underline{Z}_c \operatorname{sh} g_c \\ (\operatorname{sh} g_c)/\underline{Z}_c & \operatorname{ch} g_c \end{pmatrix}. \quad (8.67)$$

Сопоставление цепочечной матрицы длинной линии (см. табл. П.18) с матрицей (8.67) показывает, что

$$\underline{y}l_0 = g_c, a l_0 = a_c, \beta l_0 = b_c, \quad (8.68)$$

а волновое сопротивление \underline{Z}_c длинной линии является ее характеристическим сопротивлением.

4. Расчет канонических схем. Характеристические параметры канонических схем рассчитывают через сопротивления входящих в них двухполюсников. Поэтому возможно и обратное определение этих сопротивлений по характеристическим параметрам.

Ограничимся рассмотрением симметричных канонических схем (см. рис. 8.5), для которых получены формулы (8.55) и (8.64). Параметры мостовой канонической схемы определяют путем умножения и деления друг на друга последних равенств в этих формулах. Для цепочечных канонических схем удобнее использовать формулы (8.49), подставив в них коэффициенты матрицы (8.67). При указанных преобразованиях получаются следующие расчетные формулы:

$$\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_c \operatorname{th}(g_c/2), \quad \underline{Z}_{2T} = \underline{Z}_{1П} = \underline{Z}_c \operatorname{sh} g_c, \quad \underline{Z}_{2П} = \underline{Z}_{2X} = \underline{Z}_c / \operatorname{th}(g_c/2). \quad (8.69)$$

При получении равенств (8.69) для цепочечных канонических схем использованы известные формулы $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(x/2) = \sqrt{(\operatorname{ch} x - 1)/2}$.

5. Расчет рабочих параметров. Характеристические параметры удобны в том отношении, что их можно достаточно просто определять для сложного четырехполюсника, составленного из нескольких четырехполюсников, соединенных цепочечно по принципу согласования характеристических сопротивлений (рис. 8.18).

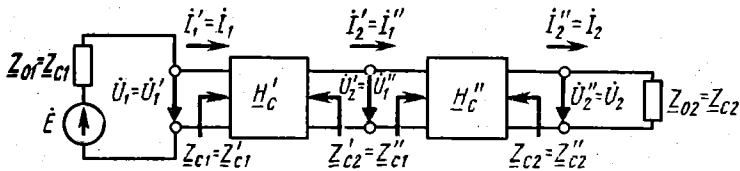


Рис. 8.18. Цепочечное соединение согласованных четырехполюсников

При этом характеристическая передаточная функция (8.56) имеет значение

$$\underline{H}_c = \sqrt{\dot{U}_1 i_1 / \dot{U}_2 i_2} = \sqrt{\dot{U}'_1 i'_1 / \dot{U}''_2 i''_2} \sqrt{\dot{U}''_1 i''_1 / \dot{U}''_2 i''_2} = \underline{H}'_c \underline{H}''_c,$$

или

$$e^{g_c} = e^{g'_c + g''_c}, \quad g_c = g'_c + g''_c.$$

Обобщив это свойство на случай соединения N четырехполюсников, получим характеристические параметры составного четырехполюсника:

$$\underline{g}_c = \sum_{k=1}^N \underline{g}_c^{(k)}, \quad a_c = \sum_{k=1}^N a_c^{(k)}, \quad b_c = \sum_{k=1}^N b_c^{(k)}, \quad \underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c1}^{(1)}, \quad \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{c2}^{(N)}. \quad (8.70)$$

Если цепочечно соединяются одинаковые четырехполюсники с характеристическими параметрами \underline{Z}_{c0} , $g_{c0} = a_{c0} + j b_{c0}$, то соотношения (8.70) упрощаются еще больше:

$$\underline{g}_c = N \underline{g}_{c0}, \quad a_c = N a_{c0}, \quad b_c = N b_{c0}, \quad \underline{Z}_c = \underline{Z}_{c0}. \quad (8.71)$$

По найденным столь просто характеристическим параметрам (8.70) или (8.71) определяют цепочечные матрицы (8.66) или

(8.67), по которым рассчитывают составной четырехполюсник и его рабочие параметры. Если он является симметричным (хотя соединяемые четырехполюсники могут быть несимметричными), то по формулам (8.69) определяют параметры соответствующих канонических схем, по которым опять-таки можно анализировать их свойства и производить необходимые расчеты. Описанная процедура расчета четырехполюсников называется *методом характеристических параметров*.

Возможно и непосредственное определение рабочей передаточной функции и рабочего затухания по характеристическим параметрам. Если a -параметры из матрицы (8.66) подставить в формулу (8.42), то после перехода от гиперболических к экспоненциальным функциям и несложных преобразований получим

$$H_p = e^{g_c} \frac{Z_{01} + Z_{c1}}{2\sqrt{Z_{01}Z_{c1}}} \frac{Z_{02} + Z_{c2}}{2\sqrt{Z_{02}Z_{c2}}} \left(1 - \frac{Z_{01} - Z_{c1}}{Z_{01} + Z_{c1}} \frac{Z_{02} - Z_{c2}}{Z_{02} + Z_{c2}} e^{-2g_c} \right).$$

Отсюда по определению (8.26) находим рабочее затухание:

$$a_p = a_c + a_{n1} + a_{n2} + \ln |1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2g_c}|, \quad (8.72)$$

где

$$a_{n1} = \ln 0,5 \left| \sqrt{Z_{01}/Z_{c1}} + \sqrt{Z_{c1}/Z_{01}} \right|,$$

$$a_{n2} = \ln 0,5 \left| \sqrt{Z_{02}/Z_{c2}} + \sqrt{Z_{c2}/Z_{02}} \right|$$

— *затухания несогласованности по характеристическим сопротивлениям на входе и выходе четырехполюсника, которые получили название по аналогии с затуханием несогласованности (8.30);*

$$\rho_1 = (Z_{01} - Z_{c1}) / (Z_{01} + Z_{c1}), \quad \rho_2 = (Z_{02} - Z_{c2}) / (Z_{02} + Z_{c2})$$

— *коэффициенты отражения на входе и выходе четырехполюсника, которые получили название по аналогии с коэффициентами отражения (7.49), (7.47) в длинной линии.*

Последнее слагаемое в формуле (8.72) называют *затуханием взаимодействия несогласованностей*, поскольку оно обращается в нуль при $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$. В целом выражение (8.72) показывает, не только на какую величину, но и по каким причинам рабочее затухание отличается от характеристического затухания. Это выражение составляет содержание *теоремы погрешности*, устанавливающей величину расхождения между рабочим и характеристическим затуханиями.

6. Групповое время прохождения. Для длинных линий было введено понятие групповой скорости (7.72), которое позволяет оценивать искажения сложных сигналов в режиме бегущих волн. Для четырехполюсников с сосредоточенными параметрами это понятие лишено физического смысла. Поэтому для оценки искажений сигнала введем понятие *группового времени его прохождения через произвольный четырехполюсник*.

Для длинной линии групповое время прохождения (ГВП) определяется через групповую скорость (7.72):

$$t_{rp} = \frac{l_0}{v_{rp}} = \frac{d\beta}{d\omega} l_0 = \frac{d(\beta l_0)}{d\omega}.$$

Здесь величина βl_0 является характеристической фазой линии (8.68). Поскольку же понятие характеристической фазы b_c приложимо к любому четырехполюснику, найденное определение ГВП может быть распространено также на любые двусторонне согласованные четырехполюсники при замене βl_0 на b_c . В случае несогласованных четырехполюсников понятие ГВП может быть обобщено путем его определения через рабочую фазу b_p или фазу θ четырехполюсника:

$$t_{c rp} = \frac{db_c}{d\omega}, \quad t_{p rp} = \frac{db_p}{d\omega}, \quad t_{rp} = \frac{d\theta}{d\omega}. \quad (8.73)$$

Из трех полученных определений ГВП (8.73) для длинных линий используют обычно первое, а для остальных четырехполюсников — третье. Второе определение (8.73) применяют часто для характеристики фильтров.

§ 8.4. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ МЕТОДОМ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Целью расчета четырехполюсников часто является определение одной из их передаточных функций (6.9). В случае сложных четырехполюсников это определение может оказаться очень громоздким. Решение таких задач упрощается при использовании метода сигнальных графов, предложенного американским ученым С. Мэзоном (1953).

1. Сигнальные графы. Как и топологические графы цепей, сигнальные графы состоят из вершин и ориентированных ребер, т. е. являются ориентированными графами. Однако в сигнальном графе эти понятия имеют другой смысл.

Вершине сигнального графа придается значение сигнала, т. е. некоторого напряжения \dot{U} или тока \dot{I} (рис. 8.19, а, б). Связь между этими величинами будем описывать обобщенными коэффициентами пропорциональности соответствующей размерности:

$$\dot{U} = z\dot{I}, \quad \dot{U}_2 = \mu\dot{U}_1, \quad \dot{I} = y\dot{U}, \quad \dot{I}_2 = \alpha\dot{I}_1. \quad (8.74)$$

Здесь могут использоваться также мгновенные значения u , i , операторные напряжения и токи и др.

Ориентированным ребрам сигнального графа приписывают направление передачи сигнала и значение указанных коэффициентов пропорциональности. Они называются передачей этих ребер. Таким образом, четыре связи (8.74) между сигналами отображаются сигнальными графами, показанными соответственно на рис. 8.19, в—е.

На сигнальные графы распространяются все основные понятия топологических графов — узел, ветвь, контур, петля, путь.

а) • \dot{U}

б) • \dot{I}

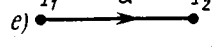
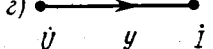
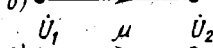
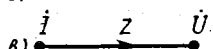


Рис. 8.19. Элементы сигнальных графов

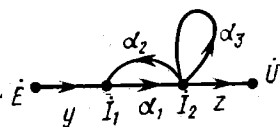


Рис. 8.20. Сигнальный граф с обходами

меняются местами. Такой граф и все его элементы называются *инвертированными*. Для инвертированного графа используют понятие *обратной передачи*

$$\underline{H} = 1/\underline{T}, \quad (8.75)$$

где передача графа \underline{T} имеет смысл одной из передаточных функций (6.9).

Если граф содержит несколько истоков, то его передача должна определяться для каждого истока в отдельности. При этом искомым результат — величину стока — находят по принципу суперпозиции.

Путь, соединяющий исток со стоком, называется прямым путем. Путь противоположного направления, который соединяет узлы, лежащие на прямом пути, будем называть обходом. В частности, петля всегда является обходом. Например, на рис. 8.20 вершина \dot{E} является истоком, вершина \dot{U} — стоком, совокупность ребер (ветвей) y, α_1, z — прямым путем, ребро (ветвь) α_2 и петля α_3 — обходами.

2. Построение графов. Существует два основных способа построения сигнальных графов цепи — по системе уравнений, описывающих процессы в цепи, и непосредственно по ее схеме (в том числе функциональной). По первому способу составляют сначала подходящую систему уравнений методом токов ветвей, контурных токов, узловых напряжений и др. Такой системой могут являться и основные уравнения четырехполюсника.

Выбрав, например, систему основных уравнений (8.13), строим сигнальный граф. Для этого произвольно располагаем на чертеже четыре вершины $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$ и соединяем их реб-

В отличие от топологических графов ориентированный путь сигнального графа можно проходить только в направлении ориентации ребер и ветвей. Соответственно ветви, контуры, петли и пути сигнального графа могут состоять только из ребер одинаковой ориентации. Вершину, отображающую задающее напряжение \dot{E} или задающий ток \dot{I} , называют *исток*. Все ветви, инцидентные истоку, вытекают из него, т. е. направлены в сторону других узлов. Вершину, отображающую выходное напряжение \dot{U} или выходной ток \dot{I} , называют *сток*. Все ветви, инцидентные стоку, втекают в него, т. е. направлены в его сторону. Передаточная функция цепи (6.9) определяет связь между стоком и истоком и называется *передачей графа*.

Возможно построение или преобразование графа, при котором сток и исток

рами (рис. 8.21, а). Ребра ориентируются в направлении переменных \dot{U}_1, \dot{I}_1 , стоящих в левых частях уравнений (8.13), а передачи ребер определяются коэффициентами этих уравнений: $\mu = a_{11}, z = a_{12}, y = a_{21}, \alpha = a_{22}$.

Если рассматриваемый четырехполюсник входит в состав более сложной схемы, то к полученному графу пристраивают вершины и ребра, отображающие и другие части схемы. Так в простейшем случае четырехполюсника, включенного между источником и нагрузкой (см. рис. 8.10, а), используем еще два уравнения, составленных по второму закону Кирхгофа и закону Ома: $\dot{E} = \underline{Z}_{01}\dot{I}_1 + \dot{U}_1, \dot{U}_2 = \underline{Z}_{02}\dot{I}_2$. Добавив вершину \dot{E} и ребра $\underline{Z}_{01}, \underline{I}, \underline{Z}_{02}$, из предыдущего графа рис. 8.21, а получим новый

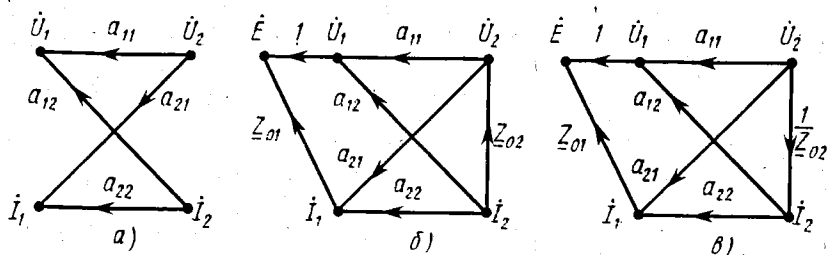


Рис. 8.21. Сигнальные графы четырехполюсника

граф (рис. 8.21, б). В нем вершина \dot{E} является инвертированным стоком, а вершина \dot{I}_2 — инвертированным истоком, т. е. этот граф уже по построению является инвертированным. Если закон Ома использовать в другой форме ($\dot{I}_2 = \dot{U}_2/\underline{Z}_{02}$), то в полученном графе инвертированным истоком станет вершина \dot{U}_2 (рис. 8.21, в).

При построении графа по произвольной системе уравнений ее надо предварительно нормализовать. Здесь под нормализацией понимают разрешение всех n уравнений относительно n разных переменных, т. е. такое преобразование этих уравнений, при котором в левой части каждого из них остается одна из n переменных. Например, для контурных токов в Т-образном мостовом четырехполюснике (рис. 8.22) получается следующая система уравнений:

$$\underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{13}\dot{I}_3 = \dot{E},$$

$$\underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{23}\dot{I}_3 = 0,$$

$$\underline{Z}_{31}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{32}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{33}\dot{I}_3 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, & \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \\ &+ \underline{Z}_4, & \underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{02}, & \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = \\ &= -\underline{Z}_1, & \underline{Z}_{13} &= \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_2, & \underline{Z}_{23} &= \\ &= \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_3. \end{aligned}$$

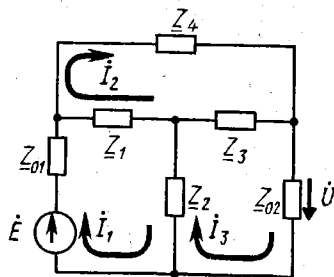


Рис. 8.22. Схема цепи, иллюстрирующая метод сигнальных графов

При этом требуется определить по закону Ома выходное напряжение $\dot{U} = Z_{02}I_3$, снимаемое с нагрузочного сопротивления Z_{02} , через которое проходит один контурный ток I_3 .

Для построения сигнального графа нормализуем уравнения, разрешая каждое из них относительно разных переменных I_1, I_2, I_3 , и добавим к ним искомую переменную \dot{U} :

$$I_1 = y\dot{E} + \alpha_1 I_2 + \alpha_2 I_3, \quad I_2 = \alpha_3 I_1 + \alpha_4 I_3, \\ I_3 = \alpha_5 I_1 + \alpha_6 I_2, \quad \dot{U} = z I_3,$$

где $y = 1/Z_{11}$, $\alpha_1 = -Z_{12}/Z_{11}$, $\alpha_2 = -Z_{13}/Z_{11}$, $\alpha_3 = -Z_{21}/Z_{22}$, $\alpha_4 = -Z_{23}/Z_{22}$, $\alpha_5 = -Z_{31}/Z_{33}$, $\alpha_6 = -Z_{32}/Z_{33}$, $z = Z_{02}$.

Теперь произвольно расположим на чертеже исток \dot{E} , сток \dot{U} и узлы I_1, I_2, I_3 (рис. 8.23, а). Затем соединим вершины (узлы) I_1 и \dot{E} , I_2, I_3 ориентированными ребрами (ветвями) с передачами, соответствующими первому уравнению (рис. 8.23, б). Повторим эту операцию для второго уравнения, наращивая граф, как показано на рис. 8.23, в. Снова будем наращивать граф согласно третьему уравнению (рис. 8.23, г). В общем случае наращивание графа повторяется в соответствии с количеством уравнений. В данном примере построение графа заканчивается на четвертом уравнении (рис. 8.23, д). Полученный сигнальный граф имеет исток \dot{E} , сток \dot{U} , два прямых пути (y, α_3, α_6, z и y, α_5, z) и три обхода ($\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2$).

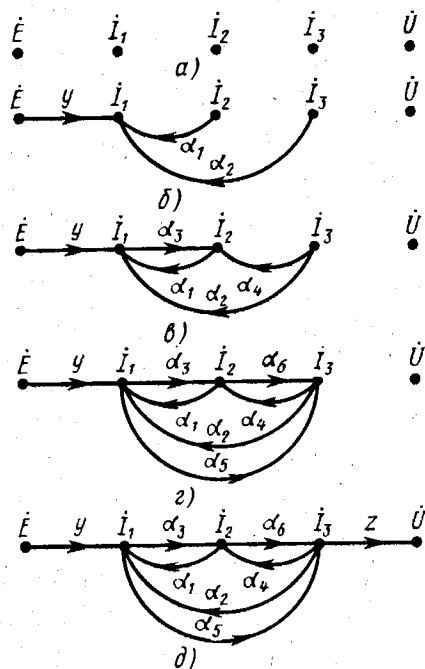


Рис. 8.23. Построение сигнального графа по уравнениям цепи

Вторым способом граф строят непосредственно по схеме цепи с использованием соотношений, связывающих относительно разные переменные величины, как в равенствах (8.74). Такими соотношениями могут являться закон Ома, формула для делителя напряжения или тока, связь напряжений через коэффициент трансформации и т. д.

Попарную связь между некоторыми двумя величинами находят, исключая все остальные переменные, т. е. принимают их равными нулю. Тем самым используется разновидность принципа суперпозиции.

Рассмотрим для примера прежнюю цепь (см. рис. 8.22), в которой имеется восемь парных связей.

Связь $\dot{E} \rightarrow I_1$ определяется законом Ома при $I_2 = I_3 = 0$: $I_1 = \dot{E}/(Z_{01} + Z_1 + Z_2)$, или $I_1 =$

$= y\dot{E}$, где $y = 1/(\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ (рис. 8.24, а).

Связь $I_2 \rightarrow I_1$ определяют последовательно по рис. 8.24, б. Сначала находят падение напряжения \dot{U}_1 на сопротивлении \underline{Z}_1 при прохождении тока I_2 : $\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 I_2$. Это напряжение принимают равным противоположно направленной э. д. с. (см. рис. 2.10, а), как бы возбуждаемой в контуре током I_2 : $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$. Наконец, с учетом направления э. д. с. определяют по закону Ома ток $I_1 = \dot{E}_1 / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = \alpha_1 I_2$, где $\alpha_1 = \underline{Z}_1 / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$.

Аналогично определяют остальные связи.

Связь $I_3 \rightarrow I_1$ (рис. 8.24, в): $\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 I_3$, $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$, $I_1 = \dot{E}_2 / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = \alpha_2 I_3$, где $\alpha_2 = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$.

Связь $I_1 \rightarrow I_2$ (рис. 8.24, з): $\dot{U}_3 = \underline{Z}_1 I_1$, $\dot{E}_3 = \dot{U}_3$, $I_2 = \dot{E}_3 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) = \alpha_3 I_1$, где $\alpha_3 = \underline{Z}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$.

Связь $I_3 \rightarrow I_2$ (рис. 8.24, д): $\dot{U}_4 = \underline{Z}_3 I_3$, $\dot{E}_4 = \dot{U}_4$, $I_2 = \dot{E}_4 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) = \alpha_4 I_3$, где $\alpha_4 = \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$.

Связь $I_1 \rightarrow I_3$ (рис. 8.24, е): $\dot{U}_5 = \underline{Z}_2 I_1$, $\dot{E}_5 = \dot{U}_5$, $I_3 = \dot{E}_5 / (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \alpha_5 I_1$, где $\alpha_5 = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$.

Связь $I_2 \rightarrow I_3$ (рис. 8.24, ж): $\dot{U}_6 = \underline{Z}_3 I_2$, $\dot{E}_6 = \dot{U}_6$, $I_3 = \dot{E}_6 / (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \alpha_6 I_2$, где $\alpha_6 = \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$.

Связь $I_3 \rightarrow \dot{U}$ (рис. 8.24, з): $\dot{U} = \underline{Z}_{02} I_3 = z I_3$, где $z = \underline{Z}_{02}$.

Объединив подграфы, построенные по парным связям (рис. 8.24, а—з), получим прежний сигнальный граф цепи (рис. 8.24, д) с теми же передачами ребер.

Из рассмотренного примера видно, что при построении графа для контурных токов их соотношение в смежных контурах определяется отношением сопротивления связи к собственному сопротивлению контура:

$$\alpha_{kl} = I_k / I_l = \underline{Z}_{kl} / \underline{Z}_{kk}. \quad (8.76)$$

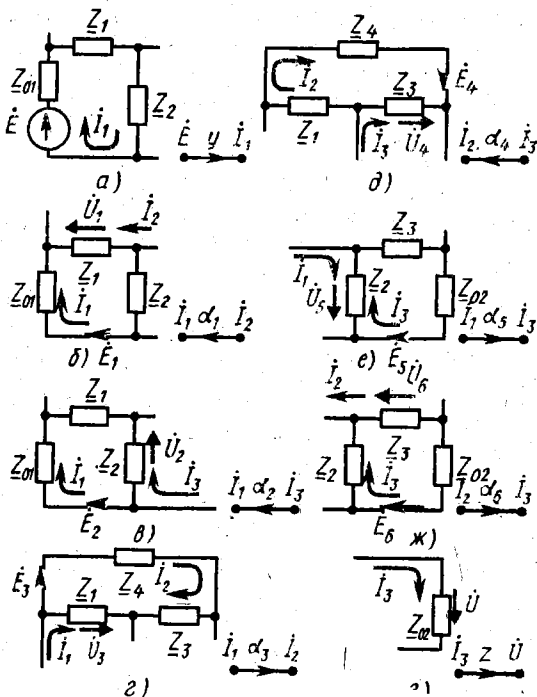


Рис. 8.24. Построение сигнального графа по схеме цепи

Аналогично определяют связи между узлами при построении сигнального графа для узловых напряжений:

$$\mu_{kl} = \dot{U}_k / \dot{U}_l = \underline{Y}_{kl} / \underline{Y}_{kk}, \quad (8.77)$$

где \underline{Y}_{kl} — взаимная проводимость k -го и l -го узлов цепи; \underline{Y}_{kk} — собственная проводимость k -го узла цепи.

Определение передач ветвей сигнального графа по формулам (8.76), (8.77) существенно упрощает его построение.

3. Преобразование графов. Сигнальные графы могут подвергаться тем же преобразованиям, что и топологические графы. Однако некоторые преобразования являются специфическими для сигнальных графов. При любых их преобразованиях следует определять передачи вновь образовавшихся ветвей. Это делается для определения передачи графа, что является конечной целью расчета (анализа) цепи с помощью сигнальных графов. Рассмотрим основные виды преобразований.

Сжатие графа. При сжатии сигнального графа удаляют устранимые вершины, например вершину i_2 на рис. 8.25, а. Так как $i_2 = \alpha_1 i_1$ и $i_3 = \alpha_2 i_2$, то $i_3 = \alpha i_1$, где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ (рис. 8.25, б).

Таким образом, при сжатии сигнального графа передачи последовательно соединенных ребер перемножаются.

Объединение параллельных ветвей. В сигнальном графе параллельными называют только одинаково ориентированные ветви, которые соединяют два узла. Например,

на рис. 8.26, а ветви α_1 , α_3 образуют контур и не могут быть объединены, а параллельными являются только ветви α_1 , α_2 .

Их объединение дает одну ветвь с передачей $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, поскольку $i_2 = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) i_1 = \alpha i_1$ (рис. 8.26, б).

Таким образом, при объединении параллельных ветвей их передачи складываются.

Объединение петель. Если петли инцидентны одному узлу (рис. 8.27, а), то их можно объединить по правилу объединения параллельных ветвей. Действительно, для исходного графа $i = \alpha_1 i + \alpha_2 i$, или $i = \alpha_1 i + \alpha_2 i$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, что дает преобразованный граф (рис. 8.27, б).

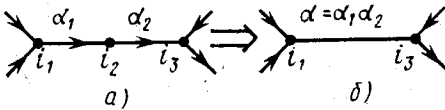


Рис. 8.25. Сжатие сигнального графа

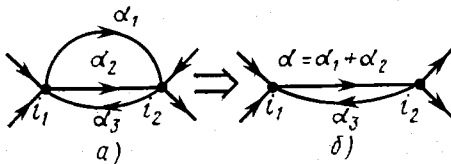


Рис. 8.26. Объединение параллельных ветвей

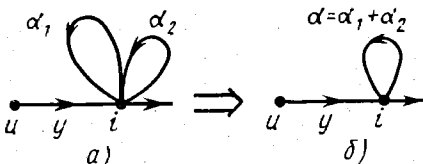


Рис. 8.27. Объединение петель

Устранение петли. Это преобразование осуществляют в два этапа. Сначала при устранении петли α в некотором узле i (рис. 8.28, а) от него отщепляют дополнительный узел i' (рис. 8.28, б). При этом все ветви, втекавшие в узел i , должны втекать в дополнительный узел i' , а остальные ветви должны по-прежнему вытекать из узла i . Затем дополнительный узел i' соединяют с узлом i ветвью, имеющей передачу $\alpha' = 1/(1-\alpha)$ (рис. 8.28, в). Действительно, для исходного графа $i = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \alpha i$. Отсюда $i = u_1 y_1 / (1-\alpha) + u_2 y_2 / (1-\alpha)$. Для преобразованного графа $i' = y_1 u_1 + y_2 u_2$ и $i = \alpha' i' = u_1 y_1 / (1-\alpha) + u_2 y_2 / (1-\alpha)$.

Таким образом, при устранении петли связь между переменными величинами не изменяется, что свидетельствует о правомерности данного преобразования.

Устранение узла. Это преобразование осуществляют также в два этапа. Сначала устраняемый узел i_1 (рис. 8.29, а)

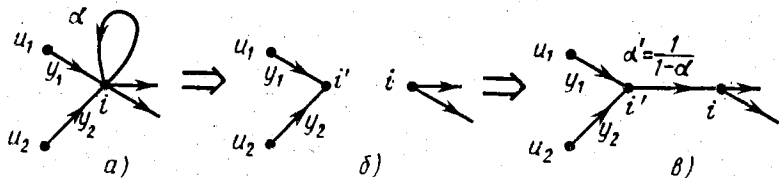


Рис. 8.28. Устранение петли

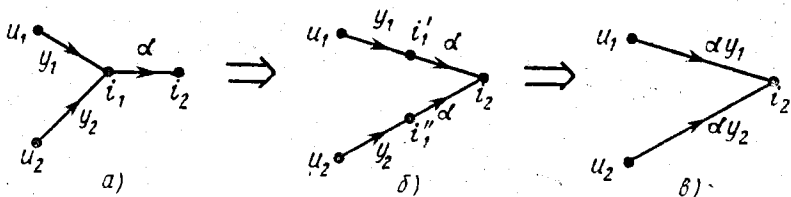


Рис. 8.29. Устранение узла

расщепляют на два вспомогательных узла i_1' и i_1'' (рис. 8.29, б). Затем производят сжатие графа (рис. 8.29, в). Действительно, в исходном графе $i_1 = y_1 u_1 + y_2 u_2$ и $i_2 = \alpha i_1 = \alpha y_1 u_1 + \alpha y_2 u_2$. Последнее равенство справедливо и для преобразованного графа (рис. 8.29, в), что подтверждает правомерность рассмотренного преобразования.

Это преобразование упрощается при исключении промежуточного этапа расщепления устраняемого узла. Тогда, устраняя узел i , надо сохранить два проходящих через него пути. Передачу же этих двух путей следует определять, перемножая передачу входящих в них ветвей.

Это упрощенное правило сохраняется при произвольном количестве путей, проходящих через устраняемый узел. Например, устраняя узел i_2 в графе рис. 8.23, д, сохраняем проходящие через него четыре пути $\alpha_3 \alpha_6$, $\alpha_4 \alpha_1$, $\alpha_3 \alpha_1$, $\alpha_4 \alpha_6$ (рис. 8.30, а).

Объединяя при этом параллельные ветви, получаем упрощенный граф (рис. 8.30, б), где приняты следующие обозначения: $\alpha = \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5$, $\alpha_0 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2$, $\alpha' = \alpha_1\alpha_3$, $\alpha'' = \alpha_4\alpha_6$.

Следует отметить, что при удалении узла i , лежащего на контуре (рис. 8.31, а), образуется петля (рис. 8.31, б).

Удаление узла с петлей. Это преобразование осуществляют в три этапа по известным правилам, как показано

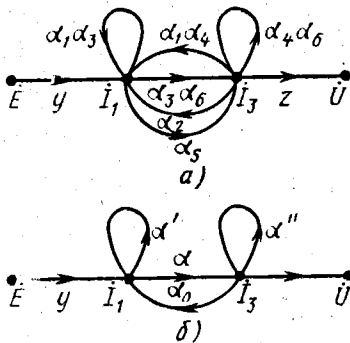


Рис. 8.30. Преобразование сигнального графа трехконтурной цепи рис. 8.23, д

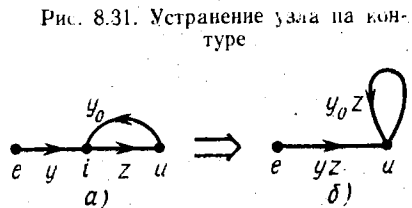


Рис. 8.31. Удаление узла на контуре

на рис. 8.32. Сначала в исходном графе (рис. 8.32, а) удаляют петлю (рис. 8.32, б). При этом появляется дополнительный узел i' , который удаляется на втором этапе преобразования (рис. 8.32, в). Наконец, удаляется заданный узел i (рис. 8.32, г).

Инверсия ветви. Инверсией ветви, являющейся частью прямого пути (рис. 8.33, а), называют изменение ее ориентации

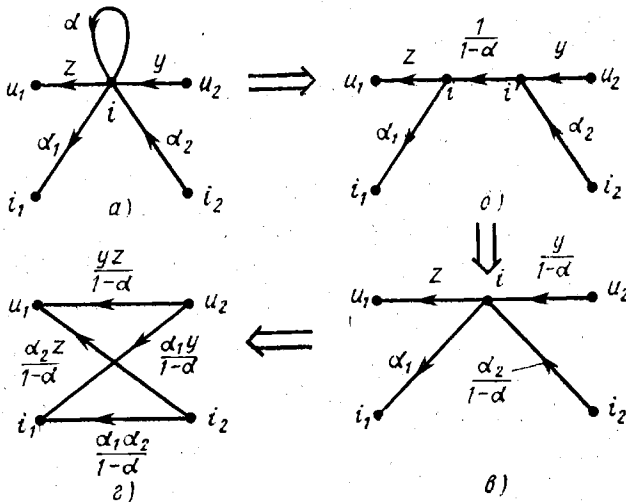


Рис. 8.32. Удаление узла с петлей

(рис. 8.33, б). Поскольку $i_2 = \alpha i_1$ и $i_1 = i_2/\alpha$, при инверсии ветви ее передача изменяется на обратную: $i_1 = \alpha_n i_2$, где $\alpha_n = 1/\alpha$.

Инверсия обхода. Инверсия обхода должна производиться одновременно с инверсией прямого пути. Правила этой инверсии должны быть такими, чтобы не нарушалось значение связи истока со стоком.

Для установления указанных правил рассмотрим простейший граф с обходом (рис. 8.34, а). Для него $i = ye + y_0 u$ и $u = zi = yze + y_0 z u$. Отсюда $u = yze/(1 - y_0 z)$, $T = u/e = yz/(1 - y_0 z)$ и $H = 1/T = 1/yz - y_0/y$. Таким образом, обратная передача равна здесь сумме двух слагаемых.

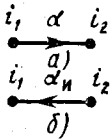


Рис. 8.33. Инверсия ветви

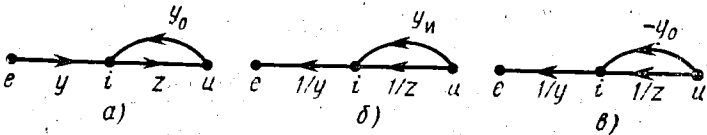


Рис. 8.34. Инверсия обхода

В инвертированном графе (рис. 8.34, б) подобную сумму можно получить, сложив передачи двух путей, соединяющих инвертированный исток u с инвертированным стоком e . При этом передача каждого из инвертированных путей должна определяться перемножением передач входящих в него ветвей: $e = (1/z)(1/y)u + y_n(1/y)u$, откуда $H = e/u = 1/zy + y_n/y$.

Сопоставляя обратные передачи инвертированного и исходного графов, находим, что $y_n = -y_0$. Таким образом, инверсия обхода заключается в изменении знака его передачи (рис. 8.34, в). При этом действует дополнительное правило сложения передач: передачи всех возможных путей от инвертированного истока к инвертированному стоку складываются, причем каждая из этих передач определяется путем перемножения передач всех ветвей рассматриваемого пути.

Инверсия смежных обходов. Предыдущее правило инверсии обхода должно быть уточнено для случая смежных обходов, когда на отрезке прямого пути следуют два обхода подряд (рис. 8.35, а). Для этого графа $u_1 = \mu e + z_0 i$, $i = y u_1 + y_0 u_2 = y \mu e + y z_0 i + y_0 u_2$, или $i = (y \mu e + y_0 u_2)/(1 - y z_0)$. Отсюда $u_2 = z i = z(y \mu e + y_0 u_2)/(1 - y z_0)$, или $u_2 = y z \mu e/(1 - y z_0 - y_0 z)$, $H = e/u_2 = 1/y z \mu - z_0/z \mu - y_0/y \mu$.

Инвертируем исходный граф (рис. 8.35, а), применив прежние правила инверсии прямого пути и обходов (рис. 8.35, б). Воспользуемся правилом сложения передач всех возможных путей от инвертированного истока u_2 к инвертированному стоку e . Таких путей имеется четыре. Поэтому при прежнем правиле обратная передача инвертированного графа содержит четыре слагаемых: $H = e/u_2 = 1/y z \mu - y_0/y \mu - z_0/z \mu + y_0 z_0/\mu$. Здесь четвертое слагаемое является лишним, как видно из сравнения

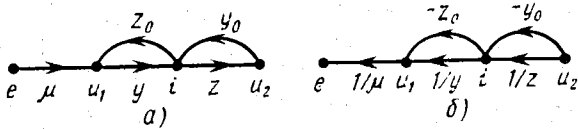


Рис. 8.35. Инверсия смежных обходов

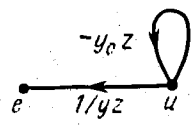


Рис. 8.36. Инверсия петли

с найденной выше обратной передачей исходного графа, содержащей три слагаемых.

Указанное четвертое слагаемое y_0z_0/μ является передачей пути, проходящего подряд через два обхода. Поэтому следует ввести дополнительное правило: *если инвертированный граф имеет смежные обходы, то из всех возможных путей, соединяющих инвертированный исток с инвертированным стоком, пути, содержащие два обхода подряд, являются запретными.*

Инверсия петли. Если петлю принять за обход, как это оговаривалось ранее, то инверсия, например, петли в последнем графе рис. 8.31, б приведет к инвертированному графу, показанному на рис. 8.36. Для него обратная передача $H = e/u = 1/yz - y_0z/yz = 1/yz - y_0/y$. Как было показано, к такому же результату приводит и непосредственная инверсия исходного графа (см. рис. 8.31, а и 8.34, а).

Тем самым доказано, что петля является обходом, поскольку для нее справедливы правила инверсии обхода. Соответственно на петлю распространяется и правило запретных инвертированных путей.

4. Передача графа. Для определения передачи графа его следует преобразовать таким образом, чтобы преобразованный граф содержал только один прямой путь. Это всегда можно сделать, устранив в графе подходящие узлы. Примером может слу-

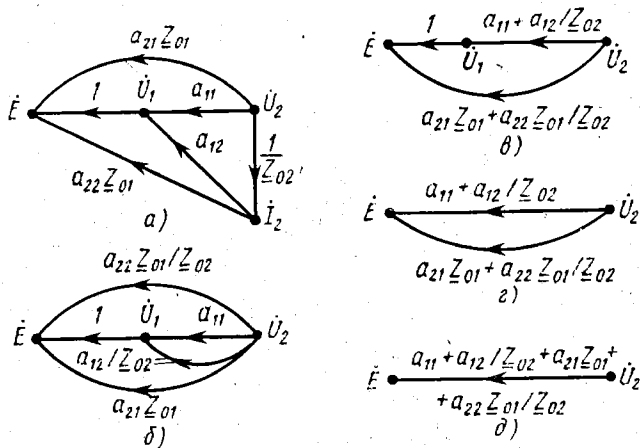


Рис. 8.37. Преобразования инвертированного графа

жить однопутный граф рис. 8.30. Для наглядности преобразуем также инвертированный граф рис. 8.21, в. Исключив в нем узел I_1 , получим граф, показанный на рис. 8.37, а. После исключения узла I_2 приходим к графу, изображенному на рис. 8.37, б. Объединив здесь параллельные ветви, получим упрощенный граф (рис. 8.37, в). После сжатия (рис. 8.37, г) и объединения параллельных ветвей (рис. 8.37, д) получаем граф в виде одного инвертированного прямого пути. Для него непосредственно находим обратную передачу $\underline{H} = \dot{E}/\dot{U}_2 = (a_{11}Z_{02} + a_{12} + a_{21}Z_{01}Z_{02} + a_{22}Z_{01})/Z_{02}$, которая соответствует коэффициенту передачи четырехполюсника $\underline{T} = \underline{K} = 1/\underline{H}$, определяемому формулой (8.41).

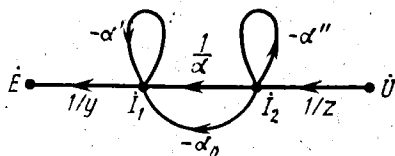


Рис. 8.38. Инверсия графа, изображенного на рис. 8.30, б

Если преобразованный граф с одним прямым путем является неинвертированным, то необходимо произвести его инверсию по описанным правилам. Затем для полученного инвертированного графа определяют обратную передачу (8.75) в соответствии с правилом сложения передач всех разрешенных путей от инвертированного истока к инвертированному стоку.

Рассмотрим для примера преобразованный граф Т-образного моста (см. рис. 8.30, б). Его инверсия приводит к графу, показанному на рис. 8.38. В этом графе из восьми возможных инвертированных путей запретными являются три пути, содержащие по два обхода подряд: петля $(-\alpha'')$ — обход $(-\alpha_0)$, обход $(-\alpha_0)$ — петля $(-\alpha')$, петля $(-\alpha'')$ — обход $(-\alpha_0)$ — петля $(-\alpha')$. Складывая передачи пяти остальных (разрешенных) путей, находим искомую обратную передачу $\underline{H} = \dot{E}/\dot{U} = (1/\alpha - \alpha''/\alpha - \alpha'/\alpha - \alpha_0 + \alpha'\alpha''/\alpha)/yz$.

§ 8.5. НЕОБРАТИМЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Как отмечалось, линейные пассивные четырехполюсники являются обратимыми. К необратимым линейным четырехполюсникам, которые не удовлетворяют условию обратимости (3.201), относятся, в частности, активные четырехполюсники, содержащие источники напряжения и тока. В случае независимых источников расчет таких четырехполюсников сводится к расчету пассивных цепей на основе принципа суперпозиции. В случае же зависимых источников напряжения и тока получаются необратимые линейные четырехполюсники со специфическими свойствами. К таким четырехполюсникам относятся усилительные каскады, работающие в линейном режиме, и идеальные активные преобразователи (ИАП). При их рассмотрении используются аббревиатуры, введенные в § 2.2.3—2.2.5.

1. Матрицы ИАП. При расчете составных четырехполюсников по основным параметрам надо знать матрицы каждого четырехполюсника, входящего в состав цепи. Поэтому для расчета необратимых четырехполюсников, содержащих ИАП, требуется знание матриц этих преобразователей. Матрицы ИАП находят непосредственно из основных уравнений, связывающих входные и выходные напряжения и токи преобразователя.

При использовании символического метода основные уравнения ИНУН (см. рис. 2.12, а) имеют вид $\dot{U}_2 = \mu \dot{U}_1$, или $U_1 = \dot{U}_2 / \mu$, $I_1 = 0$. Отсюда определяется цепочечная матрица ИНУН (8.9):

$$(a) = \begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, что свидетельствует о необратимости четырехполюсника. Из уравнений связи (см. табл. П.15) видно, что для такого четырехполюсника существует еще одна матрица:

$$(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются матрицы и для других ИАП. По существующим матрицам, учитывая правила действий с ними (см. табл. П.17), можно судить, какими способами допустимо соединять ИАП с другими четырехполюсниками. Например, ИНУН можно соединить с другими четырехполюсниками только цепочно и параллельно-последовательно.

Матрицы и основные параметры ИАП приведены в табл. П.20, в которую включены также сведения об инвертирующем операционном усилителе (ИОУ). Указанные параметры получены на основании соотношений (3.165) — (3.174). Для составных четырехполюсников возможно определение матриц описанным выше способом. Например, матрица ИОУ определяется через матрицу четырехполюсника с сопротивлением Z_1 в продольном плече (см. табл. П.18) и матрицу ИНУТ, имеющего в цепи обратной связи сопротивление Z_2 (см. табл. П.20):

$$(a) = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/Z_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_1/Z_2 & 0 \\ -1/Z_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Канонические схемы. Необратимые четырехполюсники имеют четыре независимых параметра, поэтому их канонические схемы должны содержать четыре независимых элемента. Их можно получить, соединяя соответствующим образом обратимую каноническую схему (см. рис. 8.4) и необратимый преобразователь мощности (см. рис. 2.12). Три элемента первой схемы и один элемент второй схемы обеспечивают получение четырех искомым независимых параметров.

Например, возможно параллельно-последовательное соединение ИНУН (см. рис. 2.12, а) и Т-образной канонической схемы (см. рис. 8.4, а). При этом получается каноническая схема, показанная на рис. 8.39. Она перечерчена в упрощенном виде на рис. 8.40, а. Аналогично последовательное соединение ИНУТ и обратимой Т-образной схемы дает вторую каноническую схему необратимого четырехполюсника, показанную на рис. 8.40, б. В этих канонических схемах источники напряжения могут быть преобразованы в источники тока (см. § 3.7.1). При этом получают еще две канонические схемы, показанные на рис. 8.40, в, г.

Матрицы канонических схем определяются при сложении соответствующих матриц соединяемых четырехполюсников. Например, для схемы рис. 8.40, б суммируются z -матрицы (см. табл. П.17, П.18, П.20):

$$(z) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 + z_0 & -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, как и для пассивных схем, через заданные матричные коэффициенты определяются параметры канонической схемы:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= -z_{12}, \quad \underline{Z}_1 = z_{11} - \underline{Z}_2 = z_{11} + z_{12}, \\ \underline{Z}_3 &= -z_{22} - \underline{Z}_2 = z_{12} - z_{22}, \\ z_0 &= z_{21} - \underline{Z}_2 = z_{12} + z_{21}. \end{aligned}$$

По уравнениям связи (см. табл. П.15) полученные параметры могут быть выражены и через другие системы матричных коэффициентов.

Подобным же образом могут быть получены П-образные канонические схемы необратимых четырехполюсников (рис. 8.41). При этом определяются и их параметры. Возможно также анало-

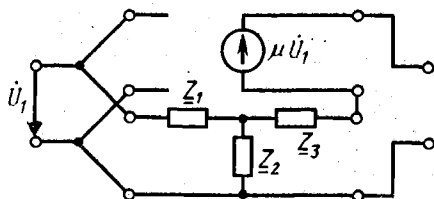


Рис. 8.39. Параллельно-последовательное соединение ИНУН и Т-образной канонической схемы

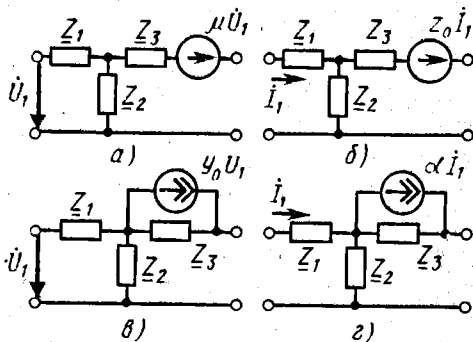


Рис. 8.40. Т-образные канонические схемы необратимых четырехполюсников

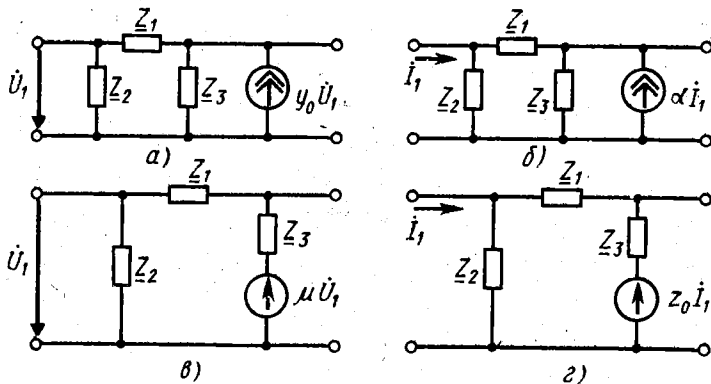


Рис. 8.41. П-образные канонические схемы необратимых четырехполюсников

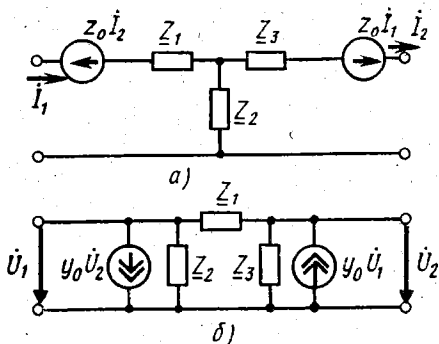


Рис. 8.42. Гираторные канонические схемы необратимых четырехполюсников

соответствующем выборе их параметров являются, в частности, эквивалентными схемами усилительной лампы и транзистора при линейном режиме работы этих электронных приборов. Условное обозначение электронной лампы показано на рис. 8.43, а, где a — анод, k — катод, c — управляющая сетка. В ее эквивалентной схеме должен быть использован ИТУН (см. рис. 2.12, в), поскольку входное напряжение u_c управляет анодным током i_a усилительной лампы. Это управление характеризует коэффициент $S = \frac{di_a}{di_c}$, называемый крутизной характеристики анодного тока

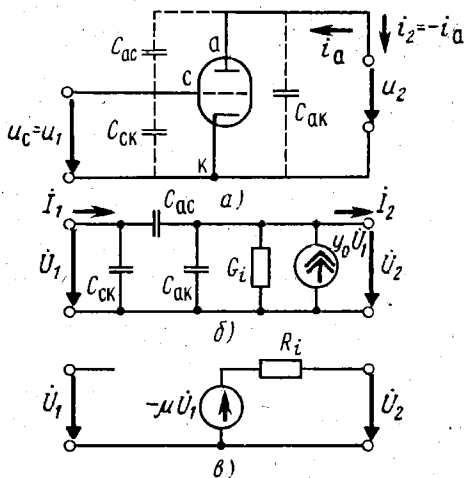


Рис. 8.43. Условное обозначение электронной лампы с междуэлектродными емкостями и ее эквивалентные схемы

гичное построение канонических схем с гиратором (см. рис. 2.14, в, г). Две из них показаны на рис. 8.42.

В табл. П.21 приведены полученные описанным способом параметры всех канонических схем необратимых четырехполюсников. Формулы этой таблицы могут быть использованы и для обратимых четырехполюсников.

3. Эквивалентные схемы усилительных приборов. Канонические схемы необратимых четырехполюсников при

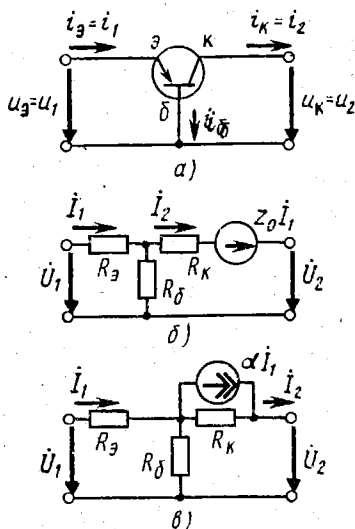


Рис. 8.44. Условное обозначение транзистора и его эквивалентные схемы

$i_a(u_c)|_{u_a=\text{const}}$. Кроме того, работа лампы характеризуется ее внутренним сопротивлением $R_i = 1/G_i$, т. е. динамическим сопротивлением $\frac{\partial u_a}{\partial i_a}$, которое оказывает лампа протекающему анодному току.

Параллельно проводимости G_i подключена скорость $C_{ак}$ между анодом и катодом. Все три междуэлектродные емкости лампы соединены треугольником, т. е. образуют П-образную схему. Таким образом, усилительной лампе соответствует схема замещения (эквивалентная схема), показанная на рис. 8.43, б. Она тождественна канонической схеме рис. 8.41, а. В этой эквивалентной схеме $y_0 = -S$, поскольку I_2 и I_a имеют разные знаки. В ней можно пренебречь влиянием емкостей на работу лампы и преобразовать источник тока в источник напряжения. Тогда получается упрощенная эквивалентная схема (рис. 8.43, в), в которой $\mu = R_i S$ — коэффициент усиления лампы. Отсюда находим цепочную матрицу усилительной лампы:

$$(a) = \begin{pmatrix} -1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\mu & -R_i/\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом уравнений связи (см. табл. П.15) отсюда получаем все существующие матрицы электронной лампы:

$$(a) = \begin{pmatrix} -1/\mu & -1/S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu & -R_i \end{pmatrix}, (y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -S & -G_i \end{pmatrix}.$$

Условное обозначение транзистора показано на рис. 8.44, а, где к — коллектор, э — эмиттер, б — база. Коллекторный ток i_k управляется током эмиттера i_b , что характеризуется коэффициентом усиления по току $\alpha = \frac{\partial i_k}{\partial i_b}$. Проходящим в транзисторе токам i_b , i_k , $i_б$ оказываются соответственно следующие сопротивления: сопротивление эмиттерного перехода $R_э$, сопротивление коллекторного перехода R_k и сопротивление базы $R_б$. По конфигурации схемы транзистора видно, что указанные сопротивления образуют Т-образный четырехполюсник, как показано на рис. 8.44, б. Для учета усилительных свойств транзистора в этом четырехполюснике включен зависимый источник напряжения $\dot{E}_1 = z_0 \dot{I}_1$, управляемый входным током \dot{I}_1 . Полученный четырехполюсник представляет собой схему замещения (эквивалентную схему) транзистора и является необратимой канонической схемой (см. рис. 8.40, б).

В эквивалентной схеме рис. 8.44, б токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 являются токами входного и выходного контуров. Составим для них уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_3 \dot{I}_1 + R_б(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - \dot{U}_1 = 0, R_б(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + R_k \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \dot{E}_1 = z_0 \dot{I}_1.$$

Отсюда находим

$$\dot{U}_1 = (R_б + R_3) \dot{I}_1 - R_б \dot{I}_2, \dot{U}_2 = (R_б + z_0) \dot{I}_1 - (R_б + R_k) \dot{I}_2.$$

Таким образом определяется матрица сопротивлений транзистора:

$$(z) = \begin{pmatrix} R_0 + R_s & -R_0 \\ R_0 + z_0 & -(R_0 + R_k) \end{pmatrix}.$$

Отсюда по уравнениям связи (см. табл. П.15) можно найти остальные матрицы транзистора, а по табл. П.21 определить параметры других необратимых канонических схем, эквивалентных транзистору. Для всех этих эквивалентных схем надо знать значение параметра z_0 . Для его определения переписем уравнение для U_2 , перейдя к мгновенным значениям напряжения и токов:

$$(R_0 + z_0)i_1 - (R_0 + R_k)i_2 = u_2.$$

Дифференцируя это равенство по i_1 при $u_2 = \text{const}$, получаем

$$z_0 = \alpha(R_0 + R_k) - R_0 \approx \alpha R_k,$$

где $\alpha = \frac{\partial i_k}{\partial i_s} = \frac{\partial i_2}{\partial i_1}$ — коэффициент усиления по току, а приближенное равенство написано для реальных транзисторов, в которых $R_0 \ll R_k$. Полученному равенству соответствует переход от исходной схемы (рис. 8.44, б) к другой эквивалентной схеме транзистора, показанной на рис. 8.44, в (ср. с рис. 8.40, з). В этой новой схеме можно использовать как точное значение коэффициента усиления $\alpha = (z_0 + R_0)/(R_k + R_0)$, так и его приближенное значение $\alpha \approx z_0/R_k$.

4. Четырехполюсники с обратной связью. В §3.5.1 отмечалось, что в ОУ применяется отрицательная обратная связь. Она возможна в любых усилителях, являющихся необратимыми четырехполюсниками, в которых сигнал проходит только в одном направлении — от входа к выходу. В однонаправленных четырехполюсниках возможна не только отрицательная, но и положительная обратная связь, за счет которой коэффициент усиления четырехполюсника не уменьшается, а возрастает.

Обратная связь возможна по напряжению, как в ИНУН (см. рис. 3.44, а), где напряжение обратной связи пропорционально выходному напряжению, а также по току, как в ИТУН (см. рис. 3.44, в), где напряжение обратной связи пропорционально выходному току. Применяется и комбинированная обратная связь по напряжению и по току.

Рассмотрим некоторые общие свойства четырехполюсников на примере усилителя с обратной связью по напряжению. Общая схема такого усилителя показана на рис. 8.45, а, где

$$K = \dot{U}_2 / \dot{U}'_1, \quad \beta = \dot{U}_0 / \dot{U}_2 \quad (8.78)$$

— соответственно коэффициент передачи четырехполюсника без обратной связи и коэффициент обратной связи. При комплексной величине β обратная связь также называется комплексной.

Для входного контура рассматриваемой схемы $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 -$

— \dot{U}_0 . Разделив это равенство на \dot{U}_2 , с учетом определений (8.78) получим коэффициент передачи четырехполюсника с обратной связью:

$$\begin{aligned} K_0 &= \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \\ &= \underline{K} / (1 - \underline{\beta} \underline{K}) = \underline{K} / \underline{F}, \end{aligned}$$

$$\underline{F} = 1 - \underline{T}, \quad \underline{T} = \underline{\beta} \underline{K}. \quad (8.79)$$

Последний параметр является передаточной функцией четырехполюсника с разомкнутой цепью обратной связи (рис. 8.45, б).

Рассмотрим отрицательную обратную связь, при которой $K_0 < K$, в случае вещественного коэффициента обратной связи $\underline{\beta} = \beta$. Из соотношений (8.79) видно, что и при вещественном β модуль F является переменной величиной, зависящей от частоты. Обратная связь при этом остается отрицательной на всех частотах, если выполняется условие

$$F = F_{\min} > 1. \quad (8.80)$$

Учитывая значение $\underline{K} = K e^{j\theta}$, из соотношений (8.79) находим

$$\underline{F} = 1 - \beta K \cos \theta - j\beta K \sin \theta, \quad F^2 = 1 - 2\beta K \cos \theta + \beta^2 K^2. \quad (8.81)$$

Отсюда следует, что минимальное значение F может получаться на некоторой частоте ω_m , где $\cos \theta(\omega_m) = 1$:

$$\theta(\omega_m) = 2k\pi \rightarrow F(\omega_m) = F_{\min} = 1 - \beta K(\omega_m). \quad (8.82)$$

Из соотношений (8.80) и (8.82) вытекает, что $-\beta K(\omega_m) > 0$. Поскольку модуль $K(\omega_m)$ является существенно положительной величиной, при отрицательной обратной связи вещественный коэффициент обратной связи должен быть отрицательным, чем и обусловлено его название:

$$\beta = -\beta_0 < 0, \quad \beta_0 > 0. \quad (8.83)$$

При этом коэффициент передачи (8.79) можно представить иначе:

$$\underline{K}_0(\omega) = \underline{K}(\omega) / (1 + \beta_0 \underline{K}(\omega)). \quad (8.84)$$

Здесь даже при $\beta_0 < 1$ может соблюдаться условие $\beta_0 K \gg 1$, что соответствует глубокой отрицательной обратной связи. При такой связи в знаменателе дроби (8.84) можно пренебречь единицей. Тогда коэффициент передачи (8.84) получается вещественным и не зависящим от частоты:

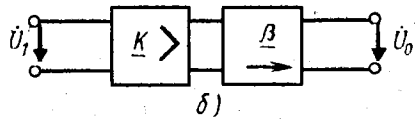
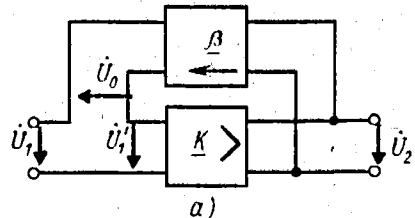


Рис. 8.45. Схемы усилителя с обратной связью и с разомкнутой цепью обратной связи

$$\underline{K}_0(\omega) = K_0(\omega) \approx 1/\beta_0 = \text{const.} \quad (8.85)$$

Таким образом, при глубокой отрицательной обратной связи частотные и фазовые искажения вообще отсутствуют, каковы бы они ни были в четырехполюснике без обратной связи с коэффициентом передачи $\underline{K}(\omega)$. Если обратная связь не настолько велика, чтобы выполнялось равенство (8.85), то частотные и фазовые искажения остаются. Однако они получаются меньше, чем в четырехполюснике без отрицательной обратной связи.

Отрицательная обратная связь приводит и к другим положительным эффектам, например к уменьшению нелинейных искажений, если четырехполюсник работает в нелинейном режиме или выходит из линейного режима. Кроме того, она влияет на чувствительность цепи к изменению параметров элементов, называемую чувствительностью по параметрам. Например, в усилителе при изменении сопротивления R некоторого резистора может недопустимо измениться коэффициент усиления K , что является существенным недостатком усилителя. Чувствительность цепи по некоторому параметру R определяется величиной

$$\delta = K'/K, \quad (8.86)$$

где $K' = \frac{dK}{dR}$ — производная по параметру*.

Рассмотрим чувствительность четырехполюсника с отрицательной обратной связью при вещественном коэффициенте передачи $\underline{K}(\omega) = K = \text{const.}$

При этом формула (8.84) упрощается:

$$K_0 = K/(1 + \beta_0 K) = K/F, \quad F = 1 + \beta_0 K > 1. \quad (8.87)$$

Продифференцировав K_0 по параметру, получим

$$K'_0 = K'/(1 + \beta_0 K)^2.$$

Разделив эту производную на коэффициент (8.87), в соответствии с определением (8.86) найдем чувствительность четырехполюсника с обратной связью:

$$\delta_0 = \delta/F. \quad (8.88)$$

Из соотношений (8.88) и (8.87) следует, что при введении отрицательной обратной связи чувствительность активного четырехполюсника по параметрам снижается, т. е. возрастает стабильность его работы.

Для уменьшения искажений и чувствительности в многокаскадных усилителях может применяться отрицательная обратная связь, охватывающая не только отдельные каскады, но и несколько каскадов. Если при этом использовать комплексную обратную связь, как показано на рис. 8.46, то можно получить и

* Используют и другие коэффициенты для оценки чувствительности, например безразмерный параметр $\delta = RK'/K$.

другие эффекты. Указанным способом достигается, например, формирование заданных частотных характеристик усилителей (см. § 9.3.5).

Как отмечалось, сигнальные графы можно строить по функциональным схемам цепи. Именно такой способ анализа удобен при рассмотрении многокаскадных усилителей с обратными связями. Для примера сигнальный граф трехкаскадного усилителя (рис. 8.46) показан на рис. 8.47, а. Поскольку этот граф содержит только один прямой путь, его можно сразу инвертировать, как показано на рис. 8.47, б. Данный граф имеет помимо инвертированного прямого пути пять разрешенных путей с одним обходом и один разрешенный путь с двумя обходами. Поэтому обратная передача графа описывается суммой, содержащей семь слагаемых:

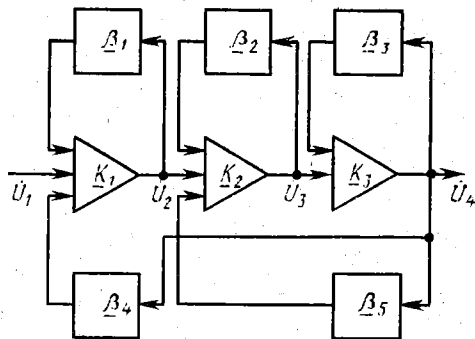


Рис. 8.46. Схема трехкаскадного усилителя с обратными связями

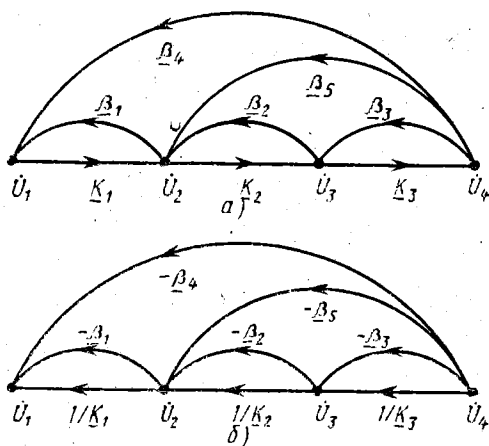


Рис. 8.47. Сигнальный граф трехкаскадного усилителя

$$\underline{H} = 1/\underline{K}_1\underline{K}_2\underline{K}_3 - \beta_1/\underline{K}_2\underline{K}_3 - \beta_2/\underline{K}_1\underline{K}_3 - \beta_3/\underline{K}_1\underline{K}_2 - \beta_4 - \beta_5/\underline{K}_1 + \beta_1\beta_3/\underline{K}_2.$$

5. Устойчивость четырехполюсников. Из соотношений (8.79) следует, что при положительной обратной связи, когда $K_0 > K$, должно выполняться условие

$$F < 1. \quad (8.89)$$

В этом случае условие (8.83) не выполняется, т. е. вещественный коэффициент обратной связи является положительным ($\beta > 0$), чем обусловлено название такой обратной связи. При соблюдении условия (8.89) модуль F обращается в нуль на некоторой частоте ω_0 :

$$F(\omega_0) = F_{\min} = 0. \quad (8.90)$$

При этом коэффициент передачи (8.79) становится по модулю бесконечно большим. Физически это означает, что усилитель-четыреполюсник самовозбуждается, т.е. перестает усиливать сигналы и переходит в режим самовозбуждения, или генерации колебаний с частотой ω_0 . Подобный четырехполюсник называют *неустойчивым*.

Необходимо знать *критерии устойчивости, т.е. условия, при соблюдении которых четырехполюсник не самовозбуждается*. Один из критериев вытекает из свойств характеристического уравнения (6.33) рассматриваемого четырехполюсника. Если он не самовозбуждается, то и собственные колебания четырехполюсника затухают. В § 6.2.2 было показано, что для этого характеристический полином должен быть полиномом Гурвица. Таким образом, *четыреполюсник с обратной связью является устойчивым, если корни его характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$. Это условие называют критерием устойчивости Гурвица*.

Некоторые важные свойства полиномов Гурвица рассматриваются в § 10.1.1. Сейчас укажем лишь на одно их свойство. Для полинома

$$F(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k$$

с вещественными коэффициентами a_k можно составить ряд определителей из этих коэффициентов по простому алгоритму. Этот алгоритм можно наглядно представить на примере указанных определителей для полинома, например, пятого порядка ($n = 5$):

$$\Delta_1 = a_4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если все эти определители положительны при $a_n > 0$, то $F(p)$ является полиномом Гурвица. При этом и четырехполюсник, у которого характеристический полином обладает таким свойством, является устойчивым. Это условие называется критерием устойчивости Рауса—Гурвица.

При практических расчетах корни полинома $F(p)$ проще определять на ЭВМ по стандартной программе. При счетно-аналитическом исследовании устойчивости четырехполюсника более удобным и наглядным является рассматриваемый ниже критерий устойчивости Найквиста. Здесь же отметим, что *корни четной и нечетной частей полинома Гурвица $F(p) = F_{\text{чет}}(p) + F_{\text{нечет}}(p)$ являются вещественными и чередуются друг с другом*. Такое чередование корней впервые исследовал применительно к характери-

стическому уравнению А. В. Михайлов. Поэтому чередование корней четной и нечетной составляющих характеристического полинома, как условие устойчивости четырехполюсника с обратной связью, называют критерием устойчивости Михайлова.

Еще один критерий вытекает из анализа соотношения (8.89). Поскольку при наблюдении предельного равенства (8.90) четырехполюсник (усилитель) самовозбуждается, критерием его устойчивости является выполнение неравенства

$$F_{\min} > 0. \quad (8.91)$$

Конкретизируем этот критерий. При комплексной обратной связи $\underline{\beta} = \beta e^{j\theta_0}$ соотношения (8.81) можно переписать в виде

$$\underline{F} = 1 - T \cos \theta_0 - jT \sin \theta_0, \quad F^2 = 1 - 2T \cos \theta_0 + T^2. \quad (8.92)$$

Здесь $\theta_0 = \theta_\beta + \theta$, а \underline{F} и \underline{T} определяются прежними соотношениями (8.79), где

$$\underline{T} = T e^{j\theta_0} = T_A + jT_B, \quad (8.93)$$

где $T_A = T \cos \theta_0$, $T_B = T \sin \theta_0$ — соответственно четная и нечетная части коэффициента передачи четырехполюсника при разомкнутой цепи обратной связи.

Из второго равенства (8.92) следует, что минимальное значение F на частоте ω_0 получается при $\cos \theta_0(\omega_0) = 1$:

$$\theta_0(\omega_0) = 2k\pi \rightarrow F(\omega_0) = F_{\min} = 1 - T(\omega_0). \quad (8.94)$$

Поскольку θ_0 является аргументом \underline{T} , при соблюдении первого равенства (8.94) коэффициент передачи (8.93) становится вещественным и положительным: $\underline{T} = T \cos 2k\pi + jT \sin 2k\pi = T$. Поэтому из неравенства (8.91) и соотношений (8.94) вытекает формулировка критерия устойчивости. *Четырехполюсник с обратной связью является устойчивым, если его коэффициент передачи при разомкнутой цепи обратной связи (см. рис. 8.45, б) получается меньше единицы на частотах, где он становится вещественным:*

$$\theta_0(\omega_0) = 2k\pi, \quad T(\omega_0) < 1. \quad (8.95)$$

Характеристики устойчивого четырехполюсника показаны на рис. 8.48, а, а неустойчивого — на рис. 8.48, б.

Критерий устойчивости (8.95) может быть сформулирован в другой форме. На координатной плоскости (T_A , T_B) или в полярной системе координат (T , θ_0) зна-

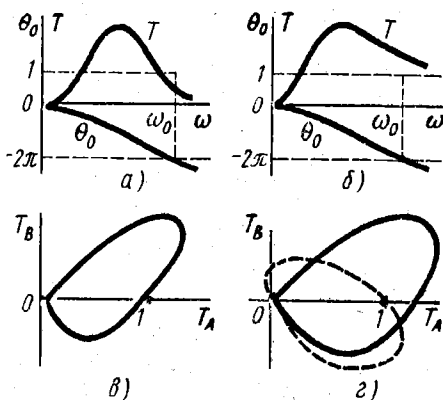


Рис. 8.48. Характеристики и годографы устойчивого и неустойчивого четырехполюсников при разомкнутой цепи обратной связи

чения четной и нечетной частей коэффициента передачи (8.93) образуют семейство точек, соответствующих разным частотам в диапазоне $[0, \infty]$. Это семейство точек представляет собой линию, отображающую комплексную частотную характеристику $\underline{T}(\omega)$ и называемую *годографом* или *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ) четырехполюсника с разомкнутой цепью обратной связи. Если четырехполюсник является устойчивым, то согласно критерию (8.95) его АФХ не охватывает точку с координатами $(1, 0)$, как показано на рис. 8.48, а. Это условие называется *критерием устойчивости Найквиста*. Годограф неустойчивого четырехполюсника охватывает точку с координатами $(1, 0)$ либо проходит через нее (рис. 8.48, б).

Рассмотрим еще один критерий. Коэффициент передачи (8.79) может быть представлен в виде дробно-рациональной функции вида (6.14):

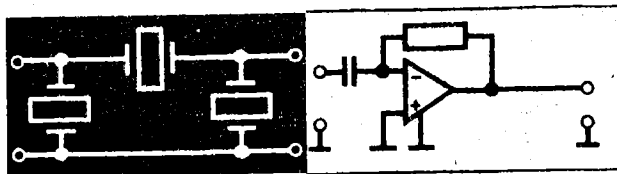
$$\underline{K}_0(\omega) = K_0(p) = F_1(p)/F_2(p). \quad (8.96)$$

В § 6.1.3 было показано, что передаточные функции (6.14) реальных пассивных цепей имеют полюсы только в левой полуплоскости комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$. В противном случае возбужденные в цепи свободные колебания не затухали бы. Однако в активных четырехполюсниках с обратной связью собственные колебания могут не затухать, что соответствует неустойчивому режиму его работы, т. е. режиму генерации. Поэтому *четыреполюсник с обратной связью является устойчивым, если полином $F_2(p)$ в его передаточной функции (8.96) является полиномом Гурвица*.

Вопросы для самоконтроля

- 8.1. Как записываются в развернутом виде матричные уравнения (8.9) — (8.12)?
- 8.2. Какую размерность имеют коэффициенты матриц (8.9) — (8.12)?
- 8.3. Как изменится цепочечная матрица четырехполюсника при скрещивании его входных и (или) выходных зажимов?
- 8.4. Почему в канонических схемах обратимых четырехполюсников три двухполюсника могут быть соединены только звездой и треугольником?
- 8.5. Почему в канонических схемах симметричных четырехполюсников нельзя получить два независимых параметра, исключив один из двухполюсников с сопротивлением Z_1 (рис. 8.5, а) или Z_2 (рис. 8.5, б)?
- 8.6. Как следует преобразовать Т- и П-образную канонические схемы для получения уравновешенных несимметричных и симметричных четырехполюсников?
- 8.7. Какие соединения Т- и П-образных четырехполюсников являются нерегулярными?
- 8.8. Почему нерегулярное соединение четырехполюсников является недопустимым?
- 8.9. Какие регулярные соединения допускают Т- и П-образные четырехполюсники?
- 8.10. По какой схеме следует проверять регулярность параллельного и последовательного соединения входных зажимов четырехполюсника?
- 8.11. При каком соединении четырехполюсников можно использовать для расчетов их b -матрицы?

- 8.12. В чем заключается физический смысл α -параметров четырехполюсника?
- 8.13. Как выражаются входные сопротивления четырехполюсника через системы y - и z -параметров?
- 8.14. Как выражаются входные проводимости четырехполюсника через системы y - и z -параметров?
- 8.15. Чему равен комплексный коэффициент передачи четырехполюсника в режиме холостого хода при $Z_{01} \neq 0$ и $Z_{02} = 0$?
- 8.16. Как определяются параметры Т- и П-образной канонических схем четырехполюсника по его матрицам проводимостей и сопротивлений?
- 8.17. По какой системе основных параметров четырехполюсника наиболее просто определяются параметры его Т- и П-образной канонической схем?
- 8.18. Как изменяется цепочечная матрица несимметричного четырехполюсника при его зеркальном отображении?
- 8.19. Чему равны параметры (8.51) мостового четырехполюсника, эквивалентного Т- и П-образному четырехполюсникам?
- 8.20. Как можно модифицировать теорему бисекции для определения параметров Т- и П-образной канонических схем, эквивалентных произвольному симметричному четырехполюснику?
- 8.21. Как можно определить экспериментально характеристические сопротивления резистивных канонических четырехполюсников?
- 8.22. Какие понятия являются общими для топологических и сигнальных графов и какие из них имеют разный смысл?
- 8.23. Как объясняется физически, что КОС, изображенный на рис. 3.45, б, не является симметричным четырехполюсником при $R_1 = R_2 = R$?
- 8.24. Как можно определить по сигнальным графам матрицы ИТУН и ИТУТ (см. рис. 3.44, в, г)?
- 8.25. При каких дефектах в схеме ИНУН (см. рис. 3.44, а) четырехполюсник становится неустойчивым?



Цепи для обработки сигналов

В устройствах связи сигналы обрабатывают различным образом с целью изменения их формы (модуляция, детектирование), амплитуды (трансформация, усиление), частоты (преобразование), очищения от помех (селекция) и т. д. Такую обработку сигналов производят с помощью линейных и нелинейных цепей. Основными видами линейной обработки сигналов, которые рассматриваются в настоящей главе, являются селекция, задержка во времени, дифференцирование и интегрирование сигналов, а также коррекция их искажений.

§ 9.1. СЕЛЕКТИВНЫЕ ЦЕПИ

В гл. 4 были рассмотрены селективные свойства резонансных контуров. Наряду с резонансными контурами для селекции сигналов широко применяют специальные схемы селективных цепей, а также фильтры специфической конструкции. В настоящем параграфе рассматривается классификация фильтров по наиболее принципиальным признакам.

1. Физические принципы селекции сигналов. Любые частотные фильтры (см. § 4.1), в которых используется явление резонанса, могут быть названы *резонансными фильтрами*. Существуют также частотные фильтры, в которых для селекции сигналов используются другие физические явления, например компенсация помех на выходе фильтра, где они складываются в противофазе. Для этого сигнал с помехами должен поступать на выход фильтра по нескольким параллельным каналам, как, например, в X-образной канонической схеме четырехполюсника. Такие фильтры называют *мостовыми*. Число параллельных каналов в мостовых фильтрах может быть и больше двух.

Если при этом необходимые фазовые сдвиги создаются в параллельных каналах, отводящих сигнал в различных точках его прямого пути, то такие фильтры называют *трансверсальными* (от лат. transversus — отведенный). В мостовых и трансверсальных фильтрах используются и резонансные элементы.

Для селекции электрических сигналов могут применяться не только электрические фильтры, состоящие лишь из электрических элементов, но также фильтры, содержащие электрические и механические элементы, — так называемые *электромеханические фильтры* (ЭМФ).

Как в электрических фильтрах, так и в ЭМФ могут использоваться волновые резонаторы. Соответственно такие фильтры называются *волновыми*.

Выше были рассмотрены специфические физические явления в однонаправленных четырехполосниках с обратной связью (см. § 8.4.4). В таких четырехполосниках можно, в частности, формировать заданные частотные характеристики при комплексном коэффициенте обратной связи β и вещественном $K = K$, как это видно из формулы (8.79). Получающиеся при этом селективные четырехполосники называются *активными фильтрами*. Все другие фильтры, в которых для селекции не используется обратная связь, являются *пассивными фильтрами*, хотя они могут быть активными четырехполосниками (*резонансный усилитель и др.*).

При селекции сигнала обычно стремятся сохранить его форму. Однако в ряде случаев целью обработки сигнала является его обнаружение на фоне помех без сохранения формы. Так, при передаче сигнала импульсным кодом важно обнаружить посланные импульсы, а принятые импульсы могут и отличаться по форме от посланных. При этом может быть осуществлена *оптимальная фильтрация*, при которой обеспечивается наибольшее по мощности отношение сигнала к шуму на выходе фильтра. Для этого в отличие от передаточной функции (6.25) *передаточная функция* $\underline{T}(\omega) = T_0(\omega)e^{-j\omega t_0}$ *оптимального фильтра должна быть сопряжена (согласована) со спектральной функцией* $\underline{S}_{вх}(\omega)$ *входного сигнала:* $T_0(\omega) = AS_{вх}^*(\omega)$. Поэтому оптимальный фильтр называют также *согласованным (с сигналом)*. Сигнал на выходе согласованного фильтра имеет спектр $\underline{S}_{вых}(\omega) = \underline{T}(\omega)\underline{S}_{вх}(\omega) = AS_{вх}^2(\omega)e^{-j\omega t_0}$.

Так как $S_{вх}^2(\omega)$ является вещественной функцией, фазовые сдвиги спектральных составляющих в оптимальном фильтре имеют значения, при которых все эти составляющие получают синфазными и складываются арифметически, а не векторно. При этом обеспечивается максимально возможный энергетический пик сигнала, смещенный на время запаздывания t_0 , которое очевидно, должно превышать длительность сигнала t . Если на входе оптимального фильтра действует помеха в виде белого шума со случайным спектром фаз, то на выходе фильтра ее спектральные составляющие складываются по-прежнему со случайными фазами, т. е. векторно. При этом на выходе фильтра уровень шума

возрастает в меньшей степени и не имеет указанного энергетического пика. Вследствие описанных явлений и обеспечивается оптимальная фильтрация. Если же на входе фильтра действует небелый шум со спектральной плотностью $S_{\text{ш}}^2(\omega) \neq \text{const}$, то оптимальный фильтр должен быть согласован с сигналом иным образом: $T_0(\omega) = A S_{\text{сх}}^*(\omega) / S_{\text{ш}}^2(\omega)$. Тем самым небелый шум преобразуется в белый и задача оптимальной фильтрации решается прежним образом.

Оптимальная фильтрация и другие виды селекции сигналов могут осуществляться *цифровыми фильтрами*, в которых производится обработка дискретных сигналов (см. § 5.4.3). Основной частью цифровых фильтров является микропроцессор, представляющий собой специализированную ЭВМ, выполненную в виде интегральных микросхем (микромодулей). Микропроцессор состоит из жестко запрограммированных блоков, например: из блока вычисления спектра $S_{\text{вх}}(\omega)$ по алгоритму БПФ, блока перемножения этого спектра на передаточную функцию $T(\omega)$, которая хранится в запоминающем устройстве, и блока вычисления выходного дискретного сигнала по его найденному спектру $S_{\text{вых}}(\omega) = T(\omega) S_{\text{вх}}(\omega)$. Цифровые фильтры могут работать и по другим алгоритмам, вычисляя, например, суперпозиционные интегралы. При этом в запоминающем устройстве хранится переходная или импульсная характеристика фильтра с заданными селективными свойствами. Более предпочтительной является обработка сигнала с помощью импульсной характеристики, поскольку для вычисления интеграла Дюамеля (6.41) требуется дифференцировать входной сигнал, а численное дифференцирование снижает точность работы цифрового фильтра.

2. Классификация частотных фильтров. Любые частотные фильтры, как и резонансные контуры, имеют некоторую полосу пропускания, определяемую на относительном уровне $A = 1/\sqrt{2}$ (см. рис. 4.8), или $a = 3 \text{ дБ} = 0,346 \text{ Нп}$ (см. рис. 4.1). На этом же уровне определяются и граничные частоты полосы пропускания по рабочему затуханию (8.44), (8.45). Однако расположение этой полосы может быть различным. По этому признаку любые фильтры подразделяются на четыре основных типа. *Фильтры нижних частот (ФНЧ)* имеют полосу пропускания в диапазоне частот от $f_{r1} = 0$ до $f_{r2} = f_r$ (рис. 9.1, а). *Фильтры верхних частот (ФВЧ)* характеризуются полосой пропускания от $f_{r1} = f_r$ до $f_{r2} = \infty$ (рис. 9.1, б). В *полосовом фильтре (ПФ)*, как и в резонансных контурах (см. рис. 4.7), полоса пропускания располагается в диапазоне частот $0 < f_{r1} < f_{r2} < \infty$ (рис. 9.1, в).

Режекторный, или заградительный, фильтр (РФ, ЗФ) имеет вместо полосы пропускания полосу режекции (заграждения), в которой подавляются помехи с заданными частотами. Полоса режекции может характеризоваться граничными частотами $0 < f_{r2} < f_{r3} < \infty$ (рис. 9.1, г), которые соответствуют двум полосам пропускания $[f_{r1}, f_{r2}]$ и $[f_{r3}, f_{r4}]$, где $f_{r1} = 0$, $f_{r4} = \infty$. Полосу режекции характеризуют также полосой частот ΔF_0 , в которой

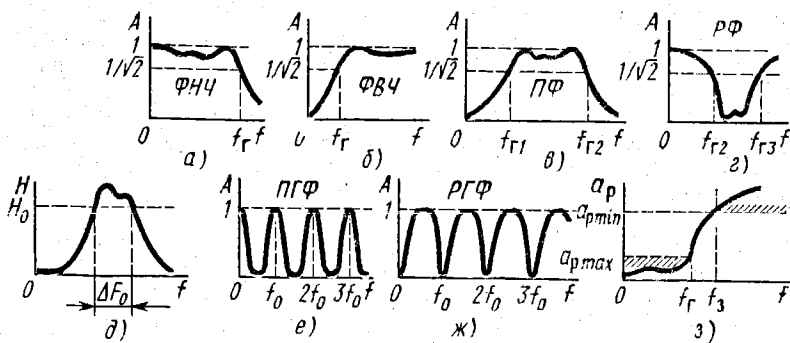


Рис. 9.1. Классификация фильтров по расположению полосы пропускания

ослабление помех $H = 1/A$ превышает заданную величину H_0 или равно ей (рис. 9.1, д), т. е. *полосой ослабления (затухания)*.

Существуют фильтры с рядом полос пропускания или полос режекции, расположенных на кратных частотах. Их называют соответственно *полосовыми или режекторными гребенчатыми фильтрами* (ПГФ, РГФ). Характеристики таких фильтров показаны на рис. 9.1, е, ж.

Обычно в фильтрах принято рассматривать не коэффициент передачи, а рабочее затухание, как показано для ФНЧ на рис. 9.1, з. При этом в технических условиях задают *полосу пропускания* и *полосу затухания*, которые разделяются *переходной зоной*. В полосе пропускания ограничивается максимальное рабочее затухание, например, уровнем $a_{p \max} = 3$ дБ, а в полосе затухания задается минимальное рабочее затухание $a_{p \min}$. Такие технические требования показаны для ФНЧ отштрихованными пунктирными линиями на рис. 9.1, з, где полоса частот $[f_r, f_3]$ является переходной зоной, в которой затухание может иметь произвольное значение $a_p > a_{p \max}$.

§ 9.2. РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

В резонансных фильтрах для лучшего проявления резонансных свойств стремятся использовать высококачественные элементы. Это позволяет в ряде случаев пренебрегать потерями при анализе и расчете фильтров. Эквивалентные схемы таких фильтров состоят из чисто реактивных элементов и называются *реактивными фильтрами*.

1. Основные свойства. Матричные коэффициенты a_{12} , a_{21} имеют смысл соответственно сопротивления и проводимости передачи. Эти сопротивления и проводимости в реактивном фильтре могут быть только реактивными:

$$a_{12} = jX_{(12)X}(\omega), \quad a_{21} = jB_{(21)X}(\omega) = 1/jX_{(21)X}(\omega). \quad (9.1)$$

Входные сопротивления реактивного фильтра в режимах холостого хода и короткого замыкания также являются реактивными. Поэтому из соотношений (8.38) и (9.1) вытекает, что *матричные*

коэффициенты a_{11} и a_{22} реактивных фильтров являются вещественными функциями частоты:

$$a_{11} = A(\omega), \quad a_{22} = D(\omega). \quad (9.2)$$

Эти функции изменяются с частотой не только по модулю, но и по знаку. Соответственно вещественная функция $a_{11}a_{22}$ изменяется по модулю и по знаку при изменении частоты. При этом важен случай, когда в некотором диапазоне частот выполняются неравенства

$$0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1. \quad (9.3)$$

Из соотношения (8.18) для определителя цепочечной матрицы следует, что при выполнении условия (9.3) соблюдается также неравенство

$$a_{12}a_{21} \leq 0. \quad (9.4)$$

При соблюдении условий (9.3) и (9.4) характеристическая передаточная функция (8.56) описывается выражением

$$\underline{H}_c = e^{g_c} = \sqrt{a_{11}a_{22}} + j\sqrt{-a_{12}a_{21}}, \quad (9.5)$$

в котором оба радикала являются вещественными величинами. Следовательно, характеристическое затухание (8.59) имеет значение

$$a_c = \ln \sqrt{(\sqrt{a_{11}a_{22}})^2 + (\sqrt{-a_{12}a_{21}})^2} = \ln \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \ln 1,$$

или

$$a_c |_{0 \leq a_{11}a_{22} \leq 1} = 0. \quad (9.6)$$

Таким образом, при выполнении условия (9.3) характеристическое затухание реактивного фильтра равно нулю. Полоса частот, в которой выполняется соотношение (9.6), называется *полосой прозрачности* фильтра, а неравенства (9.3) являются *условием прозрачности*.

Для фильтров, у которых коэффициенты a_{11} и a_{22} имеют одинаковые знаки на всех частотах, левое неравенство в условии (9.3) теряет смысл. В этом случае данное условие прозрачности записывают иначе:

$$-1 \leq \sqrt{a_{11}a_{22}} \leq 1. \quad (9.7)$$

Для симметричных фильтров, когда $a_{11} = a_{22}$, это условие упрощается:

$$-1 \leq a_{11} \leq 1. \quad (9.8)$$

Условия прозрачности (9.3), (9.7), (9.8) служат для определения граничных частот f_{c1} и f_{c2} полосы прозрачности, которые называются *частотами среза*. Для этого в указанных условиях используются знаки равенства.

В полосе прозрачности α -параметры удовлетворяют также следующим неравенствам:

$$a_{11}/a_{22} \geq 0, a_{12}/a_{21} \geq 0. \quad (9.9)$$

Здесь первое неравенство вытекает из соотношений (9.3), (9.2), а второе — из соотношений (9.4), (9.1). При этом предельные значения неравенств (9.9) получаются на границах полосы прозрачности.

Из соотношений (9.9) следует, что *характеристические сопротивления (8.53) реактивного фильтра являются в полосе прозрачности вещественными сопротивлениями, зависящими от частоты:*

$$\underline{Z}_{c1} = R_{c1}(\omega), \underline{Z}_{c2} = R_{c2}(\omega). \quad (9.10)$$

За пределами полосы прозрачности условие (9.6) не выполняется. Поскольку характеристическое затухание не может быть отрицательным, в полосе частот, где не выполняется условие прозрачности (9.3), $a_c > 0$. Эта полоса частот называется *полосой затухания (непрозрачности)*. Анализ, подобный предыдущему, показывает, что *в полосе затухания реактивного фильтра его характеристические сопротивления являются чисто реактивными:*

$$\underline{Z}_{c1} = jX_{c1}(\omega), \underline{Z}_{c2} = jX_{c2}(\omega). \quad (9.11)$$

Согласно условиям (9.9) в полосе непрозрачности сопротивления (9.11) изменяются от нуля до $\pm j\infty$.

Рассмотренные здесь соотношения относятся не только к реактивным фильтрам, но и к любым реактивным четырехполюсникам.

2. Расчет параметров. Характеристические параметры реактивных фильтров нужно рассчитывать в полосах прозрачности и непрозрачности по разным формулам. Для полосы прозрачности, где $a_c = 0$, находим

$$\underline{g}_c = jb_c, e^{\underline{g}_c} = \cos b_c + j \sin b_c, \quad (9.12)$$

$$\operatorname{ch} \underline{g}_c = \cos b_c, \operatorname{sh} \underline{g}_c = j \sin b_c. \quad (9.13)$$

Из формул (9.5) и (9.12) следует, что

$$\cos b_c = \sqrt{a_{11}a_{22}}, \sin b_c = \sqrt{-a_{12}a_{21}}. \quad (9.14)$$

Для полосы непрозрачности необходимо рассмотреть два случая.

1) Если $a_{11}a_{22} > 1$, то $a_{12}a_{21} > 0$ и радикалы в соотношении (8.56) являются вещественными функциями. При этом из формулы (8.60) находим

$$b_c = \pm k\pi, k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

Учитывая, что $\operatorname{ch} \underline{g}_c = \operatorname{ch} a_c \cos b_c + j \operatorname{sh} a_c \sin b_c$ и $\operatorname{sh} \underline{g}_c = \operatorname{sh} a_c \cos b_c + j \operatorname{ch} a_c \sin b_c$, из формул (8.62), (9.15) получаем

$$\operatorname{ch} \underline{g}_c = \pm \operatorname{ch} a_c, \operatorname{sh} \underline{g}_c = \pm \operatorname{sh} a_c, \quad (9.16)$$

$$\operatorname{ch} a_c = \pm \sqrt{a_{11}a_{22}}, \operatorname{sh} a_c = \pm \sqrt{a_{12}a_{21}}. \quad (9.17)$$

2) Полосе непрозрачности соответствуют неравенства $a_{11}a_{22} < 0$, $a_{12}a_{21} < -1$ и оба радикала в формуле (8.56) являются мнимыми величинами. При этом из формулы (8.60) следует:

$$b_c = \pm(2k + 1)\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.18)$$

Прежним способом из формул (8.62) и (9.18) находим

$$\operatorname{ch} \underline{g}_c = \pm j \operatorname{sh} a_c, \quad \operatorname{sh} \underline{g}_c = \pm j \operatorname{ch} a_c, \quad (9.19)$$

$$\operatorname{sh} a_c = \pm \sqrt{-a_{11}a_{22}}, \quad \operatorname{ch} a_c = \pm \sqrt{-a_{12}a_{21}}. \quad (9.20)$$

В зависимости от знаков матричных коэффициентов знаки в формулах (9.17), (9.20) выбирают таким образом, что функции $\operatorname{sh} a_c$ и $\operatorname{ch} a_c$ являются всегда положительными.

Соотношения (9.13) — (9.20) позволяют рассчитать и рабочие параметры реактивных фильтров. Для этого надо знать нагрузочные сопротивления, которые бывают обычно диссипативными: $\underline{Z}_{01} = R_{01}$, $\underline{Z}_{02} = R_{02}$. Им соответствуют нормированные характеристические сопротивления, определяемые согласно обозначениям (9.10), (9.11) отдельно для полос прозрачности и непрозрачности:

$$r_{c1} = R_{c1}/R_{01}, \quad r_{c2} = R_{c2}/R_{02}, \quad x_{c1} = X_{c1}/R_{01}, \quad x_{c2} = X_{c2}/R_{02}. \quad (9.21)$$

Рабочая передаточная функция (8.42) определяется через характеристические параметры с помощью матрицы (8.66), в которую надо подставить соотношения (9.13), (9.16), (9.19). При этом с учетом обозначений (9.21) получаем расчетные формулы, приведенные в табл. П.22. В этой же таблице приведены формулы для практически важного случая симметричных фильтров ($a_{11} = a_{22}$).

Реактивные фильтры можно рассчитывать и непосредственно по характеристическим параметрам с использованием формул (9.14), (9.17), (9.20). При этом рабочее затухание определяется по формуле (8.72).

Можно ограничиться расчетом лишь характеристического затухания, если оно выбрано с некоторым запасом. Такой необходимый запас определяется по той же формуле (8.72). На частоте, где $|x_{c1}| = |x_{c2}| = 1$, затухание взаимодействия несогласованностей в этой формуле получается положительным и может быть близким к нулю при малом характеристическом затухании. На этой же частоте затухания несогласованности равны $a_{n1} = a_{n2} = \ln 1/\sqrt{2} = -0,35$ Нп. Поэтому и требуется указанный запас по сравнению с минимальным рабочим затуханием, которое задается в технических условиях (рис. 9.1, з):

$$a_{c \min} = a_{p \min} + 0,7 \text{ Нп}. \quad (9.22)$$

С помощью формул (9.17), (9.20) можно определять количество звеньев реактивного фильтра, обеспечивающих заданное минимальное рабочее затухание. Такое определение производится с учетом формулы (9.22).

3. Низкочастотные прототипы. Если в реактивном ФНЧ заменить по определенным правилам все элементы другими элементами, то при этом могут быть получены реактивные фильтры иных типов — ФВЧ, ПФ и РФ. Поэтому *реактивные ФНЧ называются низкочастотными прототипами реактивных фильтров*, а расчет ФВЧ, ПФ и РФ сводится к расчету их низкочастотного прототипа и последующему перерасчету его элементов. Расчет прототипов можно производить по табулированным справочникам, в которых приводятся различные типы характеристик ФНЧ для относительной (нормированной) частоты $\Omega = \omega/\omega_c$ ($\Omega_c = 1$). Параметры прототипов, обеспечивающие необходимые характеристики, нормируются в таблицах по нагрузочному сопротивлению R_0 . Таким образом, после разнормировки табличных коэффициентов по заданным значениям ω_c и R_0 могут быть определены параметры любого низкочастотного прототипа.

Преобразование полученного прототипа основано на том, что его характеристическая передаточная функция, как и любая передаточная функция, обладает свойствами (6.8) четной и нечетной симметрии. Поэтому характеристическое затухание и характеристическую фазу можно рассматривать условно в области отрицательных частот. При этом полосам прозрачности и непрозрачности $[0, \omega_c]$, $[\omega_c, \infty]$ соответствуют симметричные полосы частот $[0, -\omega_c]$, $[-\omega_c, -\infty]$, как показано на рис. 9.2, а, где полосы непрозрачности заштрихованы.

Преобразование прототипа производится путем определенной замены частоты ω на новую переменную ω' . Зададимся, например, новой частотой среза ω'_c и произведем замену переменных:

$$j\omega = \omega_0^2/j\omega', \quad \omega_0^2 = \omega_c\omega'_c. \quad (9.23)$$

В отличие от физического преобразования частоты (см. § 1.4.1) замена переменной (9.23) может быть названа *аналитическим или реактивным преобразованием частоты*. Оно производится во всех расчетных соотношениях реактивного низкочастотного прототипа. При этом происходит перенос граничных частот, показанный цветными стрелками на рис. 9.2, а, б. В этом легко убедиться, подставив соответствующие частоты в (9.23).

Следовательно, полосам прозрачности и непрозрачности прототипа $[0, -\omega_c]$, $[-\omega_c, -\infty]$ (рис. 9.2, а) соответствуют полосы прозрачности и непрозрачности $[\infty, \omega'_c]$, $[\omega'_c, 0]$ нового фильтра (рис. 9.2, б), т. е. прототип преобразован в фильтр верхних частот. При переходе к ФВЧ надо заменить в прототипе все индуктивности L_k на емкости C'_k , а емкости C_k на индуктивности L'_k . Действительно, согласно преобразованию (9.23)

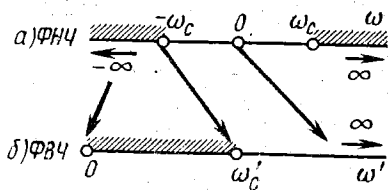


Рис. 9.2. Преобразование низкочастотного прототипа в фильтр верхних частот

$$j\omega L_k = \omega_0^2 L_k / j\omega' = 1/j\omega' C'_k, \quad j\omega C_k = \omega_0^2 C_k / j\omega' = 1/j\omega' L'_k,$$

где

$$C'_k = 1/\omega_0^2 L_k, \quad L'_k = 1/\omega_0^2 C_k. \quad (9.24)$$

Таким образом, преобразование частоты (9.23) позволяет определить и параметры (9.24) преобразованного ФВЧ.

Зададимся теперь вместо частоты ω_c прототипа двумя новыми частотами среза ω_{c1} и ω_{c2} :

$$\omega_c = \omega_{c2} - \omega_{c1}, \quad \omega_{c1}\omega_{c2} = \omega_0^2, \quad (9.25)$$

где ω_0 — среднее геометрическое значение частот ω_{c1} , ω_{c2} .

Произведем аналитическое преобразование частоты:

$$j\omega = j\omega_0(\omega'/\omega_0 - \omega_0/\omega') = j\omega_0 v', \quad (9.26)$$

где v' — нормированная расстройка (3.110) по частоте ω' относительно частоты ω_0 .

Из соотношений (9.25) и (9.26) следует, что в этом случае происходит перенос граничных частот, показанный на рис. 9.3.

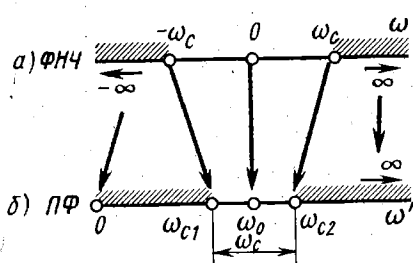


Рис. 9.3. Преобразование низкочастотного прототипа в полосовой фильтр

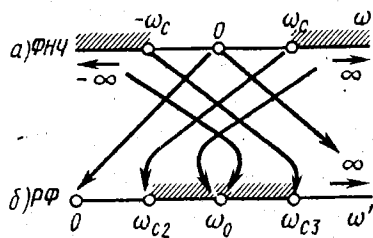


Рис. 9.4. Преобразование низкочастотного прототипа в режекторный фильтр

a , b , который соответствует переходу к полосовому фильтру. При этом преобразование (9.26) дает следующие значения соотношений индуктивностей L_k и емкостей C_k прототипа:

$$j\omega L_k = j\omega_0 L_k v' = j\rho'_k v', \quad 1/j\omega C_k = 1/j\omega_0 C_k v' = \rho''_k / jv', \quad (9.27)$$

где $\rho'_k = \omega_0 L_k = \sqrt{L'_k / C'_k}$, $\rho''_k = 1/\omega_0 C_k = \sqrt{L''_k / C''_k}$ — некоторые характеристические сопротивления.

Эти величины соответствуют сопротивлению (3.113) последовательного контура и сопротивлению (3.114) параллельного контура при отсутствии потерь ($r=0$) и при настройке на частоту ω_0 , определяемую вторым равенством (9.25). Следовательно, при переходе к ПФ индуктивности L_k и емкости C_k прототипа заменяются соответственно последовательными и параллельными резонансными контурами без потерь. Параметры этих контуров определяются из соотношений (9.25) — (9.27) и формулы (3.105):

$$L'_k = L_k, \quad C'_k = 1/\omega_{c1}\omega_{c2}L_k, \quad C''_k = C_k, \quad L''_k = 1/\omega_{c1}\omega_{c2}C_k. \quad (9.28)$$

Аналогично преобразованиям (9.25) — (9.28) производится другое преобразование прототипа с частотой среза ω_c (рис. 9.4, а) при двух новых заданных частотах среза ω_{c2} , ω_{c3} (рис. 9.4, б). Определим величины

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c2}\omega_{c3}}, \quad \omega_c = \omega_0^2 / (\omega_{c3} - \omega_{c2}) \quad (9.29)$$

и произведем аналитическое преобразование частоты:

$$j\omega = \frac{\omega_0}{j(\omega'/\omega_0 - \omega_0/\omega')} = \frac{\omega_0}{j\nu'}, \quad (9.30)$$

где ν' — нормированная расстройка (3.110).

При этом происходит перенос граничных частот, показанный на рис. 9.2, а, б, что соответствует переходу к режекторному фильтру. В РФ параллельные резонансные контуры с параметрами L'_k , C'_k заменяют индуктивности L_k прототипа, а последовательные контуры с параметрами L''_k , C''_k — емкости C_k прототипа. Эти параметры определяются прежним образом из соотношений (9.29), (9.30):

$$L'_k = L_k, \quad C'_k = 1/\omega_{c2}\omega_{c3}L_k, \quad C''_k = C_k, \quad L''_k = 1/\omega_{c2}\omega_{c3}C_k. \quad (9.31)$$

Полезно обратить внимание на сходство расчетных формул (9.28) и (9.31).

§ 9.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

По принципу действия электрические фильтры классифицируют в соответствии с § 9.1.1. В настоящем параграфе фильтры сгруппированы по схемным признакам. При этом их рассмотрение ограничено фильтрами нижних частот в тех случаях, когда возможно использование аналитического преобразования частоты (см. § 9.2.3).

1. Цепочечные фильтры. Цепочечные фильтры образуются путем цепочечного соединения Г- и Т-образных четырехполюсников (полузвеньев), которые имеют П- и Т-образный входы (рис. 9.5, а, б). Их соединение осуществляется входами с одинаковыми характеристическими сопротивлениями Z_{cp} или Z_{ct} . При этом два одинаковых полузвена образуют симметричное Т- или П-образное звено фильтра.

Полузвенья простейшего реактивного ФНЧ показаны на рис. 9.5, в, г. Их характерным свойством является независимость от частоты произведения сопротивлений плеч:

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= L/C = \\ &= \rho^2 = K = \text{const.} \quad (9.32) \end{aligned}$$

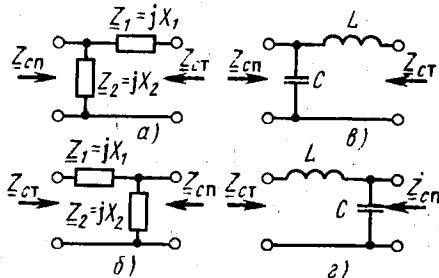


Рис. 9.5. Г- и Т-образные полузвенья фильтров типа р

Фильтры, обладающие свойствами (9.32), называются фильтрами типа ρ , или типа K .

Согласно табл. П.18 первое полузвено ФНЧ (рис. 9.5, в) имеет матрицу

$$(a) = \begin{pmatrix} 1 & jX_1 \\ 1/jX_2 & 1 + X_1/X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ j\omega C & 1 - \omega^2 LC \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

Из условия прозрачности (9.3) и матрицы (9.33) определяется частота среза:

$$\omega_c = 1/\sqrt{LC}. \quad (9.34)$$

Из соотношений (8.53) и (9.33) находим характеристические сопротивления полузвена:

$$\underline{Z}_{CT} = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - \omega^2 LC}, \quad \underline{Z}_{CП} = \frac{\sqrt{L/C}}{\sqrt{1 - \omega^2 LC}}, \quad (9.35)$$

С учетом обозначения (9.32) и формулы (9.34) эти сопротивления описываются упрощенными равенствами:

$$\underline{Z}_{CT} = \rho \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad \underline{Z}_{CП} = \rho / \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad (9.36)$$

где $\Omega = \omega/\omega_c$ — нормированная частота, а ρ — номинальное характеристическое сопротивление.

Эти сопротивления обладают свойствами (9.10) и (9.11). Их частотные зависимости показаны на рис. 9.6, а. Здесь реактивное сопротивление X_{CT} является индуктивным, а $X_{CП}$ — емкостным.

Учитывая соотношения (9.33), (9.34), по формулам (9.14) и (9.20) находим характеристическое затухание и характеристическую фазу:

$$\begin{aligned} a_c|_{\Omega \leq 1} &= 0, \quad b_c|_{\Omega \leq 1} = \arcsin \Omega, \\ a_c|_{\Omega > 1} &= \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \Omega, \quad b_c|_{\Omega > 1} = \pi/2. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Частотные зависимости этих параметров показаны сплошными линиями на рис. 9.6, б. Здесь же пунктирными линиями показаны соответствующие характеристики рабочих параметров полузвена, нагруженного на сопротивления $R_{01} = R_{02} = \rho$. Рабочие параметры определяются по табл. П.22 и формулам (9.36),

(9.37). По этим параметрам можно оценивать искажения в фильтре и его избирательность. Такая же оценка получается по АЧХ и ФЧХ, поскольку при $R_{01} = R_{02} = \rho$ передаточные функции (3.28), (8.23) являются обратными величинами. Из соотношений (8.41), (9.33) с учетом принятых обозначений находим

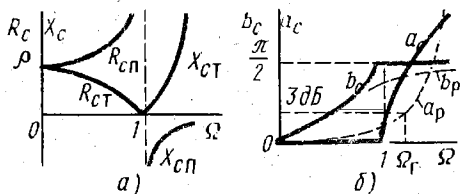


Рис. 9.6. Частотные зависимости характеристических параметров полузвена ФНЧ типа ρ

$$K = 1/2H_p = 1/(2 - \Omega^2 + j2\Omega), \quad H_p = H = 1/2K = \sqrt{1 + \Omega^4}/4,$$

поскольку $K_{\max} = 1/2$ и $H = 1/A = K_{\max}/K = 1/2K$.

Отсюда определяем граничную частоту полосы пропускания полузвена на уровне $H_r = \sqrt{2}$ и его коэффициент прямоугольности на уровне H_0 , соответствующем частоте Ω_0 :

$$\Omega_r = \sqrt{2}, \quad K_{\Pi, \sqrt{2}}^{H_0} = \Omega_0/\Omega_r = \sqrt[4]{H_0^2 - 1} \approx \sqrt{H_0}. \quad (9.38)$$

Интересно отметить, что такое же значение коэффициента прямоугольности получается и у связанных контуров при критической связи ($\kappa = 1$), как вытекает из первой формулы (4.103).

Следует иметь в виду, что соотношения (9.34) — (9.38) относятся и к Т-образному полузвену ФНЧ (см. рис. 9.5, з).

Для увеличения затухания вблизи полосы прозрачности полузвенья типа р усложняют. Для этого присоединяют последовательно некоторое сопротивление Z'_{2m} (рис. 9.7, а) или параллельно сопротивление Z''_{1m} (рис. 9.7, б). Первое полузвено (фильтр) называют при этом *последовательно-производным*, а второе — *параллельно-производным* полузвеном (фильтром) типа *т*. Здесь *т* является параметром новых полузвеньев, по которому рассчитывают параметры их элементов.

Указанные сопротивления выбирают таким образом, чтобы на некоторой частоте вблизи полосы прозрачности получалось бесконечно большое затухание. В последовательно-производном ФНЧ добавленным элементом является индуктивность (рис. 9.7, в), а в параллельно-производном — емкость (рис. 9.7, г). В таких полузвеньях полюс затухания получается на частоте

$$\omega_\infty = 1/\sqrt{L'_2 C'_2} = 1/\sqrt{L''_1 C''_1}. \quad (9.39)$$

Действительно, последовательный контур $L'_2 C'_2$ имеет на этой частоте сопротивление $X=0$ и замыкает накоротко входные зажимы. Параллельный же контур $L''_1 C''_1$ на частоте (9.39) имеет бесконечно большое сопротивление (при отсутствии потерь) и не пропускает сигнал к выходным зажимам.

Прежним образом найдем два характеристических сопротивления полузвеньев типа *т*:

$$\begin{aligned} Z_{\text{сП}} &= \sqrt{L'_1 [1 - \omega^2(L'_1 + \\ &+ L'_2)C'_2] / C'_2}, \quad Z_{\text{сТ}} = \\ &= \sqrt{L''_1 / C''_2 [1 - \omega^2 L''_1 (C''_1 + C''_2)]}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

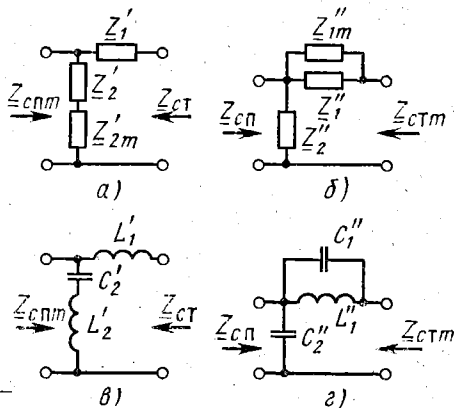


Рис. 9.7. Г-образные полузвенья фильтров типа *т*

Наложим условие, что эти полузвенья можно соединять с полузвеньями типа ρ по принципу согласования характеристических сопротивлений. Для этого *сопротивления (9.40) должны совпадать с сопротивлениями (9.35) на всех частотах*. Нетрудно видеть, что такое равенство сопротивлений соблюдается при следующих параметрах полузвеньев типа m :

$$L'_1 = L''_1 = mL, \quad C'_2 = C''_2 = mC, \quad L'_2 = \left(\frac{1}{m} - m\right)L, \\ C'_1 = \left(\frac{1}{m} - m\right)C, \quad (9.41)$$

где m — постоянная величина.

Частоту среза этих полузвеньев можно определить, приравняв нулю первое сопротивление (9.40) или знаменатель во второй формуле (9.40):

$$\omega_c = 1/\sqrt{(L'_1 + L'_2)C'_2} = 1/\sqrt{L''_1(C''_1 + C''_2)}. \quad (9.42)$$

Из соотношений (9.39) и (9.41), (9.42) определяется частота бесконечного затухания:

$$\omega_\infty = \omega_c/\sqrt{1 - m^2}, \quad 0 \leq m < 1. \quad (9.43)$$

Здесь правое неравенство вытекает из условия $\omega_\infty > \omega_c$, а значение $m = 0$ соответствует переходу полузвена типа m в полузвено типа ρ .

При выбранных параметрах (9.41) частоты среза (9.42) и (9.34) совпадают, а характеристические сопротивления (9.40) описываются прежними упрощенными уравнения (9.36). При этом обычным образом определяются два других характеристических сопротивления:

$$Z_{сгm} = \rho\eta^2\sqrt{1 - \Omega^2}, \quad Z_{снm} = \frac{\rho}{\eta^2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad \eta^2 = \frac{1}{1 - (1 - m^2)\Omega^2}, \quad (9.44)$$

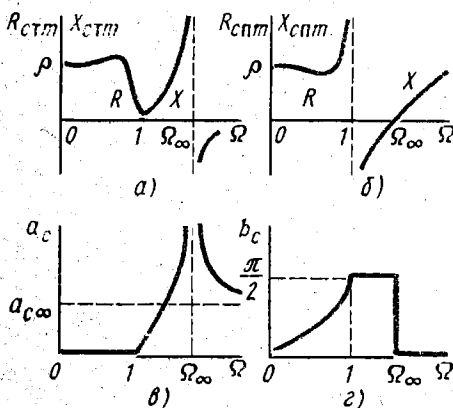


Рис. 9.8. Частотные зависимости характеристических параметров полузвена ФНЧ типа m

где $\eta^2 = \eta^2(\Omega)$ — вспомогательная функция.

Частотные характеристики этих сопротивлений показаны на рис. 9.8, а, б. Из этих рисунков видно, что в большей части полосы прозрачности характеристические сопротивления (9.44) меньше отклоняются от своего номинального значения ρ , чем в полузвеньях типа ρ (см. рис. 9.6, а). Это улучшает условия согласования полузвеньев типа m с диссипативными нагрузочными сопротивлениями $R_{01} = R_{02} = \rho$.

Поэтому такие полузвенья целесообразно использовать в качестве окончательных полузвеньев в многозвенных цепочечных фильтрах.

Характеристическое затухание и характеристическая фаза полузвеньев типа m определяются в полосе прозрачности по формулам (9.12), в полосе непрозрачности $[\omega_c, \omega_\infty]$ по формулам (9.20) и в полосе непрозрачности $[\omega_\infty, \infty]$ по формулам (9.16):

$$\begin{aligned} a_c|_{\omega \leq \omega_c} &= \text{Ar ch } m\eta\Omega, \quad a_c|_{\omega \geq \omega_\infty} = \text{Ar sh } m|\eta|\Omega, \\ b_c|_{\omega \leq \omega_c} &= \text{arcsin } m\eta\Omega, \quad b_c|_{\omega \leq \omega_c} = \pi/2, \quad b_c|_{\omega \geq \omega_\infty} = 0, \end{aligned} \quad (9.45)$$

где η определяется последним равенством (9.44).

Частотные характеристики этих параметров приведены на рис. 9.8, *в, г*. Из второй формулы (9.45) видно, что при $\Omega \geq \Omega_\infty$ характеристическое затухание фильтров типа m уменьшается вплоть до значения

$$a_{c\infty} = a_c|_{\Omega \rightarrow \infty} = \text{Ar sh } m/\sqrt{1-m^2}. \quad (9.46)$$

Такое уменьшение затухания ухудшает свойства полузвена типа m по сравнению с полузвеном типа p . При совместном использовании указанных полузвеньев их отмеченные недостатки взаимно компенсируются.

Формулы (9.32) — (9.46) позволяют рассчитывать цепочечные фильтры по характеристическим и рабочим параметрам, как описано в § 9.2.2.

Селективные свойства цепочечных фильтров можно анализировать качественно по соотношению реактивных сопротивлений плеч полузвена фильтра:

$$0 \leq -X_1/X_2 \leq 1, \quad X_1/X_2 = \pm \infty, \quad X_1/X_2 = \text{const}. \quad (9.47)$$

Здесь первое соотношение является условием прозрачности полузвена. Оно получается из условия (9.3) при подстановке в него значений основных параметров из матрицы (9.33). Второе соотношение (9.47) является условием образования бесконечного затухания. Оно вытекает как из соотношений (9.16), (9.20), (9.33), так и из физических соображений. Третье соотношение (9.47) является условием постоянства характеристического затухания и выводится аналогично предыдущему.

Для использования соотношений (9.47) надо построить графики $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ и $-X_2(\omega)$, как это сделано на рис. 9.9, *а—в* для полузвеньев ФНЧ (см. рис. 9.5, *б* и 9.7, *в, г*). С учетом соотношений (9.47) по этим графикам можно качественно построить графики $a_c(\omega)$ (рис. 9.9, *г—е*).

2. Мостовые фильтры. Одной из разновидностей мостовых фильтров является X -образный селективный четырехполюсник (см. рис. 8.5, *в*). Будучи каноническим, он эквивалентен соответствующему цепочечному симметричному фильтру.

На рис. 9.10, *а, г* изображены симметричные звенья ФНЧ типа p , полученные из двух одинаковых полузвеньев (см.

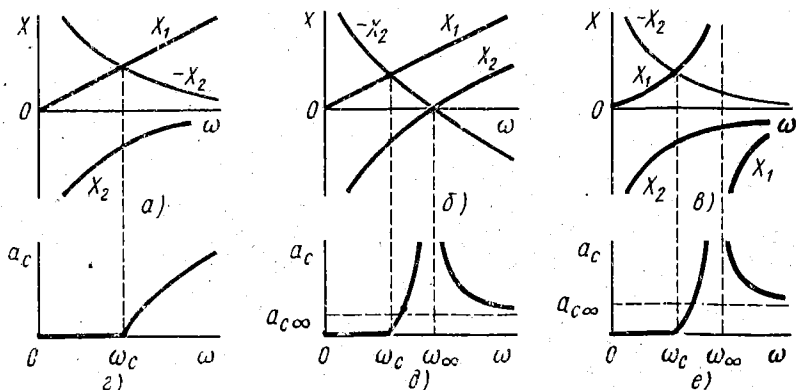


Рис. 9.9. Графический анализ характеристического затухания цепочечных полузвеньев ФНЧ

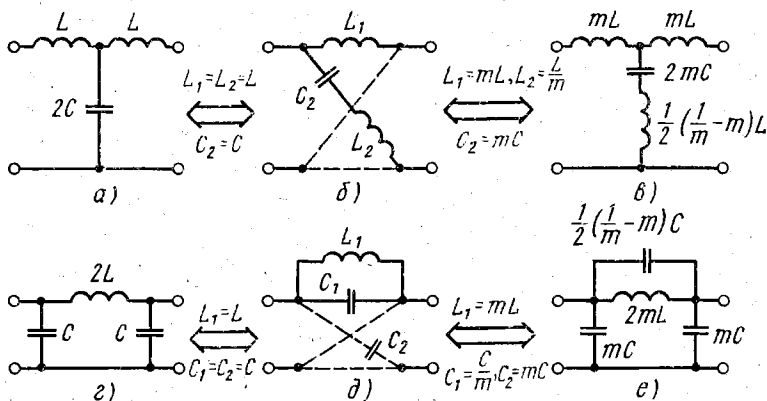


Рис. 9.10. Эквивалентные звенья цепочечных и мостовых ФНЧ

рис. 9.5, в, г). Им эквивалентны Х-образные звенья ФНЧ, показанные на рис. 9.10, б, д, где пунктирными линиями отображены плечи схемы, идентичные парным прямым и скрещенным плечам. Как схемы этих мостовых фильтров, так и их параметры, указанные у стрелок эквивалентного перехода, получены по теореме бисекции (8.51).

На рис. 9.10, в, е показаны симметричные звенья ФНЧ типа m , составленные из двух одинаковых полузвеньев (см. рис. 9.7, в, г). Из теоремы бисекции (8.51) вытекает, что в тех же мостовых звеньях ФНЧ (рис. 9.10, б, д) достаточно изменить параметры, чтобы они приобрели свойства ФНЧ типа m . Эти параметры указаны на рис. 9.10 у соответствующих стрелок эквивалентного перехода.

Изменение свойств мостового фильтра при изменении его параметров можно пояснить графически. Для графического ана-

лиза этих свойств можно использовать соотношения, которые получаются аналогично соотношениям (9.47):

$$X_1/X_2 \leq 0, \quad X_1/X_2 = 1, \quad X_1/X_2 = \text{const} \neq 1. \quad (9.48)$$

Здесь первое соотношение определяет границы полосы прозрачности, второе является условием образования полюса затухания, а третье — условием постоянства характеристического затухания.

На рис. 9.11, а, б построены графики $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$ для мостового ФНЧ (см. рис. 9.10, б) при разных его параметрах. Второе условие (9.48) выполняется при $\omega \rightarrow \infty$ (рис. 9.11, а) и $\omega = \omega_\infty$ (рис. 9.11, б). Этим обстоятельством и обусловлены различия в графиках затухания, которые построены на рис. 9.11, в, г с учетом соотношений (9.48).

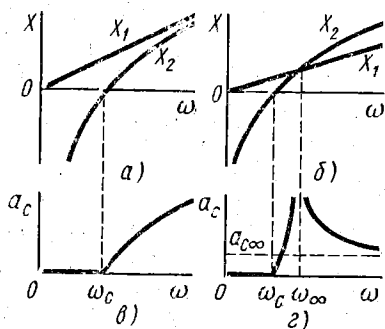


Рис. 9.11. Графический анализ характеристического затухания мостового ФНЧ

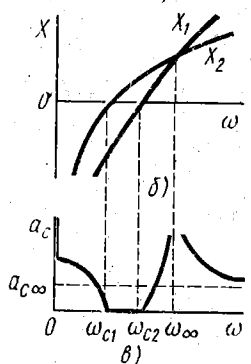
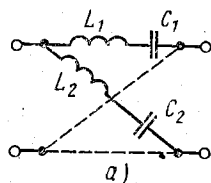


Рис. 9.12. Схема мостового ПФ и его характеристики

ФВЧ, ПФ и РФ мостового типа могут быть получены из соответствующих звеньев цепочечных фильтров также с помощью теоремы бисекции. При этом их расчет, как и расчет мостовых ФНЧ, можно производить по формулам (9.32) — (9.46) для эквивалентных цепочечных звеньев типа p или m .

При эквивалентном переходе от цепочечных к мостовым звеньям X-образные ПФ и РФ имеют сложные схемы. Однако разнообразие свойств мостовых фильтров позволяет получить и простые схемы X-образных ПФ и РФ. Для примера на рис. 9.12, а показана простая схема мостового ПФ, на рис. 9.12, б построены характеристики $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$ этого фильтра, а на рис. 9.12, в с учетом соотношений (9.48) найдена для него частотная зависимость $a_c(\omega)$.

X-образные фильтры имеют большое количество элементов.

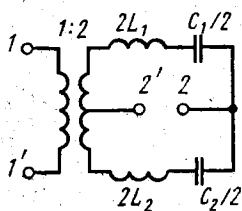


Рис. 9.13. Схема дифференциально-мостового ПФ

От этого недостатка свободны дифференциально-мостовые фильтры. Они эквивалентны по характеристикам Х-образным фильтрам, но имеют в два раза меньшее количество реактивных элементов. Для примера на рис. 9.13 показана схема дифференциально-мостового ПФ, эквивалентного Х-образному ПФ (рис. 9.12, а). Этот фильтр содержит дифференциальный идеальный трансформатор и два плеча с сопротивлениями $2Z_1$ и $2Z_2$, где Z_1 и Z_2 — сопротивления плеч Х-

образного фильтра (см. рис. 8.5, в). Таким образом, в обоих фильтрах сигнал поступает к выходным зажимам двумя путями через одинаковые сопротивления. Скрещивание плеч в Х-образной схеме заменяется в дифференциально-мостовом фильтре соответствующим изменением фаз колебаний, поступающих к разным плечам от разных половин вторичной обмотки дифференциального трансформатора.

Мостовые фильтры строят также в виде Т-образных фильтров с перекрытием (рис. 9.14, а), которые эквивалентны цепочечным фильтрам типа *m*. В этом легко убедиться, преобразовав звезду Z_1, Z_1, Z_2 в треугольник (рис. 9.14, б) или треугольник Z_1, Z_1, Z_2 в звезду (рис. 9.14, в).

3. Волновые фильтры. Волновые фильтры строят из отрезков волноводов и других систем с распределенными параметрами. Эквивалентные схемы таких фильтров состоят из резонансных и расстроенных отрезков длинных линий. Поскольку эти отрезки являются многорезонансными системами, волновые фильтры имеют характеристики, подобные характеристикам ПФ (см. рис. 9.1, е). Однако в них используется обычно одна основная полоса пропускания (около частоты f_0 на рис. 9.1, е), а помехи в остальных полосах предварительно подавляются другим фильтром. Поэтому будем рассматривать волновые фильтры в качестве ПФ.

Простейшее звено волнового фильтра, показанное на рис. 9.15, а, состоит из трех четвертьволновых отрезков линии без потерь с разными волновыми сопротивлениями. Такие звенья можно

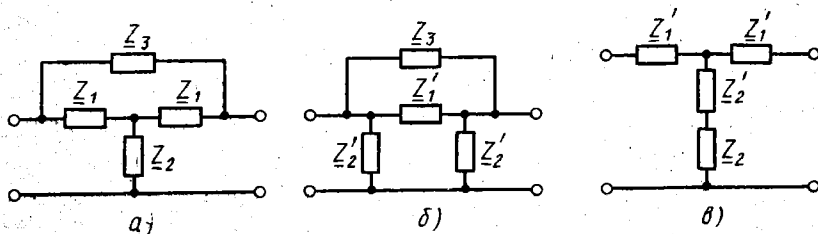


Рис. 9.14. Т-образный мостовой фильтр и его эквивалентные схемы

соединять цепочечно по принципу согласования характеристик стических сопротивлений.

В общем случае волновые фильтры относятся к цепям неминимально-фазового типа. Однако, рассматривая лишь частотные характеристики затухания волновых фильтров, можно не учитывать дополнительные фазовые сдвиги, происходящие при распространении волн в подобных фильтрах. При этом можно строить для них эквивалентные схемы с сосредоточенными параметрами, относящиеся к цепям минимально-фазового типа.

Для нахождения эквивалентной схемы простейшего звена волнового фильтра (рис. 9.15, а) наложим следующие ограничения на его параметры:

$$k = \rho_2 / \rho_1 \ll 1, |v| \ll 1, v^2 \ll k. \quad (9.49)$$

Здесь первое условие означает, как показано ниже, что фильтр является узкополосным, второе условие ограничивает диапазон расстроек, в котором рассматриваются характеристики фильтра, а третье условие означает, что диапазон расстроек v соизмерим с шириной полосы пропускания фильтра, определяемой величиной k .

С помощью цепочечной матрицы четвертьволнового отрезка линии без потерь (см. табл. П.19) найдем матрицу волнового звена:

$$(a) = \begin{pmatrix} -\pi v/4 & j\rho_1 \\ j/\rho_1 & -\pi v/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi v/4 & j\rho_2 \\ j/\rho_2 & -\pi v/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi v/4 & j\rho_1 \\ j/\rho_1 & -\pi v/4 \end{pmatrix}.$$

Произведя перемножение матриц и отбросив пренебрежимо малые члены в соответствии с неравенствами (9.49), получим

$$(a) = \begin{pmatrix} \pi v/4k & -j\rho_1/k \\ jk(\pi^2 v^2/16k^2 - 1)/\rho_1 & \pi v/4k \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

Из условия прозрачности (9.8) по найденной матрице определяем частоты среза и относительную ширину полосы прозрачности фильтра при $v \approx 2\Delta f/f_0$:

$$f_{c1} = f_0(1 - 2k/\pi), \quad f_{c2} = f_0(1 + 2k/\pi), \quad \delta_0 = (f_{c2} - f_{c1})/f_0 = 4k/\pi. \quad (9.51)$$

Первое неравенство (9.49) и последняя формула (9.51) подтверждают, что рассматриваемое звено обладает свойствами узкополосного фильтра. Из матрицы (9.50) по формулам (8.49)

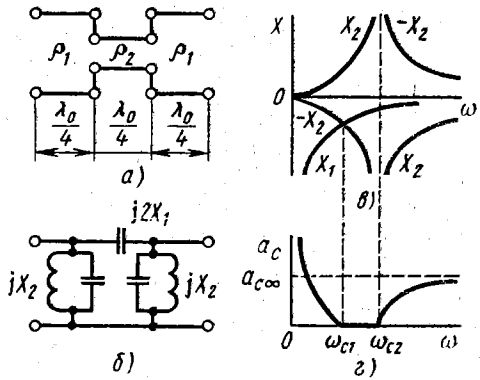


Рис. 9.15. Звено волнового фильтра, его эквивалентная схема и характеристики

определяем также параметры его эквивалентной П-образной канонической схемы (рис. 9.15, б):

$$2Z_1 = -j\rho_1/k, \quad Z_2 = \rho/j(v - v_0), \quad \rho = 4\rho_1/\pi, \quad v_0 = 4k/\pi. \quad (9.52)$$

Здесь Z_1 является емкостным сопротивлением, которое в узком диапазоне частот остается практически постоянным. Второе равенство (9.52) описывает сопротивление параллельного резонансного контура без потерь, который расстроен на величину v_0 относительно четвертьволновых отрезков линий. Характеристики сопротивлений плеч эквивалентного четырехполюсника приведены на рис. 9.15, в, а характеристика $a_c(\omega)$ построена с учетом соотношений (9.47) на рис. 9.15, г.

В волновых фильтрах могут применяться также резонансные волновые двухполюсники или эквивалентные им резонансные элементы с сосредоточенными параметрами. Пример звена такого фильтра приведен на рис. 9.16, а. Приняв прежние соотношения (9.49), аналогичным образом находим матрицу этого звена:

$$(a) = \begin{pmatrix} 1 & j\rho_1 v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi v/4 & j\rho_2 \\ j/\rho_2 & -\pi v/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j\rho_1 v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или

$$(a) = \begin{pmatrix} -v/k & j\rho_2(1 - v^2/k^2) \\ j/\rho_2 & -v/k \end{pmatrix}. \quad (9.53)$$

Согласно формулам (8.50) и матрице (9.53) звено волнового фильтра (рис. 9.16, а) имеет эквивалентную схему в виде Т-образного четырехполюсника (рис. 9.16, б) с параметрами

$$Z_1 = j\rho_1(v + v_0), \quad Z_2/2 = -j\rho_2, \quad v_0 = k. \quad (9.54)$$

При указанных параметрах звено является полосовым фильтром в виде связанных контуров с внутренне-емкостной связью. По соотношениям (9.47) с учетом параметров (9.54) может быть найдена характеристика затухания этого фильтра.

4. Пассивные RC-фильтры. Пассивные реактивные фильтры из-за наличия в них индуктивностей имеют на низких частотах

большие габариты. Но и на высоких частотах данные фильтры не вписываются в габариты микроминиатюризованных устройств связи, выполненных на интегральных схемах. Кроме того, LC-фильтры не всегда могут считаться реактивными из-за наличия заметных потерь энергии в катушках индуктивности. Низкая же их добротность приводит к ухудшению характеристик фильтра. От этих недостатков свободны *безындуктивные фильтры*, не содержащие катушек индуктивности. Известны две разновидности таких фильтров — пассивные и активные RC-фильтры.

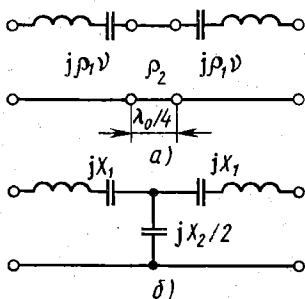


Рис. 9.16. Фильтр с волновыми двухполюсниками и его эквивалентная схема

Пассивные RC-фильтры представляют собой пассивные RC-цепи, обладающие необходимыми частотными характеристиками. Простейшими примерами таких цепей являются RC-фильтр нижних частот (см. рис. 3.16, б) с характеристиками (3.77), показанными на рис. 3.17, б, и RC-фильтр верхних частот (см. рис. 3.16, а) с характеристиками (3.75), (3.76), изображенными на рис. 3.17, а. Эти цепи являются фильтрами (звеньями) первого порядка. Их полоса пропускания и избирательность определяются из уравнений частотных характеристик (3.75), (3.77). При этом граничная частота ω_r на уровне $A_r = K_r/K_{\max} = K_r = 1/\sqrt{2}$ и коэффициент прямоугольности (4.25) на уровнях $H_r = 1/K_r = \sqrt{2}$, $H_0 = \frac{1}{K} \Big|_{\omega = \omega_0}$ имеют значения

$$\omega_r = 1/RC, \quad K_{\Pi/\sqrt{2}}^{H_0} = \omega_0/\omega_r = \sqrt{H_0^2 - 1} \approx H_0. \quad (9.55)$$

Интересно отметить совпадение формул (4.24) и (9.55). Сравнение последних формул (9.55) и (9.38) показывает, что RC-звено ФНЧ (см. рис. 3.16, б) имеет меньшую избирательность, чем аналогичное LC-полузвено (см. рис. 9.5, в).

Повышение избирательности в RC-фильтрах достигается цепочечным соединением однотипных звеньев. Так, цепь рис. 3.19, в является двухзвенным RC-фильтром нижних частот. Уравнение его частотной характеристики можно определить из передаточной функции (3.88):

$$K = 1/\sqrt{(1 - \omega^2 C^2 R^2)^2 + 9\omega^2 C^2 R^2}.$$

Решив уравнения, получающиеся из этого равенства при $K_r = K|_{\omega = \omega_r} = 1/\sqrt{2}$ и $H_0 = 1/K|_{\omega = \omega_0}$, находим значения граничной частоты и коэффициента прямоугольности ФНЧ:

$$\omega_r \approx 0,37/RC, \quad K_{\Pi/\sqrt{2}}^{H_0} = \omega_0/\omega_r \approx 2,7\sqrt{H_0^2 - 1} \approx 2,7\sqrt{H_0}. \quad (9.56)$$

Сравнение формул (9.55) и (9.56) показывает, что при цепочечном соединении звеньев полоса пропускания RC-фильтра сужается, а его избирательность увеличивается.

При цепочечном соединении RC-звеньев ФВЧ (см. рис. 3.16, а) и ФНЧ (см. рис. 3.16, б) получается полосовой RC-фильтр. Однако его характеристики неудовлетворительны. В частности, такой фильтр имеет излишне широкую полосу пропускания.

Хорошую частотную характеристику имеет режекторный RC-фильтр в виде двойного T-образного моста (рис. 9.17). Сигнальный граф этого фильтра показан на рис. 9.18, а, где согласно формуле (8.77) $2\mu_1 = \mu_3 = 1/(1 + \tau p)$, $2\mu_2 = \mu_4 = \tau p/(1 + \tau p)$, $\tau = RC$, $p = j\omega$. После устранения узлов \dot{U}_1 , \dot{U}_2 получаем граф с одним прямым путем (рис. 9.18, б). Из ин-

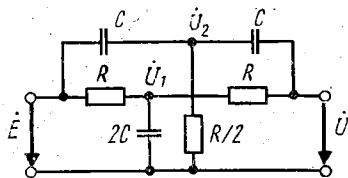


Рис. 9.17. Схема двойного T-образного RC-моста.

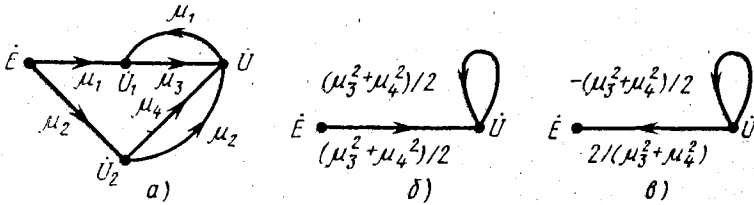


Рис. 9.18. Сигнальный граф двойного Т-образного моста и его инверсия

вертированного графа (рис. 9.18, в) находим его обратную передачу:

$$\underline{H} = 1/\underline{K} = [2 - (\mu_3^2 + \mu_4^2)]/(\mu_3^2 + \mu_4^2) = (1 - \tau^2\omega^2 + j4\tau\omega)/(1 - \tau^2\omega^2).$$

Отсюда коэффициент передачи фильтра

$$\underline{K} = 1/\underline{H} = (1 - \Omega^2)/(1 - \Omega^2 + j4\Omega) \approx j\nu/4, \quad (9.57)$$

где $\Omega = \omega/\omega_0$ — относительная частота; ν — нормированная расстройка (3.110) относительно частоты

$$\omega_0 = 1/RC. \quad (9.58)$$

Частотная и фазовая характеристики режекторного RC-фильтра (см. рис. 9.17) построены по соотношению (9.57) на рис. 9.19.

5. **Активные КС-фильтры.** ГОСТ 24375—80 определяет активный фильтр как электрический частотный фильтр, содержащий один или несколько усилительных каскадов. Однако под такое определение подходит и резонансный усилитель, который не принято относить к активным фильтрам.

Поэтому активным фильтром будем называть частотный фильтр, содержащий один или несколько активных четырехпо-

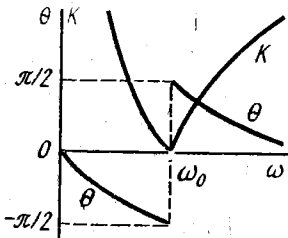


Рис. 9.19. Характеристики двойного Т-образного RC-моста

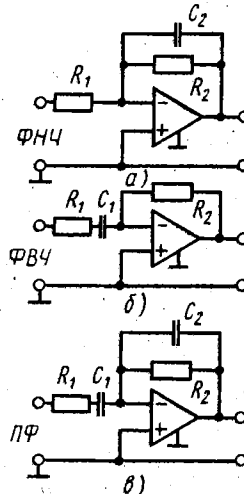


Рис. 9.20. Схемы ARC-фильтров на основе ИОУ

люскиков с обратной связью, за счет которой формируется АЧХ фильтра. Если этот фильтр не содержит индуктивных элементов, то его называют активным RC-фильтром, или ARC-фильтром.

Известны две разновидности ARC-фильтров — необратимые и обратимые ARC-фильтры.

Необратимые ARC-фильтры образуются тремя основными способами. Простейший способ заключается в использовании ИОУ (см. рис. 3.43, а) с передаточной функцией (3.165). Из формулы видно, что варьированием сопротивлений Z_1 и Z_2 можно получать различные частотные характеристики. На рис. 9.20, а, б показаны схемы ARC-фильтров соответственно нижних и верхних частот. Согласно формуле (3.165) их характеристики описываются соотношениями

$$\underline{K} = -K_{\max}/(1 + j\Omega), \quad K = K_{\max}/\sqrt{1 + \Omega^2}, \quad \omega_r = 1/R_2C_2, \quad (9.59)$$

$$\underline{K} = -jK_{\max}\Omega/(1 + j\Omega), \quad K = K_{\max}\Omega/\sqrt{1 + \Omega^2}, \quad \omega_r = 1/R_1C_1, \quad (9.60)$$

где $K_{\max} = R_2/R_1$, $\omega_r = \omega|_{K=K_{\max}/\sqrt{2}}$, $\Omega = \omega/\omega_r$.

Частотные характеристики (9.59), (9.60) в относительном масштабе имеют тот же вид, что и характеристики соответствующих пассивных RC-фильтров (см. рис. 3.17, а). Коэффициент прямоугловности таких ARC-фильтров имеет прежнее значение (9.55).

Аналогично предыдущему рассмотрению, из формулы (3.165) можно найти, что цепь рис. 9.20, в является полосовым ARC-фильтром с параметрами

$$\omega_0 = 1/\sqrt{R_1R_2C_1C_2}, \quad \delta = \Delta F/f_0 = \sqrt{R_1C_1/R_2C_2} + \sqrt{R_2C_2/R_1C_1}. \quad (9.61)$$

Здесь $\omega_0 = 2\pi f_0$ — так называемая квазирезонансная частота, на которой образуется мнимый резонанс (квазирезонанс), соответствующий максимальному коэффициенту передачи $K_{\max} = 1/(R_1/R_2 + C_2/C_1)$.

Из формулы (9.61) видно, что относительная полоса пропускания δ получается очень большой, как и в пассивном полосовом RC-фильтре. Ее минимальное значение $\delta_{\min} = \delta|_{R_1=R_2, C_1=C_2} = 2$.

Второй способ построения необратимых ARC-фильтров заключается в использовании подходящего фильтра в цепи обратной связи произвольного усилителя (см. рис. 8.45, а). При этом ARC-фильтр, содержащий ФНЧ в цепи обратной связи, имеет характеристики ФВЧ, фильтр, содержащий ФВЧ, — характеристики ФНЧ, а фильтр, содержащий режекторный фильтр, — характеристики полосового фильтра (и наоборот).

Для примера на рис. 9.21 показана схема полосового ARC-фильтра на основе ИОУ с коэффициентом передачи (3.165), который без частотозависимой обратной связи имеет коэффициент

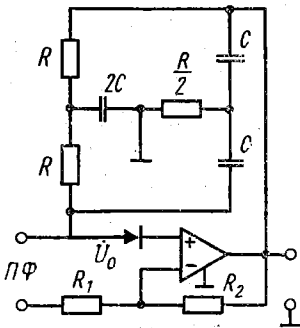


Рис. 9.21. Схема полосового ARC-фильтра на основе режекторного фильтра

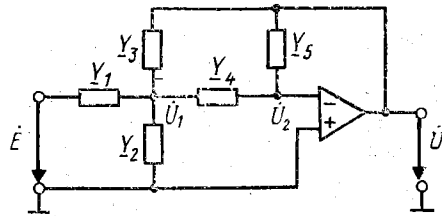


Рис. 9.22. Схема операционного усилителя с двухпетлевой обратной связью

усиления $K = R_2/R_1 = K_{\max}$. В цепи обратной связи этого усилителя стоит режекторный RC-фильтр (рис. 9.17). Коэффициент передачи (8.79) полосового ARC-фильтра находим при коэффициенте β , равном величине (9.57):

$$\underline{K}_0 = K_{\max}/(1 + jQ_{\text{эк}}\nu), \quad A = K_0/K_{\max} = 1/\sqrt{1 + Q_{\text{эк}}^2\nu^2}, \quad (9.62)$$

где $Q_{\text{эк}} = K_{\max}/4 = R_2/4R_1$ — эквивалентная добротность, а расстройка ν определяется относительно квазирезонансной частоты (9.58).

Частотная характеристика (9.62) совпадает с характеристикой (4.36) параллельного контура с эквивалентной добротностью $Q_{\text{эк}}$. Ее можно изменять в широких пределах, изменяя соответственно полосу пропускания $\Delta F = f_0/Q_{\text{эк}}$. При $Q_{\text{эк}} \gg 1$ рассмотренный ПФ является узкополосным.

Третий способ образования необратимых ARC-фильтров заключается в конструировании специальных схем с заданными свойствами. Эти схемы получают либо путем синтеза цепей с заданными характеристиками (см. § 10.2.6), либо путем целенаправленного инженерного поиска. Поэтому найденные этим способом ARC-фильтры во многих случаях являются предметом изобретений. Приведем два примера таких фильтров.

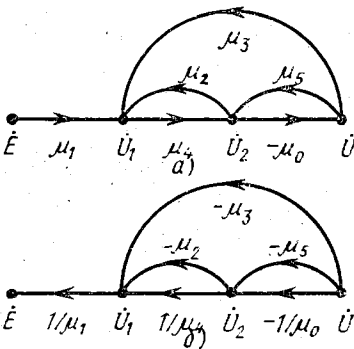


Рис. 9.23. Сигнальный граф ОУ (рис. 9.22) и его инверсия

В ARC-фильтрах могут использоваться произвольные усилители с так называемой *многопетлевой обратной связью*. На рис. 9.22 показана обобщенная схема ОУ с $\mu_0 \rightarrow \infty$, в котором многопетлевая обратная связь образуется двумя контурами

\dot{E} , \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 и \underline{Y}_3 , \underline{Y}_4 , \underline{Y}_5 , т. е. является двухпетлевой. Сигнальный граф этого ARC-фильтра построен на рис. 9.23, а, где согласно формуле (8.77) $\mu_1 = \underline{Y}_1/\underline{Y}_{11}$, $\mu_2 = \underline{Y}_4/\underline{Y}_{11}$, $\mu_3 = \underline{Y}_3/\underline{Y}_{11}$, $\mu_4 = \underline{Y}_4/\underline{Y}_{22}$, $\mu_5 = \underline{Y}_5/\underline{Y}_{22}$, $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$, $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5$.

После инверсии этого графа (рис. 9.23, б) находим его обратную передачу при $\mu_0 \rightarrow \infty$; $\underline{H} = (-\mu_3 - \mu_5/\mu_4)/\mu_1$, или

$$\underline{H} = -(\underline{Y}_3\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5\underline{Y}_{11})/\underline{Y}_1\underline{Y}_4. \quad (9.63)$$

Выбирая здесь различным образом \underline{Y}_k , можно получить необходимые передаточные функции различных ARC-фильтров. Если, например, в общем случае $Y_k(p) = G_k + C_{kp}$, $p = j\omega$, то и $Y_{11}(p) = G_{11} + C_{11}p$. При этом формулу (9.63) можно переписать в общем виде:

$$K(p) = 1/H(p) = (a_2p^2 + a_1p + a_0)/(b_2p^2 + b_1p + b_0). \quad (9.64)$$

Такая передаточная функция называется биквадратной. В зависимости от значений коэффициентов a_k , b_k она может описывать различные характеристики фильтров разных типов. В частности, при $a_1 = a_2 = 0$ соотношение (9.64) является передаточной функцией ФНЧ второго порядка, а при $a_0 = a_1 = 0$ — передаточной функцией ФВЧ второго порядка. Аналогично, при $a_0 = a_2 = 0$ получается полосовой, а при $a_1 = 0$ — режекторный ARC-фильтры. Однако, сравнивая соотношения (9.63) и (9.64), при ненулевых параметрах получаем $a_1 = G_1C_4 + G_4C_1 \neq 0$, так что схема с двухпетлевой обратной связью не может являться режекторным фильтром. Поэтому рассмотрим только три конкретных схемы.

Из соотношения (9.63) следует, что при $Y_{1,3,4} = 1/R_{1,3,4}$ и $Y_{2,5}(p) = C_{2,5}p$ получается ФНЧ (рис. 9.24, а), для которого

$$H_{\text{ФНЧ}} = -R_1R_4C_2C_5[p^2 + (1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4)p/C_2 + 1/R_3R_4C_2C_5]. \quad (9.65)$$

Аналогично получают ARC-фильтр верхних частот (рис. 9.24, б) и полосовой ARC-фильтр (рис. 9.24, в), для которых

$$H_{\text{ФВЧ}} = -C_3[p^2 + (C_1/C_3C_4 + 1/C_3 + 1/C_4)p/R_5 + 1/R_2R_5C_3C_4]/C_1p^2, \quad (9.66)$$

$$H_{\text{ПФ}} = -R_1C_3[p^2 + (1/C_3 + 1/C_4)p/R_5 + (1/R_1 + 1/R_2)/R_4C_3C_4]/p. \quad (9.67)$$

Из соотношений (9.65) — (9.67) видно, что в рассмотренных фильтрах невозможно менять независимо друг от друга коэффициенты a_k , b_k передаточной функции (9.64). Это затрудняет получение нужных АЧХ или ФЧХ фильтров.

ARC-фильтр с биквадратной передаточной функцией (9.64), в котором изменение параметров тех или иных элементов цепи позволяет менять любой из коэффициентов a_k , b_k независимо от других коэффициентов, называется биквадом. Существует множество схем биквадов, которые различаются по сложности, тех-

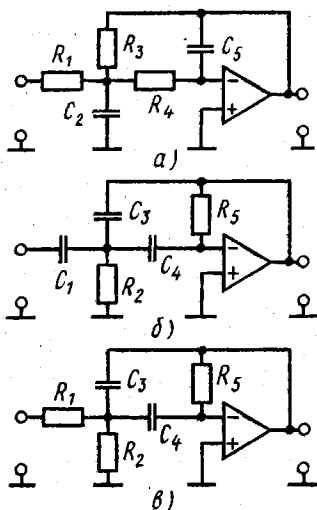


Рис. 9.24. Схемы ARC-фильтров с двухпетлевой обратной связью

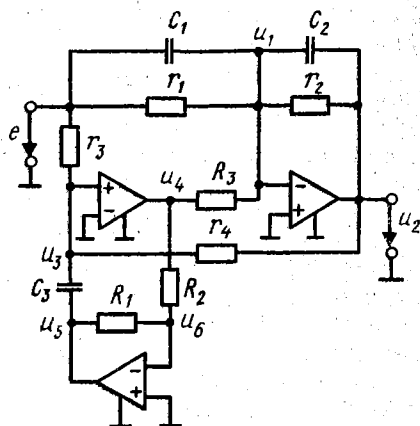


Рис. 9.25. Схема биквада

нологичности, стабильности, удобству регулировки и другим показателям. Одна из таких схем приведена на рис. 9.25, где показаны узловые операторные напряжения. Сигнальный граф этого биквада построен на рис. 9.26, а, где согласно формуле (8.77) $\mu_1 = Y_1/Y_{11}$, $\mu_2 = Y_2/Y_{11}$, $\mu_3 = G_3/Y_{11}$, $\mu_4 = g_3/Y_{33}$, $\mu_5 = g_4/Y_{33}$, $\mu_6 = Y_3/Y_{33}$, $\mu_7 = G_2/Y_{66}$, $\mu_8 = G_1/Y_{66}$, $Y_{11} = Y_1 + Y_2 + G_3$, $Y_{33} = Y_3 + g_3 + g_4$, $Y_{66} = G_1 + G_2$, $G_k = 1/R_k$, $g_k = 1/r_k$, $Y_{1,2} = C_{1,2}p + g_{1,2}$, $Y_3 = C_3p$. Устранив узлы u_3 , u_4 , u_5 , u_6 , получаем граф с одним прямым путем, показанный на рис. 9.26, б, где $\mu_9 = \mu_1 + \mu_3\mu_4\mu_8/\mu_6\mu_7$, $\mu_{10} = \mu_2 + \mu_3\mu_5\mu_8/\mu_6\mu_7$ (при $\mu_0 \rightarrow \infty$). После инверсии этого графа, произведенной на рис. 9.26, в, находим обратную передачу $H(p) = -(Y_2Y_3G_2 + G_1G_3g_4)/(Y_1Y_3G_2 + G_1G_3g_3)$. Отсюда получаем коэффициент передачи биквада:

$$K(p) = 1/H(p) = -(C_1p^2 + p/r_1 + a/r_3)/(C_2p^2 + p/r_2 + a/r_4), \quad (9.68)$$

где $a = R_2/R_1R_3C_3$.

Сравнивая формулы (9.64) и (9.68), убеждаемся в возможности независимой регулировки коэффициентов a_k , b_k при $a = \text{const}$. Такой биквад может служить и режкторным ARC-фильтром при устранении резистора r_1 , поскольку $a_1 \rightarrow 0$ при $r_1 \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь обратимые ARC-фильтры. Известны два способа их образования, которые были рассмотрены на примере безындуктивного резонансного контура (см. § 4.2.6). По первому способу в любом пассивном LC-фильтре все индуктивные элементы имитируются инвертированными емкостями, для чего применяют инверторы положительных сопротивлений (ИПС)

(см. § 3.5.5). Обычно в таких фильтрах в качестве ИПС используют гираторы, поэтому они могут быть названы *гираторными ARC-фильтрами*.

Следует подчеркнуть, что имитируемые индуктивные элементы обладают столь же высокой добротностью, как и инвертируемые емкостные элементы, потери которых весьма малы. Поэтому гираторные ARC-фильтры не только имеют малые габариты, но и близки к реактивным фильтрам, если исходный LC-фильтр не содержит резисторов.

Основываясь на этом свойстве, полузвенья реактивных ФНЧ, например типов ρ (см. рис. 9.5, в) и m (см. рис. 9.7, в), можно хорошо имитировать гираторными ARC-фильтрами, показанными соответственно на рис. 9.27, а, б. Параметры таких активных полузвеньев следует выбирать с учетом параметров исходных фильтров (см. рис. 9.5, в и 9.7, в): $R^2 C_0 = L$, $R^2 C'_0 = L'_2 = (1/m - m)L$, $R^2 C'_1 = L'_1 = mL$.

Второй способ образования обратимых ARC-фильтров заключается в использовании D-преобразования (4.26) любых пассив-

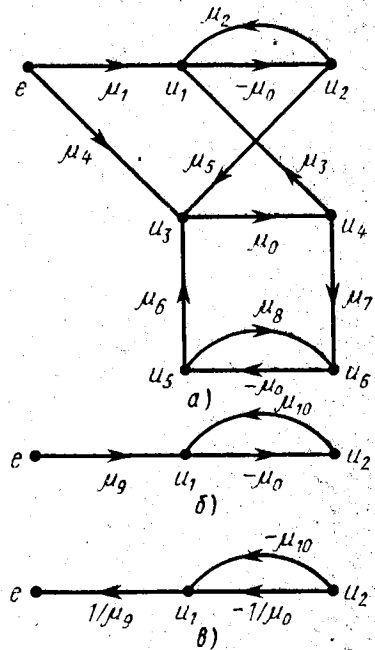


Рис. 9.26. Сигнальный граф биквада и его преобразование

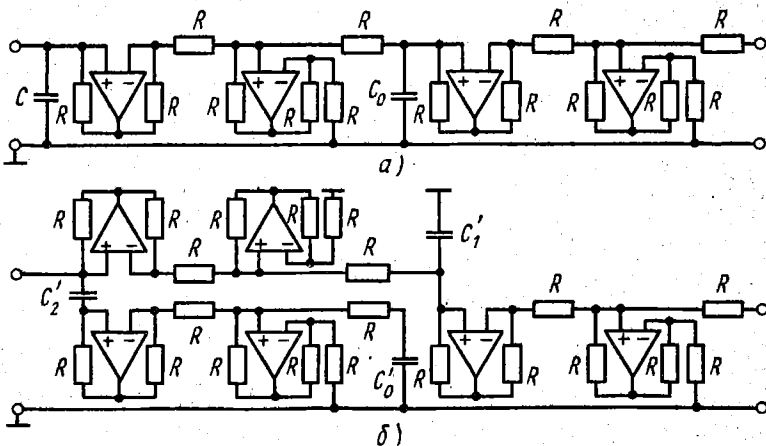


Рис. 9.27. Схемы гираторных ARC-фильтров

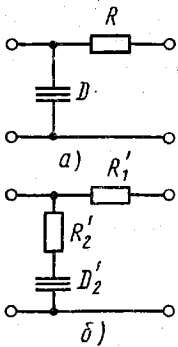


Рис. 9.28. Схемы D-фильтров

ных LC-фильтров, при котором передаточная функция сохраняет свое значение. Фильтры, содержащие D-элементы с отрицательным сопротивлением (3.176), будем называть D-фильтрами или фильтрами типа D.

В качестве примера преобразуем те же реактивные полувенья ФНЧ типов ρ (см. рис. 9.5, в) и m (см. рис. 9.7, в). Схемы полученных при этом реактивных D-фильтров показаны соответственно на рис. 9.28, а, б.

При выборе схемы и расчете ARC-фильтров особое внимание уделяют их устойчивости (см. § 8.5.5) и чувствительности по параметрам (см. § 8.5.4). Если имеются различные схемы с одинаковой, например, селективностью, то из них выбирают схему с наименьшей чувствительностью и наибольшей устойчивостью. При необходимости повышения устойчивости и снижения чувствительности по параметрам можно вводить в схему дополнительные отрицательные обратные связи. Наиболее полный учет всех технических требований к параметрам и характеристикам ARC-фильтров достигается при их синтезе (см. гл. 10).

§ 9.4. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

В электромеханических фильтрах селекция электрических сигналов осуществляется с помощью механических резонансных элементов (механических резонаторов) — стержней, пластин и т. п. Поэтому ЭМФ должны включать в себя электромеханические преобразователи (ЭМП). ЭМП на входе фильтра преобразует электрический сигнал в механические колебания. Эти колебания после фильтрации помех вновь преобразуются на выходе фильтра в электрический сигнал с помощью выходного ЭМП. В качестве ЭМП используются электромагнитные, пьезоэлектрические и магнитострикционные преобразователи.

1. Пьезоэлектрические фильтры. Если резонаторы изготавливаются из пьезоэлектрического материала, то они обладают не только механическими, но и электрическими свойствами. Такие резонаторы называются пьезоэлектрическими или электромеханическими. Они могут выполнять и роль электромеханических преобразователей. Фильтры, изготовленные из пьезоэлектрических резонаторов, называются пьезоэлектрическими. Их разновидностью являются кварцевые фильтры, в которых резонаторы, также называемые кварцевыми, выполнены из кварца.

Пьезоэлектрический резона-

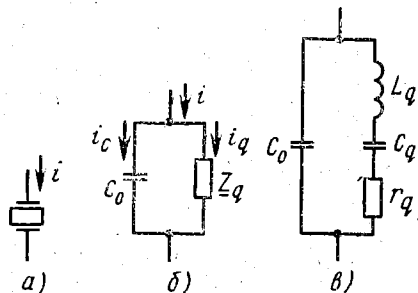


Рис. 9.29. Схематическое изображение и эквивалентные схемы пьезоэлектрического резонатора

тор изображен схематически на рис. 9.29, а. На его гранях нанесены электроды, к которым подводится электрическое напряжение. Через резонатор проходит ток i , который складывается из двух составляющих. Первая составляющая является обычным емкостным током i_c , протекающим через статическую емкость C_0 между электродами. Вторая составляющая i_q обусловлена пьезоэлектрическими явлениями в резонаторе. Поэтому пьезоэлектрический резонатор может быть изображен в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 9.29, б.

Характер сопротивления Z_q , отображающего пьезоэлектрические явления, легко устанавливается из физических соображений. При подведении напряжения к электродам резонатор испытывает деформацию вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта. При деформации резонатора на его гранях, т. е. на электродах, возникают электрические заряды за счет прямого пьезоэлектрического эффекта. Эти заряды и вызывают ток i_q , который зависит от частоты колебаний и получается максимальным при максимальной деформации резонатора. При фиксированной амплитуде подведенного гармонического напряжения деформация максимальна на резонансной частоте резонатора. Поэтому пьезоток i_q изменяется с частотой, как ток последовательного контура (см. рис. 3.31, а). Следовательно, сопротивление Z_q (рис. 9.29, б) может быть отображено с помощью эквивалентных элементов L_q , C_q , r_q , соединенных последовательно (рис. 9.29, в). Таким образом, эквивалентная схема пьезоэлектрического резонатора является сложным параллельным контуром (см. рис. 4.17, б).

Особенностью полученной эквивалентной схемы является высокая добротность $Q_q = \frac{1}{r_q} \sqrt{\frac{L_q}{C_q}}$, обусловленная свойствами механического резонатора. Например, кварцевый резонатор имеет добротность порядка десятков и даже сотен тысяч единиц. При такой высокой добротности пьезоэлектрические резонаторы можно рассматривать как реактивные элементы фильтров. На рис. 9.30, а показаны идеальные характеристики сопротивления $X_q(\omega)$ и проводимости $B_q(\omega) = -1/X_q(\omega)$. На рис. 9.30, б построена частотная характеристика суммарной проводимости $B(\omega)$ пьезоэлектрического резонатора, а на рис. 9.30, в — частотная характеристика его сопротивления $X(\omega) = -1/B(\omega)$. Она согласуется с характеристикой сложного параллельного контура с потерями (см. рис. 4.18, б).

Пьезоэлектрические фильтры бывают цепочечными и мостовыми.

На рис. 9.31, а показано полузвено цепочечного пьезоэлектрического фильтра, а на рис. 9.31, б — его эквивалентная схема. Для согласования работы плеч этого полузвена нулю сопротивления X_1 должен соответствовать полюс сопротивления X_2 , как показано на рис. 9.32, а. Тогда согласно соотношениям (9.47) фильтр будет иметь характеристику затухания, построенную на

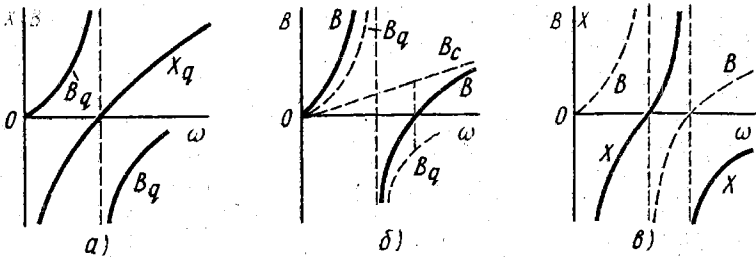


Рис. 9.30. Частотные характеристики сопротивлений и проводимостей пьезоэлектрического резонатора

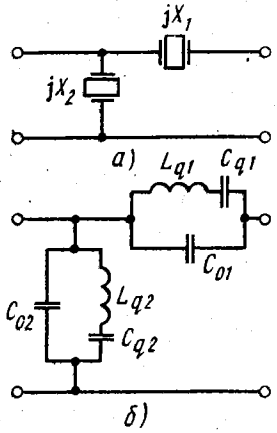


Рис. 9.31. Полуwave цепочного пьезоэлектрического фильтра и его эквивалентная схема

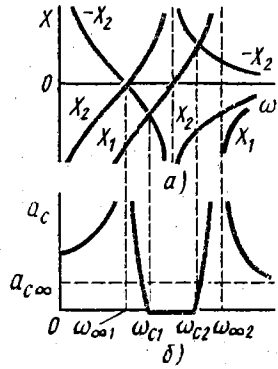


Рис. 9.32. Построение характеристики затухания полуwave цепочного пьезоэлектрического фильтра

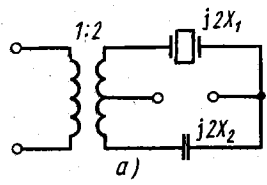


Рис. 9.33. Схема дифференциально-мостового пьезоэлектрического полосового фильтра и построение его характеристики затухания

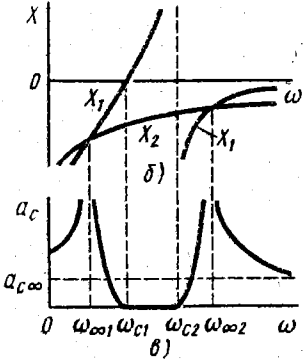


Рис. 9.34. Кварцевый резонатор с расширительной катушкой и построение частотной характеристики его сопротивления

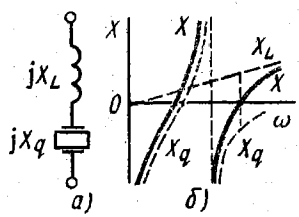


рис. 9.32, б. Таким образом, рассмотренное полужвено является полосовым фильтром с двумя полюсами затухания.

Схема дифференциально-мостового пьезоэлектрического фильтра показана на рис. 9.33, а, а частотные характеристики сопротивлений его плеч построены на рис. 9.33, б. Характеристика затухания этого фильтра построена в соответствии с условиями (9.48) на рис. 9.33, в. Таким образом, рассмотренная схема является полосовым фильтром с двумя полюсами затухания.

Кварцевые резонаторы с высокой добротностью Q_q характеризуются не только малым сопротивлением потерь r_q , но и большой индуктивностью L_q при малой емкости $C_q \ll C_0$. при этом резонансные частоты (4.61) получаются весьма близкими друг

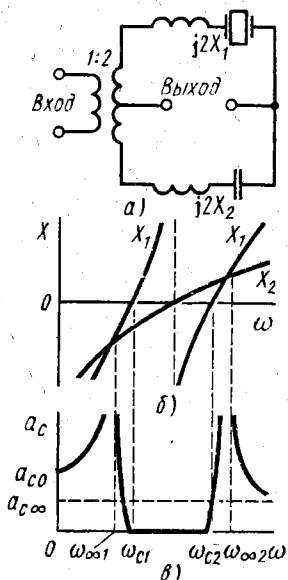
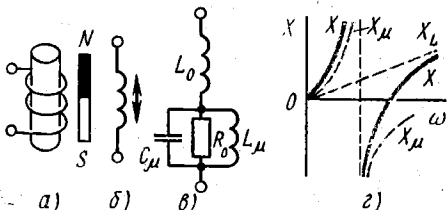


Рис. 9.35. Схема дифференциально-мостового кварцевого полосового фильтра с расширительными катушками и построение его характеристики затухания

Рис. 9.36. Магнестрикционный резонатор:

а — схематическое изображение; б — условное обозначение; в — эквивалентная схема; г — построенные частотной характеристики сопротивления



к другу. Из построения характеристик затухания на рис. 9.32, 9.33, б, в видно, что при указанных соотношениях параметров кварцевые фильтры могут получаться излишне узкополосными. Для расширения полосы прозрачности (и пропускания) кварцевых фильтров применяют так называемые расширительные катушки индуктивности.

На рис. 9.34, а показан кварцевый резонатор с последовательно включенной расширительной катушкой, а на рис. 9.34, б построена частотная характеристика его сопротивления. Второй нуль сопротивления означает, что в такой схеме появляется третий резонанс. За счет этого дополнительного резонанса и расширяется полоса прозрачности кварцевого фильтра, что наглядно видно из рис. 9.35.

На рис. 9.35, а изображена схема с двумя расширительными катушками, полученная из схемы дифференциально-мостового

фильтра (см. рис. 9.33, а). На рис. 9.35, б приведены частотные характеристики сопротивлений плеч этой схемы, а на рис. 9.35, в построена характеристика затухания фильтра в соответствии с условиями (9.48). Построение показывает, что полоса прозрачности расширилась вплоть до частоты дополнительного резонанса.

2. Магнитострикционные фильтры. В магнитострикционных фильтрах также используются механические резонаторы, обладающие и электрическими свойствами. Такой электромеханический резонатор представляет собой катушку индуктивности с сердечником из магнитострикционного материала (рис. 9.36, а, б) и называется *магнитострикционным резонатором*. Сердечник предварительно намагничен или подмагничивается постоянным магнитом, поскольку магнитострикционный эффект является четным, т. е. знак деформации сердечника не зависит от направления магнитного поля.

При прохождении тока через катушку индуктивности сердечник деформируется за счет магнитострикционного эффекта. При этом на ней возникает напряжение, складывающееся из двух составляющих. Первая составляющая является падением напряжения на индуктивности L_0 катушки с заторможенным сердечником. Вторая составляющая напряжения обусловлена магнитоупругим (обратным магнитострикционным) эффектом. Она является максимальной на резонансной частоте механических колебаний сердечника, на которой максимальны сами колебания.

Если амплитуда тока фиксирована, то максимальное падение напряжения при резонансе получается и на параллельном контуре, который имеет на резонансной частоте максимальное сопротивление (см. рис. 3.30, б). Поэтому *влияние магнитострикционного эффекта в эквивалентной схеме резонатора может быть учтено включением параллельного контура последовательно с индуктивностью L_0* (рис. 9.36, в). Частотная характеристика сопротивления такой схемы без учета потерь построена на рис. 9.36, г.

На рис. 9.37, а приведена схема полувзвено цепочечного магнитострикционного фильтра. *Магнитострикционные резонаторы в плечах этого фильтра должны быть настроены так, чтобы полюс сопротивления X_2 совпадал с нулем сопротивления X_1* (рис. 9.37, б). В соответствии с условиями (9.47) на рис. 9.37, в построена частотная характеристика затухания, из которой видно, что рассматриваемое звено является полосовым фильтром с

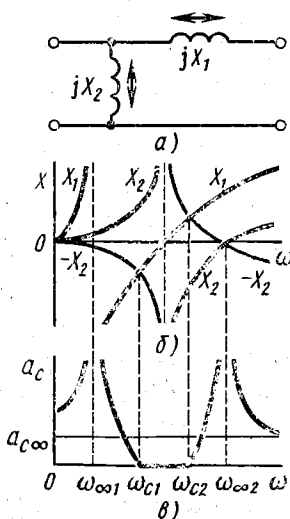


Рис. 9.37. Полувзвено цепочечного магнитострикционного фильтра и построение его характеристики затухания

двумя полюсами затухания. Аналогичные характеристики затухания получаются и в мостовых магнитоотрицательных фильтрах.

3. **Фильтры с механическими резонаторами.** ЭМФ с механическими резонаторами используют в диапазоне частот 50 Гц—1 МГц. На самых низких частотах применяют полосовые *фильтры камертонного типа* (рис. 9.38, а). Здесь резонаторами P служат металлические язычковые вибраторы, а связками C между резонаторами — эластичная перемычка между ними. На входе и выходе такого ЭМФ ставят ЭМП электромагнитного типа. Эквивалентная схема звена камертонного ЭМФ приводится к виду, как на рис. 9.16, б.

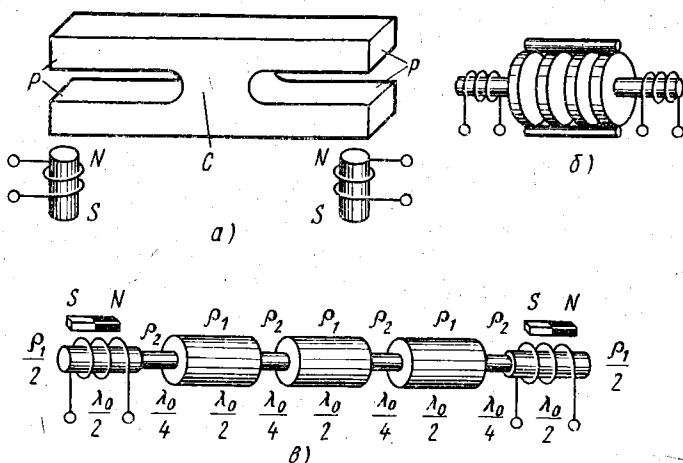


Рис. 9.38. Конструктивные схемы ЭМФ с механическими резонаторами

Дисковые полосовые ЭМФ (рис. 9.38, б) пригодны на частотах в десятки и сотни килогерц. В них резонаторами служат металлические диски, совершающие изгибные колебания, а связками — приваренные проволочки, совершающие продольные колебания. На входе и выходе фильтра применяют ЭМП магнитоотрицательного типа, как на рис. 9.38, б, а также ЭМП пьезоэлектрического типа. Эквивалентная схема звена дискового ЭМФ имеет вид, как на рис. 9.16, а. Для уменьшения габаритов и увеличения жесткости дисковых ЭМФ длину связок в них уменьшают до значений $\lambda_0/10 \div \lambda_0/8$.

Стержневой ЭМФ (рис. 9.38, в) удобен на частотах от единиц до сотен килогерц. В нем металлические стержневые резонаторы являются полуволновыми отрезками механической (акустической) длинной линии с волновым сопротивлением ρ_1 , связками служат четвертьволновые стержни с волновым сопротивлением ρ_2 . Оконечные резонаторы с волновым сопротивлением $\rho_1/2$ являются магнитоотрицательными резонаторами, которые выполняют

также роль ЭМП на входе и выходе фильтра. Их волновое сопротивление уменьшено для согласования по характеристическому сопротивлению окончных звеньев с остальными звеньями. Эти внутренние звенья имеют эквивалентную схему в виде волнового звена, показанного на рис. 9.15, а. Таким образом, стержневые ЭМФ обладают свойствами многозвенного волнового полосового фильтра.

Такие ЭМФ на частотах в сотни килогерц получают достаточно компактными. Например, на частоте 500 кГц стальные полуволновые резонаторы имеют длину 5 мм. Это обусловлено низкой скоростью распространения продольных акустических волн в механической длинной линии. В стальном стержне она равна $5 \cdot 10^3$ м/с. Для уменьшения габаритов фильтра на более низких частотах в стержневых ЭМФ применяют крутильные колебания, скорость распространения которых в стальных стержнях получается приблизительно в 1,6 раз меньше скорости продольных колебаний. Для уменьшения габаритов фильтров на звуковых частотах резонаторы (и связи) усложняют по форме, выполняя их с переменным сечением. По форме резонаторов эти фильтры называются гантельными ЭМФ.

4. Фильтры на поверхностных акустических волнах. Существуют разновидности ЭМФ, называемые фильтрами на *поверхностных акустических волнах (ПАВ)*. Эти волны являются разновидностью механических колебаний, которые распространяются в тонком поверхностном слое твердого тела, имеющего форму пластины или стержня. Возбуждение ПАВ в пьезоэлектрической пластине показано на рис. 9.39, а. Между двумя тонкими электродами 1 и 2 в поверхностном слое пластины возникает деформация растяжения — сжатия, как и в обычном пьезоэлектриче-

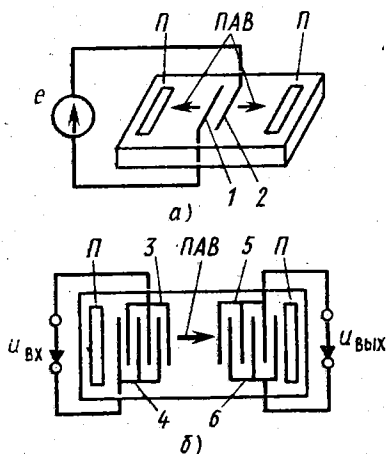


Рис. 9.39. Возбуждение ПАВ и конструктивная схема фильтра на ПАВ

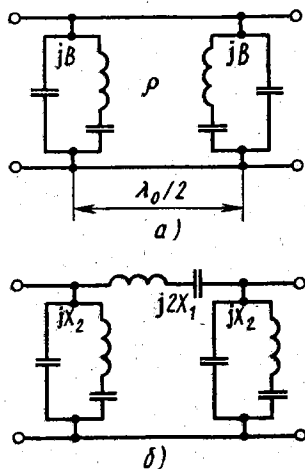


Рис. 9.40. Эквивалентные схемы звена фильтра на ПАВ

ском преобразователе. При этом возникают ПАВ, распространяющиеся к краям пластины. У этих краев размещаются поглотители P , предотвращающие отражение от них бегущих волн.

Возбудитель ПАВ в фильтре состоит из множества электродов, подключенных к общим шинам 3, 4 (рис. 9.39, б), и называется встречно-штыревым преобразователем (ВШП). На выходном конце фильтра также имеется ВШП с общими шинами 5 и 6. ПАВ, возбужденные во входном ВШП, распространяются к выходному ВШП, в котором они преобразуются вновь в электрические колебания. Таким образом, *промежуток между входным и выходным ВШП является акустической (механической) линией связи между ними с некоторым волновым сопротивлением ρ* .

ВШП имеют две конструктивные особенности. Во-первых, расстояния между любыми двумя смежными электродами равны половине длины волны. Поэтому *любой междуэлектродный промежуток настроен в резонанс и образует вместе с электродами пьезоэлектрический резонатор* (см. рис. 9.29). Во-вторых, любые смежные электроды ВШП подключены к противоположным шинам (рис. 9.39, б), которые имеют потенциалы противоположной полярности. Поэтому электрические поля в смежных пьезоэлектрических резонаторах имеют встречные направления. Следовательно, *и механические колебания в смежных резонаторах происходят в противофазе. Таким образом, смежные резонаторы нельзя считать соединенными параллельно, хотя их электроды подключены к общим шинам, поскольку параллельно включенные резонаторы колебались бы в фазе.*

Чтобы учесть противофазность колебаний смежных пьезоэлектрических резонаторов, их надо соединить полуволновыми отрезками линии с волновым сопротивлением ρ , которые являются продолжением акустической линии связи между ВШП. При этом образуется эквивалентная схема звена ВШП, показанная на рис. 9.40, а. Следует учесть, что в этой схеме проводимость B равна половине полной проводимости пьезоэлектрического резонатора, который соответственно делится при разбиении ВШП на звенья. Из таких цепочечно соединенных звеньев состоит как входной, так и выходной ВШП. Следовательно, оба они представляют собой многозвенные цепочечные пьезоэлектрические фильтры, соединенные акустической линией связи (см. рис. 9.39, б).

Рассмотрим селективные свойства звена ВШП. Матрица звена с учетом табл. П.17, П.18 и П.19 определяется следующим образом:

$$(a) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j\rho v/2 \\ j\rho v/2\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{pmatrix},$$

или

$$(a) = - \begin{pmatrix} 1 - \rho B v/2 & j\rho v/2 \\ j(\rho v/2\rho + 2B - \rho B^2 v/2) & 1 - \rho B v/2 \end{pmatrix}. \quad (9.69)$$

Существенно отметить, что отрицательный знак перед полученной матрицей свидетельствует об изменении фазы колебаний

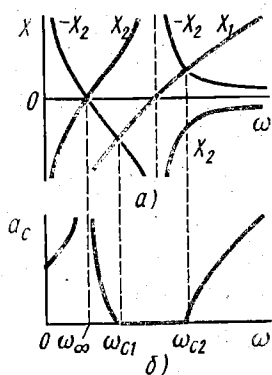


Рис. 9.41. Построение характеристики затухания полувзвена фильтра на ПАВ

в звене на угол π и означает, что это звено является цепью неминимально-фазового типа (как и вообще волновые фильтры). Однако при рассмотрении селективных свойств фильтра на ПАВ указанные фазовые сдвиги можно не учитывать, как и в волновых фильтрах (см. § 9.3.3). При этом и отрицательный знак перед матрицей (9.69) следует отбросить. Тогда из соотношений (8.49) и (9.69) определяется другая эквивалентная схема звена — П-образная схема (рис. 9.41, б) с параметрами, имеющими значения

$$j2X_1 = j\mu\nu/2, \quad jX_2 = 1/jB. \quad (9.70)$$

Здесь в первом равенстве сопротивление последовательного плеча обозначено с коэффициентом 2, так что при разбиении полученного звена на полувзвены их продольные плечи имеют сопротивление jX_1 . Отброшенный знак перед матрицей (9.69) может быть снова учтен в полученном звене скрещиванием его входных или выходных зажимов. Отметим, что имеются и другие эквивалентные схемы фильтра на ПАВ, в которых сразу учитываются все фазовые сдвиги. В этих схемах ВШП представляют в виде трансверсального фильтра с отводами от каждого пьезоэлектрического резонатора (см. § 9.1.1).

Формулы (9.70) позволяют построить частотные характеристики сопротивлений плеч полувзвена фильтра. Это сделано на рис. 9.41, а с учетом рис. 9.30, в. По полученным графикам в соответствии с условиями (9.47) на рис. 9.41, б построена характеристика затухания полувзвена. Из этой характеристики видно, что фильтр на ПАВ является полосовым фильтром. Такие фильтры используют в диапазоне частот 1 МГц—3 ГГц.

§ 9.5. ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

В различных устройствах связи возникает задача задержки сигналов во времени. Например, в цветном телевидении применяется поочередная (через строку) передача сигналов цветности. Для совмещения во времени этих сигналов их надо поочередно задерживать при обработке информации в телевизионном приемнике. Задержку сигналов можно осуществлять с помощью электрических и механических (акустических) линий задержки (ЛЗ).

1. Электрические линии задержки. Естественная задержка сигналов возникает при их передаче по длинной линии. Однако при скорости распространения бегущей волны (7.69) задержка сигнала только на 0,7 мкс, необходимая, например, в цветном телевизоре, потребует линию длиной 210 м. Для получения приемлемых размеров такой ЛЗ надо уменьшить фазовую скорость,

т. е. в соответствии с формулой (7.67) увеличить погонные индуктивность и емкость линии. Этого можно достигнуть включением в

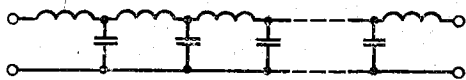


Рис. 9.42. Искусственная длинная линия

линии ряда катушек и конденсаторов. В итоге получается конструкция, называемая *искусственной длинной линией*. Схема этой линии (рис. 9.42) является, очевидно, цепочечным фильтром нижних частот.

Время задержки в таком многозвенном ФНЧ определяется количеством звеньев (полузвеньев) и их параметрами. Поскольку задержке подлежат не гармонические колебания, а сложные сигналы, указанное время определяется групповым временем прохождения. Для простейшего полузвена типа ρ (см. рис. 9.5, б) характеристическое ГВП находим по определению (8.73) из формулы (9.37):

$$t_{гр} |_{\Omega < 1} = 1/\omega_c \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad t_{гр} |_{\Omega > 1} = 0.$$

Частотная характеристика этого ГВП показана сплошной линией на рис. 9.43. Здесь же пунктирной линией изображена характеристика рабочего ГВП для полузвена, нагруженного на сопротивление $R_{01} = R_{02} = \rho$. Из рис. 9.43 видно, что групповая скорость в искусственной длинной линии, составленной из полузвеньев ФНЧ типа ρ , изменяется в соответствии с рис. 7.13, д.

Для отсутствия фазовых искажений задержанного сигнала ГВП должно иметь постоянное значение в полосе пропускания ФНЧ. Этому требованию ФНЧ типа ρ удовлетворяет лишь приблизительно в части полосы пропускания, как видно из рис. 9.43. Для уменьшения искажений применяют более сложные схемы ФНЧ. Например, более постоянное значение ГВП можно получить в полосе пропускания ФНЧ типа m (см. рис. 9.7, в) при

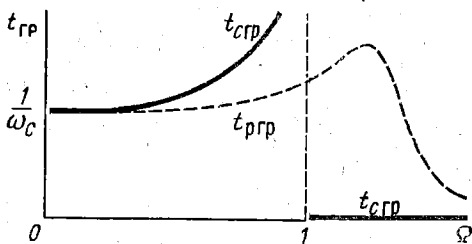


Рис. 9.43. Частотные характеристики ГВП полузвена ФНЧ типа ρ

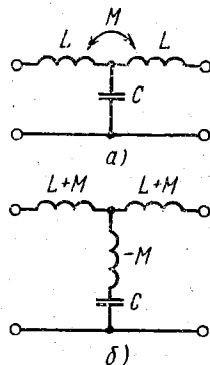


Рис. 9.44. Звено ФНЧ типа m и его эквивалентная схема при $m > 1$



Рис. 9.45.
Схема пластинчатой УЛЗ

$m > 1$. Это показывают расчеты с помощью формул (8.73) и (9.45). Однако из рис. 9.10, в видно, что звено ФНЧ при $m > 1$ имеет отрицательную индуктивность в поперечном плече. Тем не менее оно реализуемо с помощью индуктивно связанных катушек, как показано на рис. 9.44, а. Эквивалентная схема этого звена построена на рис. 9.44, б в соответствии с эквивалентной схемой трансформатора при согласном включении его обмоток (см. рис. 3.38, а).

В качестве звеньев ЛЗ применяют ФНЧ и других типов, в том числе АРС-фильтры. Они отличаются компактностью и позволяют получить хорошие частотные характеристики ГВП. Расчет ЛЗ, состоящих из АРС-звеньев, осуществляют обычно методами синтеза (см. гл. 10).

Общим недостатком электрических ЛЗ является небольшое время задержки t_0 , получаемое в элементарных звеньях (полузвеньях) ФНЧ, из которых состоят такие ЛЗ. Например, в полузвене ФНЧ типа ρ можно принять $t_0 = 1/\omega_c$, как видно из рис. 9.43. Отсюда следует, что при $f_c = 1$ МГц время задержки $t_0 \approx 0,16$ мкс. Несколько большее время задержки дает полузвено ФНЧ типа m , для которого $t_0 = m/\omega_c$ и выигрыш получается при $m > 1$.

2. Акустические линии задержки. Выше отмечалась низкая скорость акустических волн в механической длинной линии ($5 \cdot 10^3$ м/с). Это обстоятельство используют для создания *малогабаритных акустических, или ультразвуковых, линий задержки (УЛЗ)*. Возможны конструкции УЛЗ в виде однородного стержня (проволоки) с электромеханическими преобразователями на концах. Чтобы подобная акустическая линия работала в режиме бегущих волн, отражения на ее концах устраняют с помощью специальных поглотителей с большим затуханием. В компактных УЛЗ можно получить большое время задержки. Например, при указанной фазовой скорости в стальной проволоке длиной 50 см время задержки равно 100 мкс. Для увеличения компактности проволоку сворачивают в спираль.

Возможны также компактные конструкции УЛЗ в виде небольшой пластинки из кварца. Акустическая волна в пластинке проходит путь от входного к выходному преобразователю, многократно отражаясь от ее граней, как показано на рис. 9.45. За счет этого увеличиваются длина пути и время задержки. В таких конструкциях УЛЗ возникают трудности с устранением отражений волны на выходе и входе. Частично эти отражения предотвращаются надлежащим согласованием УЛЗ на электрической стороне электромеханических преобразователей.

§ 9.6. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ И ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

Дифференцирование и интегрирование сигналов основано на использовании свойств (2.6), (2.11) емкостного и индуктивного элементов. Обычно указанные операции осуществляются с помощью RC-цепей, поскольку потери в индуктивно-

сти снижают их точность в RL -цепях. Поэтому в настоящем параграфе рассматриваются дифференциаторы и интеграторы в виде пассивных и активных RC -цепей.

1. Пассивные дифференциаторы и интеграторы. В делителе напряжения, изображенном на рис. 9.46, а, при гармонических колебаниях выходное напряжение определяется в соответствии с первой формулой (3.73):

$$\dot{U}_2 = j\omega CR \dot{U}_1 / (1 + j\omega CR).$$

Если в знаменателе этой дроби можно пренебречь вторым слагаемым при некоторой максимальной частоте ω_{\max} , то выражение упрощается:

$$\omega_{\max} CR \ll 1 \rightarrow \tau = RC \ll 1/\omega_{\max} = T_{\min}/2\pi < T_{\min}/2, \quad \dot{U}_2 \approx j\omega\tau \dot{U}_1. \quad (9.71)$$

Здесь постоянная времени τ сравнивается с временным интервалом $\Delta t_{\min} = T_{\min}/2$, т. е. с минимальным полупериодом гармонических колебаний, в течение которого входное напряжение изменяется от минимума до максимума или наоборот:

$$\tau \ll \Delta t_{\min}. \quad (9.72)$$

В последнем равенстве (9.71) оператор $j\omega$ означает операцию дифференцирования гармонических колебаний, поэтому при переходе от гармонических колебаний к произвольным сигналам его следует заменить оператором дифференцирования:

$$u_2 \approx \tau \frac{du_1}{dt}. \quad (9.73)$$

Это приближенное равенство справедливо при соблюдении прежнего условия (9.72), где Δt_{\min} является минимальным интервалом изменения сигнала от некоторого локального минимума до локального максимума (или наоборот), как показано на рис. 9.46, б:

Таким образом, согласно равенству (9.73) RC -цепь, изображенная на рис. 9.46, а, является пассивной дифференцирующей цепью для сигналов, удовлетворяющих условию (9.72).

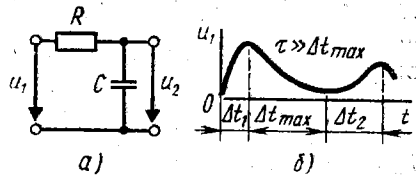
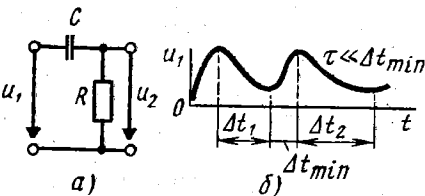


Рис. 9.46. Схема дифференцирующей RC -цепи и выбор ее параметров

Рис. 9.47. Схема интегрирующей RC -цепи и выбор ее параметров

Аналогично анализируется RC-цепь, изображенная на рис. 9.47, а. При гармонических колебаниях в соответствии со второй формулой (3.73) находим

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 / (1 + j\omega CR).$$

Это выражение упрощается при соблюдении другого условия для некоторой минимальной частоты гармонических колебаний:

$$\omega_{\min} CR \gg 1 \rightarrow \tau = RC \gg 1/\omega_{\min} = T_{\max}/2\pi = \Delta t_{\max}, \quad \dot{U}_2 \approx \dot{U}_1 / j\omega\tau.$$

Поскольку делению на оператор $j\omega$ соответствует интегрирование гармонических колебаний, при переходе к произвольным сигналам отсюда получаем

$$\tau \gg \Delta t_{\max}, \quad u_2 \approx \frac{1}{\tau} \int_0^t u_1 dt. \quad (9.74)$$

Неравенство здесь получено аналогично неравенству (9.72), а Δt_{\max} определяется для удобства как максимальный временной интервал, в течение которого произвольный сигнал изменяется от некоторого локального максимума до локального минимума (или наоборот), как показано на рис. 9.47, б.

Согласно равенству (9.74) RC-цепь, изображенная на рис. 9.47, а, является пассивной интегрирующей цепью для сигналов, удовлетворяющих неравенству (9.74).

Как дифференцирующая, так и интегрирующая пассивные RC-цепи обладают двумя недостатками. Во-первых, точность выполнения в них соответствующих операций получается невысокой, если не соблюдаются неравенства (9.72) и (9.74). Во-вторых, при соблюдении указанных условий выходное напряжение в этих схемах сильно ослабляется, как видно из равенств (9.73) и (9.74).

2. Активные дифференциаторы и интеграторы. Свойства ИОУ (см. § 3.5.2) могут быть использованы для дифференцирования и интегрирования сигналов. Схемы таких активных дифференциатора и интегратора показаны соответственно на рис. 9.48, а, б. Они свободны от недостатков, присущих пассивным дифференциаторам и интеграторам. Действительно, из формулы (3.165) следует, что при гармонических колебаниях для этих схем получаются практически точные соотношения, определяющие выходное напряжение соответственно в первой и второй схемах:

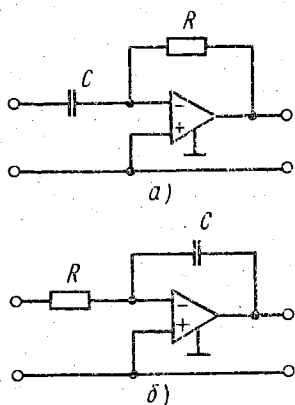


Рис. 9.48. Схемы дифференциатора (а) и интегратора (б) на операционном усилителе

$$\dot{U}_2 = -R\dot{U}_1 / \underline{Z}_C = -j\omega CR\dot{U}_1,$$

$$\dot{U}_2 = -\underline{Z}_C\dot{U}_1 / R = -\dot{U}_1 / j\omega CR.$$

Как и для пассивных схем, переходя к произвольным сигналам, отсюда получаем

$$u_2 = -\tau \frac{du_1}{dt}, \quad u_2 = -\frac{1}{\tau} \int_0^t u_1 dt. \quad (9.75)$$

Эти точные равенства аналогичны приближенным равенствам (9.73) и (9.74), причем на значения постоянной времени не накладывается ограничений в виде неравенств (9.72), (9.74). Этим подтверждаются преимущества активных схем дифференциатора и интегратора.

Однако сказанное не означает, что в этих схемах не существует никаких ограничений. Реальный ОУ имеет хотя и весьма большой (порядка 10^5), но конечный коэффициент усиления μ_0 . Если с учетом этого обстоятельства исходить из точного равенства (3.164), то формулу (3.165) и соответственно равенства (9.75) следует считать достаточно точными при соблюдении следующих условий:

$$\tau \ll \mu_0 \Delta t_{\min}, \quad \tau \gg \Delta t_{\max} / \mu_0. \quad (9.76)$$

Здесь первое неравенство относится к первому равенству (9.75), а второе неравенство — ко второму равенству (9.75). Ограничения (9.76) значительно слабее неравенств (9.72), (9.74), чем и определяются реальные преимущества активных дифференцирующих и интегрирующих цепей.

§ 9.7. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

Для компенсации (коррекции) искажений, возникающих в линиях и других устройствах связи, применяют специальные корректирующие цепи. При этом частотные и фазовые искажения компенсируют отдельно с помощью соответственно амплитудных и фазовых корректоров. Возможна совмещенная коррекция обоих видов искажений, которая осуществляется в амплитудно-фазовых корректорах. Их схемы и параметры определяются, в частности, методами синтеза (см. гл. 10). Искажения в линиях связи, возникающие за счет изменения с частотой их волнового сопротивления, предотвращают также с помощью корректоров сопротивлений

1. Амплитудные корректоры. Амплитудный корректор (АК) включают между окончательным четырехполюсником с входным сопротивлением $Z_{вх}$ и рабочей цепью C , как показано на рис. 9.49, а. Если входное сопротивление корректора $Z_{вх.к}$ в некотором диапа-

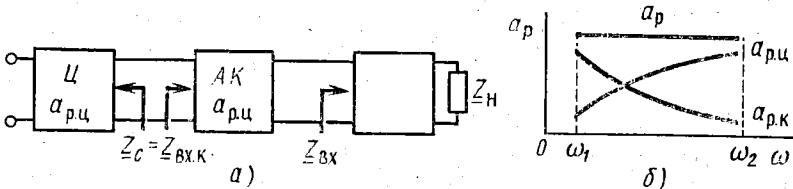


Рис. 9.49. Включение амплитудного корректора и коррекция рабочего затухания цепи

зоне частот $[\omega_1, \omega_2]$ равно характеристическому сопротивлению цепи \underline{Z}_c , то их рабочие затухания суммируются, подобно сложению характеристических затуханий (8.71). При этом подбором параметров корректора можно добиться постоянства рабочего затухания всей цепи (рис. 9.49, б):

$$a_p = a_{p.ц} + a_{p.к} = \text{const.} \quad (9.77)$$

Соблюдение этого условия означает отсутствие частотных искажений по рабочему затуханию.

Обычно применяются корректоры, рассчитанные на постоянные активные сопротивления:

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{вх.к} = R_0 = \text{const.} \quad (9.78)$$

Одним из таких корректоров является Т-образный мостовой четырехполюсник (рис. 9.50, а), параметры которого удовлетворяют условию

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2. \quad (9.79)$$

Характерной его особенностью является постоянство характеристического сопротивления во всем бесконечном диапазоне частот. Действительно, при обозначении на рис. 9.50, а и соблюдении условия (9.79) из табл. П.18 находим

$$\underline{Z}_a^2 = R_0 \underline{Z}_1 + 2R_0(R_0 + \underline{Z}_2), \quad \underline{Z}_b^2 = 2R_0(R_0 + \underline{Z}_2), \quad \underline{Z}^3 = R_0^2(2R_0 + \underline{Z}_1), \\ \underline{Z}_0 = 2R_0 + \underline{Z}_1.$$

Отсюда и из формул (8.54), (8.59) с учетом равенства (9.79) определяются характеристические параметры корректора:

$$\underline{Z}_c = R_0, \quad a_c = \ln |1 + \underline{Z}_1/R_0|. \quad (9.80)$$

Таким образом, этот корректор при соблюдении условия (9.78) работает между согласованными сопротивлениями и его рабочее затухание равно характеристическому затуханию (9.80). Поэтому при соответствующем выборе сопротивления \underline{Z}_1 можно соблюсти условие (9.77).

Другие схемы корректоров, показанные на рис. 9.50, б, в, работают несколько иным образом. Имея переменное характеристическое сопротивление и рабочее затухание, отличающееся от характеристического, они удовлетворяют условию (9.78) при выполнении равенства (9.79). В этом нетрудно убедиться, опре-

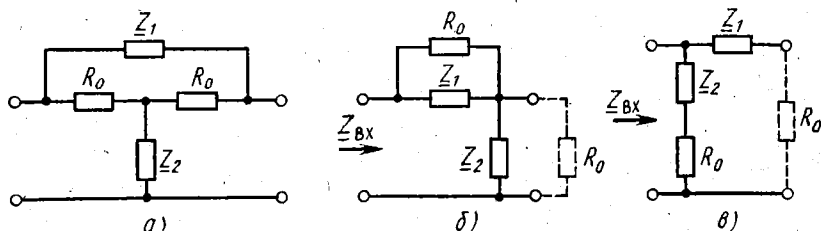


Рис. 9.50. Схемы амплитудных корректоров

делив их входные сопротивления как сопротивления двухполюсников со смешанным соединением элементов. С учетом этого обстоятельства и равенства (9.79) по табл. П.18 и формуле (8.44) определяем рабочее затухание рассматриваемых корректоров:

$$a_p = \ln |1 + Z_1/R_0|. \quad (9.81)$$

Таким образом, формулы затухания (9.80) и (9.81) являются сходными. Следовательно, конечный результат получается одинаковым при использовании любых корректоров, показанных на рис. 9.50.

В качестве амплитудных корректоров могут использоваться АСР-цепи. Действительно, из рис. 9.49, б видно, что АЧХ амплитудного корректора получается такой же, как и у фильтра верхних частот. Поэтому амплитудным корректором может служить АСР-фильтр верхних частот. Таким фильтром может являться, например, биквад, позволяющий регулировать должным образом АЧХ корректора. При использовании АСР-фильтра в качестве АК следует предусматривать его согласование с цепью для соблюдения условия (9.78).

2. Фазовые корректоры. Фазовый корректор (ФК) включают по той же схеме, что и амплитудный (см. рис. 9.49, а), но по принципу согласования характеристических сопротивлений (рис. 9.51, а). При этом накладываются следующие условия:

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_{вк} = R_0, \quad a_{p,к} = 0. \quad (9.82)$$

При выполнении этих условий фазовый корректор может быть только реактивным четырехполюсником с характеристическим сопротивлением, не зависящим от частоты. Первое равенство (9.82) означает также, что рабочие и характеристические затухания и фазы корректора совпадают. Поэтому второе условие (9.82) требует равенства нулю характеристического затухания корректора. При этом условии отсутствия фазовых искажений по рабочей фазе, сформулированное применительно к рабочему групповому времени прохождения (8.73), имеет вид (рис. 9.51, б)

$$t_{p,гр} = t_{p,гр,ц} + t_{p,гр,к} = t_{p,гр,ц} + t_{c,гр,к} = \text{const}. \quad (9.83)$$

Таким образом, фазовые корректоры можно рассчитывать по характеристическим параметрам.

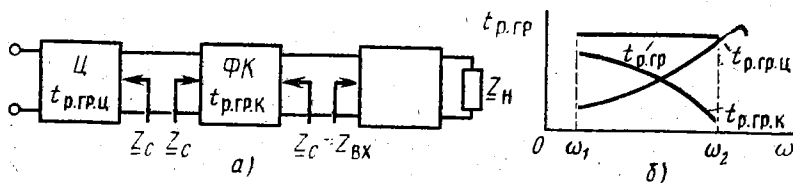


Рис. 9.51. Включение фазового корректора и коррекция рабочего ГВП цепи

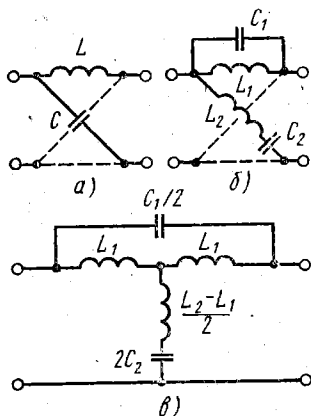


Рис. 9.52. Схемы фазовых корректоров

Некоторые схемы фазовых корректоров показаны на рис. 9.52. Они удовлетворяют условиям (9.82), если их параметры выбраны в соответствии с равенством (9.79). Для первой схемы (рис. 9.52, а) это равенство соблюдается при любых L и C , а для второй (рис. 9.52, б) — при одинаковой настройке контуров:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = j\omega L / j\omega C = L/C = R_0^2,$$

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = (\rho_1 / j\nu) \cdot j\rho_2 \nu = \rho_1 \rho_2 = R_0^2.$$

Характеристические сопротивления этих схем удовлетворяют первому условию (9.82), как следует из последнего равенства (8.55). Второе условие (9.82) также выполняется, поскольку полоса прозрачности ($a_c = 0$) занимает весь диапазон частот $[0, \infty]$, как вытекает из условия (9.47).

Характеристическая передаточная функция (8.56) мостовых корректоров определяется из последнего равенства (8.46):

$$\underline{H}_c = e^{g_c} = (1 + \text{th } g_c / 2) / (1 - \text{th } g_c / 2) = (1 + \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2}) / (1 - \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2}). \quad (9.84)$$

Рассмотрим для примера фазовый корректор, изображенный на рис. 9.52, а. Для него из формулы (9.84) находим

$$\underline{H}_c = (1 + j\Omega) / (1 - j\Omega), \quad (9.85)$$

где $\Omega = \omega / \omega_0$ — частота, нормированная по частоте $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$.

Из формулы (9.85) находим $a_c = \ln |H_c| = 0$, что подтверждает сделанный ранее общий вывод. Из этой же формулы и определений (8.56), (8.73) получаем

$$b_c = 2\arctg \Omega, \quad t_{c \text{ гр}} = 2 / \omega_0 (1 + \Omega^2). \quad (9.86)$$

Таким образом, с ростом частоты групповое время $t_{\text{гр}} = t_{c \text{ гр}}$ уменьшается. Именно подобный спад характеристики требуется для компенсации фазовых искажений в соответствии с условием (8.83), поскольку обычно $t_{\text{гр.ц}}$ увеличивается с ростом частоты, как показано на рис. 9.51, б. Величину указанного спада в заданном диапазоне частот можно изменять необходимым образом, изменяя ω_0 , т. е. выбирая соответственно параметры L и C .

Еще больший спад указанной характеристики в некотором диапазоне частот получается во второй схеме корректора (рис. 9.52, б). Следовательно, усложняя схему фазового корректора и выбирая должным образом его параметры, можно достаточно точно выполнить условие (9.83).

T-образная мостовая схема фазового корректора (рис. 9.52, в) эквивалентна X-образной схеме, показанной на рис. 9.52, б, как

вытекает из теоремы бисекции (8.51). Поэтому Т-образный мостовой корректор не изменяет характеристик по сравнению с Х-образным корректором, но имеет меньшее число элементов. Если $L_2 < L_1$, то Т-образную схему можно реализовать, используя в ней трансформатор с согласным включением обмоток. Этот трансформатор заменяет все три индуктивности в соответствии со своей эквивалентной схемой (см. рис. 3.38, а).

Из соотношения (9.85) определяется передаточная функция фазового корректора первого вида (рис. 9.52, а):

$$\underline{T}(\omega) = 1/\underline{H}_z(\omega) = (\omega_0 - j\omega)/(\omega_0 + j\omega). \quad (9.87)$$

Из соотношений (6.18) и (9.87) следует, что рассмотренный корректор является фазовым контуром. Этот вывод относится к любым схемам фазовых корректоров.

В числитель и знаменатель передаточной функции (9.87) частота входит в первой степени. Соответственно этот корректор называется *фазовым контуром первого порядка*. Усложненная схема (рис. 9.52, б) является *фазовым корректором (контуром) второго порядка*.

Фазовый контур любого порядка можно имитировать АРС-цепью. Например, АРС-цепь с биквадратной передаточной функцией (9.64) можно использовать в качестве ФК первого порядка с передаточной функцией (9.87). Для этого в соотношении (9.64) должны выполняться условия $a_2 = b_2 = 0$, $a_1 = -b_1$. Поэтому *фазовым корректором может служить биквад, у которого возможно задание параметров, обеспечивающее получение отрицательного коэффициента a_1* . Если при этом $a_2 = b_2 \neq 0$, то биквад будет являться фазовым корректором второго порядка. Известны также гираторные схемы ФК. При использовании АРС-цепей в качестве ФК надо предусматривать их согласование для соблюдения первого условия (9.82).

3. Корректоры сопротивлений. Из рис. 7.10 видно, что в линиях связи достаточной протяженности отраженная волна успевает затухнуть, не доходя до входа линии. При этом входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению. В относительно короткой линии, где отраженная волна достигает входа, входное сопротивление линии (7.96) сложным образом зависит от частоты. Чтобы устранить эту зависимость, на входе линии включают корректор сопротивлений (КС), как показано на рис. 9.53, а. Задачей этого корректора является внесение такого собственного (характеристического) затухания α_c , чтобы отраженная волна затухала практически полностью. Входное сопротивление КС должно быть при этом по-

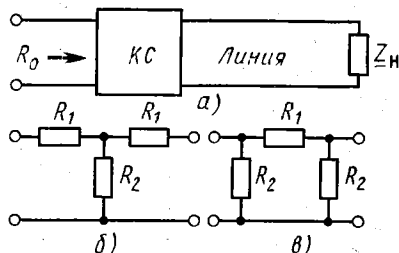


Рис. 9.53. Включение и схемы корректоров сопротивлений

стоянным и равным вещественному характеристическому сопротивлению R_c .

Корректоры сопротивлений выполняют в виде резистивных четырехполосников. Т- и П-образные схемы таких корректоров показаны соответственно на рис. 9.53, б, в. Их расчет производят по заданным значениям R_c и a_c в соответствии с формулами (8.69):

$$R_1 = R_c \operatorname{th}(a_c/2), \quad R_2 = R_c \operatorname{sh} a_c \quad (9.88)$$

— для Т-образного корректора;

$$R_1 = R_c \operatorname{sh} a_c, \quad R_2 = R_c \operatorname{cth}(a_c/2) \quad (9.89)$$

— для П-образного корректора.

Из формул (9.88), (9.89) видно, что при изменении требований к величине затухания a_c в корректорах цепочечного типа надо регулировать сопротивления всех трех резисторов. Поэтому иногда предпочитают в качестве корректора сопротивлений использовать более сложную схему резистивного Т-образного моста, в котором достаточно регулировать сопротивления только двух резисторов.

Резистивные корректоры сопротивлений называются также удлинителями, поскольку их применение эквивалентно удлинению линии.

4. Балансные контуры. В технике связи дифференциальный трансформатор (см. рис. 3.36, б) находит специфическое применение. Например, в линии телефонной связи для развязки двух

встречных разговоров усилители включают через дифференциальные трансформаторы, как показано на рис. 9.54, а. При этом для балансировки плеч дифференциальных трансформаторов в разрезе линии связи включают так называемые балансные контуры — двухполосники с сопротивлением $Z_{б.к.}$. Другим примером являются телефонные аппараты, в которых применяется так называемая *противоместная схема с балансным контуром*, показанная на рис. 9.54, б. Она служит для предотвращения проникновения сигнала от микрофона M_k в телефон T . Для этого схема должна быть сбалансирована так, чтобы выполнялись два тре-

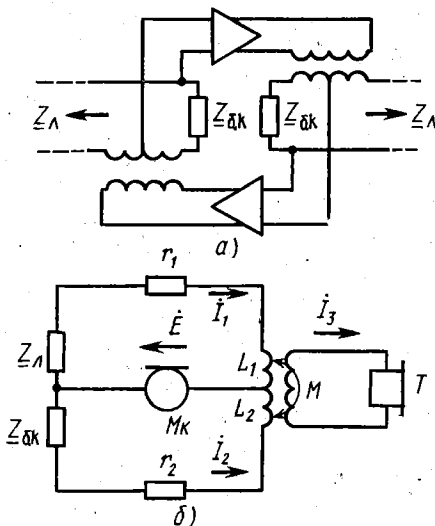


Рис. 9.54. Включение балансных контуров в схеме линейного усилителя (а) и в противоместной схеме телефонного аппарата (б)

бования. Во-первых, количество ампервитков двух половин первичной обмотки трансформатора должно быть одинаковым. Вторых, должны быть одинаковыми фазы токов I_1 и I_2 . Тогда э.д.с., наведенные этими токами в цепи телефона, взаимно скомпенсируются. Оба указанных требования выполняются при соблюдении следующего условия баланса:

$$N_1 I_1 = N_2 I_2, \quad (9.90)$$

где N_1, N_2 — числа витков соответствующих обмоток трансформатора.

Это условие должно выполняться при любом токе I_3 , в частности при $I_3 = 0$, т. е. в режиме холостого хода. Составим два уравнения по второму закону Кирхгофа для этого режима:

$$(r_1 + j\omega L_1 + \underline{Z}_n) I_1 - j\omega M I_2 = \dot{E}, \quad (r_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_{б.к}) I_2 - j\omega M I_1 = \dot{E},$$

где

$$\underline{Z}_n = R_n + jX_n, \quad \underline{Z}_{б.к} = R_{б.к} + jX_{б.к} \quad (9.91)$$

— соответственно входное сопротивление линии связи, в которую поступает сигнал от микрофона, и сопротивление балансного контура, подбором которого добиваются соблюдения условия баланса (9.90); остальные обозначения ясны из рис. 9.54.

Решая эту систему уравнений, находим токи I_1, I_2 , подстановка которых в условие баланса (9.90) видоизменяет его с учетом обозначений (9.91):

$$N_1[r_2 + R_{б.к} + j(\omega(L_2 + M) + X_{б.к})] = N_2[r_1 + R_n + j(\omega(L_1 + M) + X_n)]. \quad (9.92)$$

Трансформатор в телефонном аппарате можно считать практически совершенным, и для него справедливы формулы (3.142), (3.143), из которых вытекает, что

$$L_2 + M = n(L_1 + M), \quad (9.93)$$

где $n = N_2/N_1$ — коэффициент трансформации между половинами первичной обмотки.

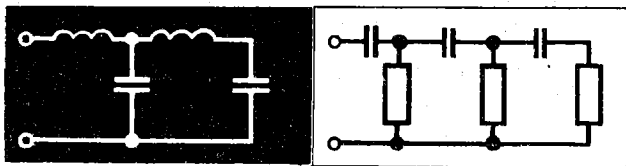
Из равенства (9.93) следует, что соответствующие слагаемые в условии (9.92) приводятся, и оно распадается на два условия баланса:

$$R_{б.к} = n(r_1 + R_n) - r_2, \quad X_{б.к} = nX_n. \quad (9.94)$$

Эти же условия относятся и к схеме, показанной на рис. 9.54, а. Поскольку входное сопротивление линии связи имеет емкостный характер, согласно второму равенству (9.94) балансный контур представляет собой резистивно-емкостный двухполюсник, например, как изображенный на рис. 3.19, в. Конкретная схема балансного контура и его параметры определяются из условий (9.94) по заданному на нескольких частотах входному сопротивлению линии. Такое определение осуществляют обычно методами синтеза, которые рассматриваются в гл. 10.

Вопросы для самоконтроля

- 9.1. Возможно ли осуществление активных ЭМФ?
 - 9.2. Являются ли резонансные усилители активными фильтрами?
 - 9.3. Какое применение могут иметь ПГФ и РГФ?
 - 9.4. Чем отличается полоса прозрачности от полосы пропускания фильтра?
 - 9.5. Как можно доказать в общем виде, что на границах с полосой непрозрачности реактивного фильтра его диссипативное характеристическое сопротивление обращается в нуль или бесконечность?
 - 9.6. Почему характеристическое затухание фильтра не может являться отрицательной величиной?
 - 9.7. Может ли быть отрицательным рабочее затухание реактивного фильтра?
 - 9.8. Какие два типа звена образуются при соединении Г-образных полузвеньев?
 - 9.9. Какие четыре разновидности цепочечных ФНЧ образуются при соединении Г-образных полузвеньев?
 - 9.10. Чему равны номинальные характеристические сопротивления полузвеньев ФНЧ типа m (см. рис. 9.7, θ , z)?
 - 9.11. Какие схемы и характеристики имеют полузвенья ФВЧ, ПФ и РФ типа ρ , полученные из полузвеньев ФНЧ (см. рис. 9.5, θ , z) на основе аналитического преобразования частоты?
 - 9.12. Какие схемы и характеристики имеют полузвенья ФВЧ, ПФ и РФ типа m , полученные из полузвеньев ФНЧ (см. рис. 9.7, θ , z) на основе аналитического преобразования частоты?
 - 9.13. При каком соотношении L_1 и L_2 в мостовом фильтре (см. рис. 9.9, θ) имеется полюс характеристического затухания на конечной частоте?
 - 9.14. При каком соотношении C_1 и C_2 в мостовом фильтре (см. рис. 9.9, δ) отсутствует полюс характеристического затухания на конечной частоте?
 - 9.15. Чем отличается частотная зависимость характеристического затухания мостового фильтра при $L_1 > L_2$ (см. рис. 9.10, θ) от аналогичной зависимости для фильтра типа ρ (см. рис. 9.10, a)?
 - 9.16. Какими физическими явлениями обусловлено существование полюса затухания в эквивалентных звеньях мостового ФНЧ и цепочечного ФНЧ типа m ?
 - 9.17. Чему равна характеристическая фаза мостовых ФНЧ (см. рис. 9.9, θ , δ) в полосе непрозрачности?
 - 9.18. Как зависят от частоты характеристические параметры мостовых ФНЧ (см. рис. 9.10, θ , d)?
 - 9.19. Как объясняются физически условия (9.47) и (9.48)?
 - 9.20. К каким последствиям приводит устранение начального подмагничивания магнитострикционного резонатора в ЭМФ?
 - 9.21. Почему в эквивалентной схеме магнитострикционного резонатора (см. рис. 9.36, θ) индуктивность L_0 и параллельный контур соединены последовательно?
 - 9.22. Какие схемы имеют дифференцирующие и интегрирующие RL -цепи?
 - 9.23. Каким условиям должны удовлетворять параметры дифференцирующих и интегрирующих RL -цепей?
 - 9.24. Какими исходными данными следует пользоваться при расчете амплитудных корректоров?
 - 9.25. Изменяется ли монотонно с ростом частоты групповое время прохождения фазового корректора второго порядка (см. рис. 9.52, θ)?
-



Синтез цепей

Как отмечалось в гл. 3, синтез цепи заключается в определении ее схемы и параметров элементов по заданным свойствам цепи. Свойства цепи могут задаваться спектральными или временными характеристиками. При этом говорят о синтезе в частотной или временной области. Эти две разновидности синтеза отличаются не только способом задания свойств цепи, но и методикой расчетов. Однако указанные свойства цепи взаимосвязаны. Об этом свидетельствуют уравнения (6.38) и (6.45), связывающие временные характеристики цепи со спектральными характеристиками. В настоящей главе рассматривается синтез цепей только в частотной области.

§ 10.1. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Решение любой задачи синтеза разбивается обычно на два этапа, которые получили название задач аппроксимации и реализации. Возможно, однако, и совместное решение задач этих двух типов.

1. Задача аппроксимации. *На первом этапе синтеза выбирают характеристики цепи, которые удовлетворяют требованиям, предъявляемым к ее свойствам.* Такие требования задаются, например, в виде селективности и полосы пропускания, которые должен иметь синтезируемый фильтр, или в виде полосы частот, в которой синтезируемое согласующее устройство обеспечивает допустимое рассогласование, и т. д. *Этот этап синтеза составляет содержание задачи аппроксимации, которая сводится к выбору дробно-рациональной или полиномиальной функции, достаточно точно описывающей АЧХ (ФЧХ) или передаточную функцию $T(\omega)$, удовлетворяющую заданным требованиям.*

При аппроксимации характеристик (передаточной функции) цепи необходимо прове-

рять, могут ли они быть физически реализованы в какой-нибудь реальной схеме цепи. Такую проверку осуществляют с помощью так называемых условий физической, или схемной, реализуемости (УФР).

Если заданные свойства цепи могут быть получены при разных аппроксимирующих функциях, то среди них выбирают функции, оптимальные в том или ином смысле. Например, оптимальной может быть функция заданного порядка, обеспечивающая минимальное значение коэффициента прямоугольности синтезируемого фильтра, либо функция минимального порядка, обеспечивающая синтез цепи с минимальным количеством элементов. При синтезе активных фильтров оптимальной может быть аппроксимирующая функция, обеспечивающая минимальные значения ее чувствительности к изменению коэффициентов этой функции. В конечном счете такая аппроксимирующая функция обеспечивает уменьшение чувствительности АРС-фильтра по параметрам его элементов.

2. Задача реализации. Второй этап синтеза заключается в определении схемы цепи, имеющей выбранные характеристики. Этот этап синтеза составляет содержание задачи реализации. При реализации цепи определяются и параметры ее элементов. На этапе реализации также необходимо удовлетворять требованиям, которые предъявляются к синтезируемой цепи. Например, типичным требованием является минимизация количества элементов в цепи. Могут также предъявляться требования к допустимой чувствительности цепи и т. д.

Существует разновидность синтеза, в которой задачи аппроксимации и реализации объединяются. Такой разновидностью является структурный синтез цепей, при котором структура цепи (ее схема) задается. При этом синтез заключается в определении параметров элементов цепи, при которых удовлетворяются как требования, предъявляемые к свойствам цепи, так и условия физической реализуемости. Иногда такой синтез называют параметрическим.

В устройствах связи наиболее часто ставится задача синтеза четырехполосников. При решении этой задачи определяются сопротивления (проводимости) двухполосников, из которых состоит синтезированный четырехполосник. Таким образом, возникает и задача синтеза двухполосников с заданным комплексным сопротивлением (проводимостью). Здесь рассматриваются обе указанные задачи синтеза.

§ 10.2. СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Наряду с синтезом LCR-двухполосников, составленных из идеальных элементов всех трех видов (L , C , R), в технике связи существенное значение имеет синтез реактивных и RC-двухполосников. Двухполосники, составленные только из реактивных элементов L и C , используются, например, в реактивных фильтрах. RC-двухполосники, не содержащие индуктивностей, являются составной частью АРС-четыреполосников, находящих все большее применение в устройствах

связи, что обусловлено прогрессом технологии производства интегральных микросхем. Поэтому в настоящем параграфе отдельно рассматриваются указанные частные случаи синтеза реактивных и RC-двухполюсников.

1. Задача аппроксимации. Комплексное сопротивление LCR-двухполюсника описывается в общем случае дробно-рациональной функцией вида (6.14) от мнимой частоты $p = j\omega$:

$$\underline{Z}(\omega) = Z(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (10.1)$$

Функция такого вида описывает в операторной форме сопротивление $Z(p)$ двухполюсника и его проводимость $Y(p) = 1/Z(p)$. Этой форме описания соответствуют операторные сопротивления и проводимости (6.61) элементов, из которых составлен двухполюсник.

Функция (10.1) должна удовлетворять двум необходимым и достаточным условиям физической реализуемости. Во-первых, степени m и n полиномов $F_1(p)$, $F_2(p)$ не должны отличаться более чем на единицу. Во-вторых, эти полиномы должны являться полиномами Гурвица (см. § 8.5.5). Эти условия относятся и к проводимости двухполюсника, поскольку она обратна его сопротивлению.

Необходимость первого из указанных условий можно доказать методом от противного, задавшись степенью $m = n + 2$. Тогда, разделив полином $F_1(p)$ на полином $F_2(p)$, можно выделить первое слагаемое сопротивления (10.1):

$$\frac{a_m}{b_n} p^2 = -\frac{a_m}{b_n} \omega^2. \quad (10.2)$$

Эта величина по своему физическому смыслу является сопротивлением некоторого двухполюсника. Однако не существует пассивных элементов или их комбинаций, которые имели бы частотную зависимость вида (10.2). Тем самым доказана необходимость первого условия физической реализуемости.

Рассмотрим теперь второе условие. Полиномы Гурвица обладают двумя необходимыми признаками (см. § 8.5.5): 1) они имеют вещественные коэффициенты; 2) при $a_m > 0$ и $b_n > 0$ корни этих полиномов располагаются только в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$.

Вещественность коэффициентов a_k , b_k была обоснована применительно к функции (6.14), разновидностью которой является функция (10.1). Там же в § 6.1.3 была доказана необходимость расположения нулей и полюсов сопротивлений в левой полуплоскости.

Укажем еще на три свойства полиномов Гурвица и соответственно функции (10.1). Эти свойства являются следствием рассмотренных необходимых условий физической реализуемости. Первые два свойства заключаются в том, что коэффициенты a_k , b_k являются не только вещественными, но и положительными величинами, ни одна из которых не равна нулю. Действительно,

как известно из курса алгебры, полином с вещественными коэффициентами может иметь только вещественные и комплексные попарно сопряженные корни $p_k = \sigma_k$, $p_{k,l} = \sigma_k \pm j\omega_k$. Поскольку они расположены в левой полуплоскости, $\sigma_k = -\alpha_k$, где $\alpha_k > 0$. Если полином степени m имеет m_1 вещественных корней, то количество комплексных корней равно $m_2 = m - m_1 = 2q$. При этом полином раскладывается на множители:

$$F_1(p) = a_m \prod_{k=1}^m (p - p_k) = a_m \left[\prod_{k=1}^{m_1} (p + \alpha_k) \right] \left[\prod_{k=1}^q (p + \alpha_k + j\omega_k)(p + \alpha_k - j\omega_k) \right],$$

или

$$F_1(p) = a_m \left[\prod_{k=1}^{m_1} (p + \alpha_k) \right] \prod_{k=1}^q [(p + \alpha_k)^2 + \omega_k^2]. \quad (10.3)$$

Аналогично,

$$F_2(p) = b_n \left[\sum_{k=1}^{n_1} (p + \alpha_k) \right] \prod_{k=1}^r [(p + \alpha_k)^2 + \omega_k^2], \quad (10.4)$$

где n_1 и r — количество вещественных и попарно сопряженных корней.

Раскрытие произведений (10.3), (10.4) дает полиномы с отличными от нуля положительными коэффициентами a_k , b_k , если положительные a_m и b_n . Отрицательный же знак одного из коэффициентов a_m , b_n приведет к отрицательному элементу $a_m p / b_n$ или a_m / b_n при делении полинома $F_1(p)$ на полином $F_2(p)$.

Рассмотренные свойства позволяют определить по внешним признакам, является ли реализуемой функция (10.1). Например, являются нереализуемыми следующие функции:

$$Z(p) = \frac{7p^4 + 13p^3 + 11p^2 - 9p + 5}{6p^3 + 4p^2 + 2p + 1}, \quad Z(p) = \frac{4p^3 + 2p^2 + 1}{2p^2 + p + 1}.$$

Третье свойство полиномов Гурвица и функции (10.1) заключается в том, что они являются положительными вещественными функциями (ПВФ). Так называются функции $F(p)$, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im} p = 0 \rightarrow \operatorname{Im} F(p) = 0, \quad \operatorname{Re} p \geq 0 \rightarrow \operatorname{Re} F(p) \geq 0.$$

Первое из этих условий является признаком вещественности, а второе — признаком положительности функции. Свойства ПВФ используются в некоторых практических приложениях. Читателю предоставляется возможность самостоятельно доказать, что функция (10.1) обладает свойствами ПВФ.

2. Реализация LCR-двухполюсников. Достаточность рассмотренных необходимых условий физической реализуемости означает возможность реализации LCR-двухполюсника с заданным сопротивлением (10.1). Функция (10.1), удовлетворяющая УФР, может быть реализована не в любой схеме двухполюсника. Однако для их достаточности должен существовать двухполюс-

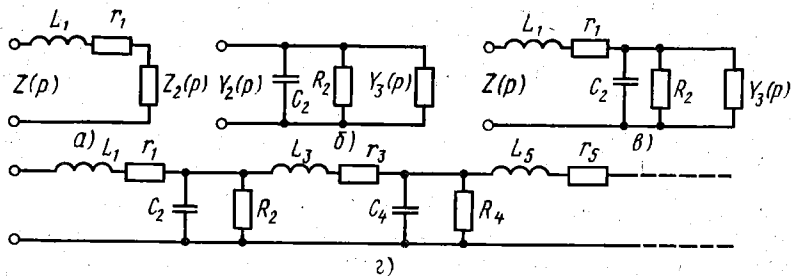


Рис. 10.1. Схема реализации LCR-двухполюсника

ник хотя бы одного вида, который имеет заданное сопротивление (10.1). В некоторых случаях возможна, например, реализация в виде двухполюсника, построение которого показано на рис. 10.1.

Пусть $m = n + 1$. Тогда, разделив $F_1(p)$ на $F_2(p)$, представим функцию (10.1) в виде

$$Z(p) = L_1 p + \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (10.5)$$

где $L_1 = c_n/b_n$ — некоторая индуктивность.

Индуктивное сопротивление $L_1 p$ получено в результате *деления старших членов* полиномов $F_1(p)$ и $F_2(p)$. Такую операцию будем называть *прямым делением*. Произведем еще раз прямое деление числителя на знаменатель во втором слагаемом сопротивления (10.5):

$$Z(p) = L_1 p + r_1 + Z_2(p) = L_1 p + r_1 + 1/Y_2(p), \quad (10.6)$$

где $r_1 = a'_n/b_n$ и

$$Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0}{a''_{n-1} p^{n-1} + a''_{n-2} p^{n-2} + \dots + a''_1 p + a''_0}. \quad (10.7)$$

Здесь прямым делением получено не индуктивное, а диссипативное сопротивление r_1 . Возможны также случаи, когда диссипативное и другие сопротивления выделяются *делением младших членов* аналогичной дроби. Такую операцию будем называть *обратным делением*. Подобные случаи рассмотрены ниже применительно к синтезу реактивных и RC-двухполюсников.

Сопротивлению (10.6) соответствует схема двухполюсника, показанная на рис. 10.1, а. Если проводимость (10.7) удовлетворяет тем же исходным условиям, что и сопротивление (10.1), то можно дважды произвести прямое деление числителя на знаменатель дроби (10.7). В результате преобразования получаем

$$Y_2(p) = C_2 p + 1/R_2 + Y_3(p) = C_2 p + G_2 + 1/Z_3(p), \quad (10.8)$$

где $C_2 = b_n/a''_{n-1}$, $1/R_2 = b'_{n-1}/a''_{n-1} = G_2$ и

$$Z_3(p) = \frac{1}{Y_3(p)} = \frac{a''_{n-1} p^{n-1} + a''_{n-2} p^{n-2} + \dots + a''_1 p + a''_0}{b''_{n-2} p^{n-2} + b''_{n-3} p^{n-3} + \dots + b''_1 p + b''_0}. \quad (10.9)$$

Проводимость (10.8) реализуется схемой, представленной на рис. 10.1, б. Объединив ее с двухполюсником, изображенным на рис. 10.1, а, получим схему реализации сопротивления (10.6), показанную на рис. 10.1, в.

Сопротивление (10.9) имеет ту же структуру, что и сопротивление (10.1). Исходное условие также остается прежним — степень числителя превышает на единицу степень знаменателя. Поэтому весь процесс преобразования можно повторить для сопротивления (10.9), как это было сделано для сопротивления (10.1), в соответствии с формулами (10.5) — (10.9). Преобразования повторяют до тех пор, пока степень последнего делителя не снизится до нулевой. При этом получается схема реализации двухполюсника, показанная на рис. 10.1, г. Она заканчивается либо rL -, либо RC -двухполюсником в зависимости от исходных степеней m и n . Такая схема синтезированного LCR -двухполюсника является простейшей и может быть названа канонической схемой цепочечного или лестничного вида.

В соответствии с выражениями (10.5) — (10.9) сопротивление лестничного двухполюсника (рис. 10.1, г) представляется в виде

$$Z(p) = L_1 p + r_1 + \frac{1}{C_2 p + G_2 + \frac{1}{L_3 p + r_3 + \frac{1}{C_4 p + G_4 + \frac{1}{L_5 p + r_5 + \dots}}}}$$

Это выражение называется *цепной дробью* и записывается условно следующим образом:

$$Z(p) = L_1 p + r_1 + \frac{1}{C_2 p + G_2} + \frac{1}{L_3 p + r_3} + \frac{1}{C_4 p + G_4} + \frac{1}{L_5 p + r_5} + \dots$$

В общем случае такая цепная дробь имеет вид

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p)} + \frac{1}{Y_4(p)} + \frac{1}{Z_5(p)} + \dots \quad (10.10)$$

Проводимость лестничных двухполюсников также описывается цепными дробями аналогично сопротивлению (10.10). Таким образом, в ряде случаев возможна реализация двухполюсников путем разложения в цепную дробь дробно-рациональной функции (10.1) или обратной ей функции.

Реализация заданной функции (10.1) может достигаться в лестничном двухполюснике и при других сопротивлениях его плеч по сравнению с канонической схемой (рис. 10.1, г). При этом величины $Y_k(p)$ в цепной дроби (10.10) могут описывать, например, проводимости RC -двухполюсников вида, как на рис. 3.32, в. г. Возможны и другие модификации проводимостей $Y_k(p)$ и сопротивлений $Z_k(p)$ в цепной дроби (10.10).

Реализация заданной функции сопротивления (10.1) может достигаться не только в виде цепных схем. Например, в некоторых случаях возможна реализация по алгоритму, который соответствует разложению функции (10.1) на сумму простейших слагаемых с учетом значения полинома (10.4):

$$Z(p) = A_0 p + R_0 + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{A_k}{p + \alpha_k} + \sum_{k=1}^r \frac{A_k p + B_k}{(p + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}. \quad (10.11)$$

Здесь все коэффициенты A_k , B_k положительны по условию положительности коэффициентов a_k , b_k функции (10.1). Два первых слагаемых в сумме (10.11) представляют сопротивление RL -двухполюсника такого вида, как в продольных плечах канонической схемы рис. 10.1, *з*. Слагаемые под знаком первой суммы (10.11) представляют сопротивления RC -двухполюсника такого вида, как в поперечных плечах канонической схемы рис. 10.1, *з*. Слагаемые же под знаком второй суммы (10.11) описывают сопротивления параллельных контуров (рис. 10.2, *а*). Нетрудно подсчитать, что эти контуры имеют коэффициенты затухания $\alpha_k = (r_k/L_k + 1/R_k C_k)/2$ и собственные частоты $\omega_k = \sqrt{\beta_k^2 - \alpha_k^2}$, где $\beta_k = \omega_{0k}/\sqrt{1 + r_k/R_k}$, $\omega_{0k} = 1/\sqrt{L_k C_k}$ — резонансные частоты контуров. В целом реализующая схема с сопротивлением (10.11) состоит из последовательно соединенных двухполюсников перечисленных видов.

Если на сумму простейших слагаемых разложить не сопротивление, а проводимость двухполюсника, то вместо параллельных контуров (рис. 10.2, *а*) получались бы последовательные контуры (рис. 10.2, *б*). Соответственно изменились бы и остальные двухполюсники. При этом все указанные двухполюсники должны быть соединены параллельно, что и дает новую схему реализации. В общем случае реализующие LCR -двухполюсники со смешанным соединением элементов имеют более сложные схемы по сравнению с описанными. Перечисленные двухполюсники могут входить и в состав плеч лестничной реализующей схемы.

Приведенные здесь примеры не являются доказательством достаточности условий физической реализуемости, а лишь иллюстрируют некоторые методики реализации функции (10.1), удовлетворяющей УФР.

3. Реактансные функции. Сопротивление и проводимость LC -двухполюсников, как и LCR -двухполюсников, описываются ПФФ. Однако LC -двухполюсники имеют реактивное (чисто мнимое)

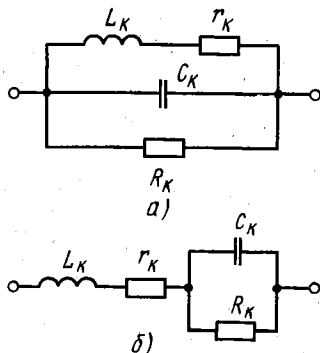


Рис. 10.2. Варианты схем LCR -двухполюсников

сопротивление. Поэтому для них аппроксимирующая функция (10.1) должна быть изменена.

Реактивные сопротивления и проводимости, являясь частным случаем передаточных функций (6.2), равны их мнимой части $jT_B(\omega) = jX(\omega) = 1/jB(\omega)$. Поэтому такие сопротивления и проводимости обладают свойством (6.8) нечетной симметрии. Следовательно, для реактивных двухполюсников выражение (10.1) надо изменить так, чтобы оно стало нечетной функцией. Для этого числитель $F_1(p)$ надо сделать нечетным полиномом, а знаменатель $F_2(p)$ — четным полиномом (или наоборот). Тогда получится четыре разновидности функции (10.1):

$$Z(p) = \frac{a_{2q+1}p^{2q+1} + a_{2q-1}p^{2q-1} + a_1p}{b_{2r}p^{2r} + b_{2(r-1)}p^{2(r-1)} + \dots + b_0}, \quad r = q, q + 1, \quad (10.12)$$

$$Z(p) = \frac{a_{2q}p^{2q} + a_{2(q-1)}p^{2(q-1)} + \dots + a_0}{b_{2r+1}p^{2r+1} + b_{2r-1}p^{2r-1} + \dots + b_1p}, \quad r = q, q - 1. \quad (10.13)$$

Эти функции называются реактансными. Их коэффициенты a_k , b_k по-прежнему являются вещественными положительными величинами, но корни их числителя и знаменателя лежат на мнимой оси $p = j\omega$, поскольку полиномы (10.3), (10.4) являются четными или нечетными только при всех $\alpha_k = 0$. На эти корни накладываются два ограничения, соблюдение которых обеспечивает физическую реализуемость реактансных функций.

Во-первых, все нули $p_k = j\omega_k$ и полюсы $p_l = j\omega_l$ реактансной функции должны быть простыми. Во-вторых, эти нули и полюсы должны чередоваться друг с другом, т. е. должны чередоваться частоты ω_k , ω_l последовательных и параллельных резонансов. Докажем необходимость этих условий физической реализуемости.

Разложим на сумму простейших слагаемых, например, функцию (10.12) первого вида. Предположим при этом, что некоторый k -й полюс является не простым, а кратным. При второй кратности этого корня указанное разложение имеет вид

$$Z(p) = A_0p + \frac{A_1p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{A_2p}{p^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{A_kp}{p^2 + \omega_k^2} + \frac{B_kp}{(p^2 + \omega_k^2)^2} + \frac{A_{k+1}p}{p^2 + \omega_{k+1}^2} + \dots + \frac{A_{r-1}p}{p^2 + \omega_{r-1}^2}. \quad (10.14)$$

Все слагаемые этого выражения являются сопротивлениями некоторых двухполюсников, соединенных последовательно. Однако в слагаемом с коэффициентом B_k степени числителя и знаменателя отличаются на три единицы. Этого не может быть по первому условию физической реализуемости (см. § 10.1.1). Следовательно, предположение о допустимости кратных полюсов сопротивления (кратных нулей проводимости) является неверным.

Аналогично доказывается недопустимость кратных полюсов проводимости (кратных нулей сопротивления).

Рассмотрим второе условие физической реализуемости реактансной функции. При отсутствии кратных полюсов разложение (10.14) принимает вид

$$Z(p) = A_0 p + \sum_{k=1}^r \frac{A_k p}{p^2 + \omega_k^2}. \quad (10.15)$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{dZ(p)}{dp} = A_0 + \sum_{k=1}^r A_k \frac{\omega_k^2 - p^2}{(\omega_k^2 + p^2)^2}.$$

Подставив сюда значения $p = j\omega$ и $Z(p) = jX(\omega)$, получаем окончательно

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = A_0 + \sum_{k=1}^r A_k \frac{\omega^2 + \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} > 0. \quad (10.16)$$

Таким образом, полученная производная положительна на всех частотах. Это и означает, что реактансные функции описывают сопротивления с чередующимися нулями и полюсами, как показано на рис. 10.3. Здесь изображены характеристики четырех

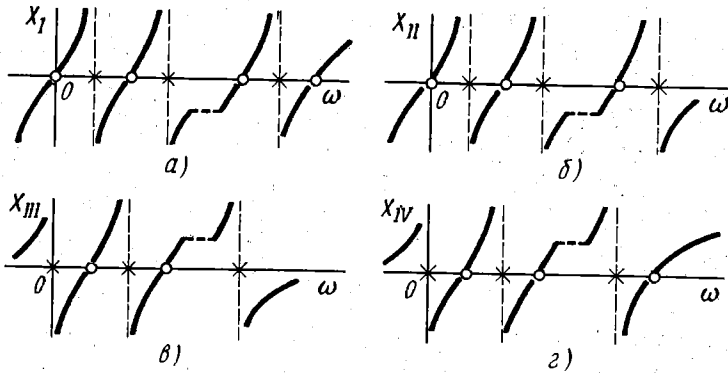


Рис. 10.3. Частотные характеристики сопротивления реактивных двухполюсников

типов реактивных сопротивлений, соответствующих четырем разновидностям реактансных функций (10.12), (10.13). Их нули и полюсы на конечных ненулевых частотах соответствуют последовательным и параллельным резонансам в реактивном двухполюснике.

В § 8.5.5 отмечалось чередование корней четной и нечетной частей полиномов Гурвица $F(p) = F_{\text{чет}}(p) + F_{\text{нечет}}(p)$. Поэтому проверка УФР для числителя и знаменателя функции (10.1) может осуществляться для образованных из них реактансных функций.

4. Реализация реактивных двухполюсников. Реактивные двухполюсники могут быть реализованы тем же методом, что LCR -двухполюсники. Для этого надо аналогичным образом представить реактансные функции (10.12), (10.13) в виде цепных дробей (10.10). Тогда, например, для реактансной функции (10.12) первого вида находим дробь

$$Z_1(p) = L_1 p + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{L_3 p} + \dots + \frac{1}{C_{2q} p} + \frac{1}{L_{2q+1} p}. \quad (10.17)$$

Коэффициенты этой цепной дроби определяют параметры цепочечной схемы, реализующей заданное сопротивление. Можно иначе реализовать ту же реактансную функцию (10.12) первого вида.

Для этого следует разложить в цепную дробь не сопротивление $Z_1(p)$, а проводимость $Y_1(p) = 1/Z_1(p)$, применив обратное деление числителей на знаменатели. Тогда получаем

$$Y_1(p) = \frac{1}{L_1 p} + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{L_3 p} + \dots + \frac{1}{C_{2q} p} + \frac{1}{L_{2q+1} p}. \quad (10.18)$$

Эквивалентные схемы, имеющие сопротивление (10.17) и обратную ему проводимость (10.18), показаны на рис. 10.4, а. Эти схемы имеют одинаковую характеристику сопротивления (рис. 10.3, а). Аналогично получаются и другие эквивалентные схемы, представленные на рис. 10.4, б — г, которые имеют характеристики, изображенные соответственно на рис. 10.3, б — г.

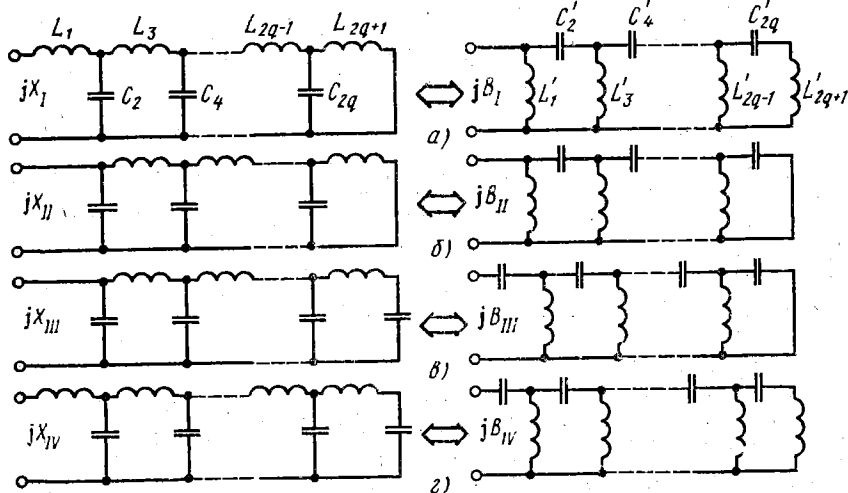


Рис. 10.4. Канонические схемы Кауэра

Цепочечные (цепные, лестничные) реализующие схемы реактивных двухполюсников (рис. 10.4) называются каноническими схемами Кауэра.

Для реактивных двухполюсников существует еще один метод реализации заданных реактансных функций. Согласно уравнению (10.15) двухполюсник представляется в виде последовательного соединения параллельных контуров без потерь с сопротивлениями

$$Z_k(\rho) = \frac{1}{Y_k(\rho)} = \frac{1}{C_k\rho + 1/L_k\rho}$$

Здесь $C_k = 1/A_k$, $L_k = A_k/\omega_k^2$ — параметры k -го контура, который является частным случаем двухполюсника, изображенного на рис. 10.2, а при $r_k = 0$ и $R_k = \infty$.

Если для той же реактансной функции разложить на сумму простейших слагаемых не сопротивление, а обратную ему проводимость, то получится другая схема, эквивалентная первой. Она состоит из последовательных контуров, соединенных параллельно. Полученные таким образом двухполюсники со смешанным соединением элементов называются каноническими схемами Фостера. Они показаны для разных типов характеристик (рис. 10.3, а—г) соответственно на рис. 10.5, а—г.

Из сопоставления реактансных функций (10.12), (10.13) с характеристиками соответствующих сопротивлений (см. рис. 10.3) и схемами рис. 10.4, 10.5 видно, что в любой из канонических схем количество элементов на единицу превышает число резонансов.

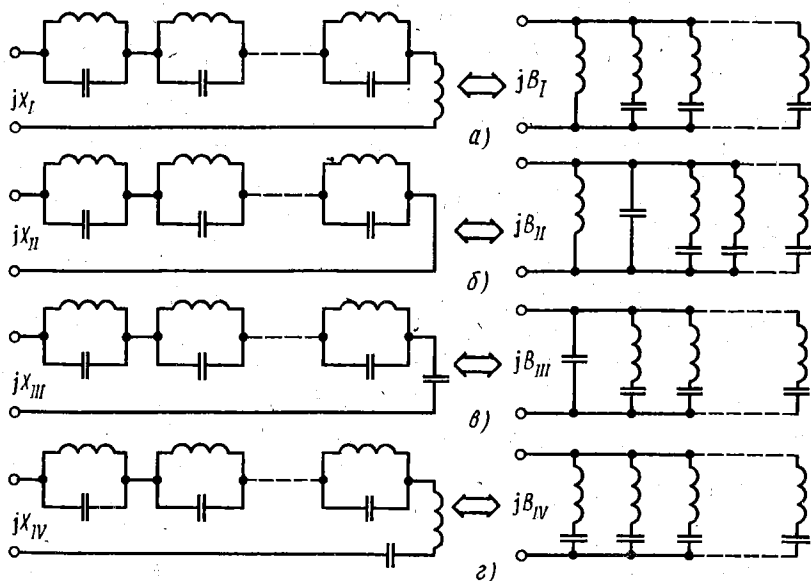


Рис. 10.5. Канонические схемы Фостера

5. Входные функции RC-двухполюсников. Для RC-двухполюсников входная функция (10.1) имеет шесть особенностей, которые предопределяют ее реализуемость. Первые четыре особенности обусловлены отсутствием индуктивностей в RC-двухполюснике, а остальные две — пренебрежением потерями в конденсаторах, как это обычно делается в ARC-четырёхполюсниках. Для установления отмеченных особенностей рассмотрим сопротивление (10.1) в форме (10.11):

$$Z(p) = R_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p + \alpha_k}. \quad (10.19)$$

Здесь отсутствует первое слагаемое суммы (10.11), которое соответствует индуктивному сопротивлению. Слагаемые под знаком второй суммы выражения (10.11), описывающие сопротивление резонансных контуров, также отброшены. При этом соответственно изменен верхний предел суммирования в сумме (10.19). Все особенности функции (10.1), о которых говорилось выше, устанавливаются по ее представлению в форме (10.19). Рассмотрим эти особенности.

Первая особенность: степень числителя функции (10.1) не может превышать степени ее знаменателя, так что $m = n$ или $m = n-1$. Это видно из соотношения (10.19), если его слагаемые привести к общему знаменателю.

Вторая особенность: все полюсы и нули сопротивления (10.1) являются вещественными, т. е. располагаются на вещественной оси комплексной плоскости $p(\sigma, j\omega)$ (разумеется, на отрицательной полуоси). Утверждение о расположении полюсов сопротивления (нулей проводимости) следует непосредственно из соотношения (10.19). Что касается расположения нулей сопротивления (полюсов проводимости), то оно подтверждается аналогичным рассуждением о проводимости RC-двухполюсника.

Третья особенность: все полюсы и нули сопротивления (10.1) являются простыми. Это доказывается методом от противного. Если предположить существование, например, двукратного полюса, то одно из слагаемых в сумме (10.19) надо заменить другим:

$$Z_k(p) = A_k / (p + \alpha_k)^2.$$

Здесь степени числителя и знаменателя отличаются на две единицы, что противоречит первому условию физической реализуемости (см. § 10.1.1). Аналогично доказывается невозможность кратных полюсов проводимости (кратных нулей сопротивления).

Четвертая особенность: нули и полюсы сопротивления (10.1) на оси σ чередуются друг с другом. Для подтверждения этого положения рассмотрим характер зависимости $Z(\sigma)^*$.

* Вещественность полюсов $p_k = \sigma_k$ позволяет анализировать функции $Z(\sigma)$ при $p = \sigma$, что проще раздельного анализа частотных зависимостей $R(\omega) = \text{Re } Z(\omega)$ и $X(\omega) = \text{Im } Z(\omega)$.

Приняв $\rho = \sigma$, продифференцируем сумму (10.19):

$$\frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} = - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(\sigma + \alpha_k)^2}.$$

Поскольку эта производная отрицательна при любых σ , искомая зависимость (10.19) при $\rho = \sigma$ может иметь только такой вид, как на рис. 10.6, а. Из этого графика уточняется также порядок чередования нулей и полюсов сопротивления. Первым (ближайшим к $\sigma = 0$) может быть только полюс сопротивления, а последним — нуль сопротивления.

Пятая особенность: *возможно существование двух нулей сопротивления (10.1) в бесконечности ($\sigma = \pm \infty$)*. Эта особенность присуща RC-двухполюсникам только в случае пренебрежения потерями в конденсаторе на бесконечно большой частоте. При этом в схеме замещения конденсатора, представленной на рис. 3.32, в, следует принять $r' = 0$, перейдя к его основной эквивалентной схеме (см. рис. 3.32, а). Тогда в сопротивлении (10.19) можно принять $R_0 = 0$. При этом из графика рис. 10.6, а получается другой график, показанный на рис. 10.6, б.

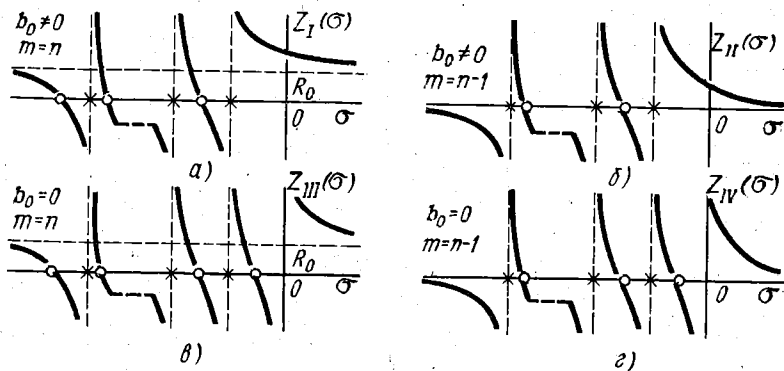


Рис. 10.6. Характеристики сопротивления RC-двухполюсников

Из него наглядно видно появление нулей сопротивления в бесконечности.

Шестая особенность: *возможно существование полюса сопротивления (10.1) на нуле ($\sigma = 0$)*. Эта особенность присуща RC-двухполюсникам, содержащим идеальные емкости на любых частотах. Для них в схемах замещения конденсатора (см. рис. 3.32, в, г) $r' = r'' = 0$ и $R' = R'' = \infty$. Тогда в сумме (10.19) следует принять один из корней $\alpha_k = A_k/R_k = A_k/\infty = 0$, что и подтверждает существование полюса сопротивления на нуле (рис. 10.6, в). Эту особенность можно сформулировать иначе: функция (10.1) имеет коэффициент $b_0 = 0$, если RC-двухполюсник содержит последовательно включенную идеальную емкость. Если при этом и $R_0 = 0$, то получаются также нули на бесконечности (рис. 10.6, г).

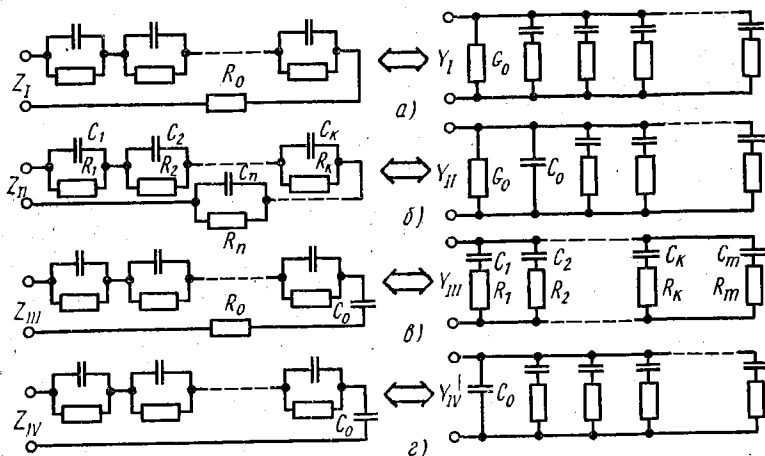


Рис. 10.7. Последовательно-параллельные схемы реализации RC -двух-полюсников

6. Реализация RC -двухполюсников. Сопротивление (10.1) RC -двухполюсников может реализоваться в различных схемах, показанных на рис. 10.7, a — z . Им соответствуют характеристики, приведенные на рис. 10.6, a — z , где обозначены значения b_0 и m , от которых зависит способ реализации функции (10.1).

При $m = n$ (см. рис. 10.6, a , $в$) *прямым делением* выделяют целую часть дроби (10.1). Полученная целая часть определяет значение R_0 (левые схемы на рис. 10.7, a , $в$). При $b_0 = 0$ (см. рис. 10.6, z , $в$) производят *обратное деление* числителя на знаменатель функции (10.1) или дроби, оставшейся после выделения целой части $Z(p)$. При этом образуется слагаемое $1/C_0p$, определяющее значение емкости C_0 (левые схемы на рис. 10.7, z , $в$). При $b_0 \neq 0$ и $m = n-1$ (см. рис. 10.6, $б$) функцию (10.1) раскладывают на сумму простейших дробей вида $Z_k(p) = R_k/(1 + B_k p)$, из которых определяют параметры R_k и $C_k = B_k/R_k$ k -х двухполюсников в левой схеме на рис. 10.7, $б$. Так же раскладывают правильные дроби, оставшиеся после прямого и обратного делений при $m = n$ и $b_0 = 0$.

Для синтеза схем, показанных в правой части рис. 10.7, преобразуют функцию проводимости $Y(p)$, обратную функции (10.1). При $m = n-1$ (см. рис. 10.6, $б$, z) *прямым делением* выделяют целую часть дроби $Y(p)$. Эта целая часть C_0p определяет значение емкости C_0 (правые схемы на рис. 10.7, $б$, z). Если $b_0 \neq 0$ (см. рис. 10.6, a , $б$), то производят *обратное деление* числителя на знаменатель функции $Y(p)$ или дроби, оставшейся после выделения целой части $Y(p)$. При этом получается слагаемое, определяющее проводимость G_0 (правые схемы на рис. 10.7, a , $б$). При $m = n$ и $b_0 = 0$ (см. рис. 10.6, $в$) сначала выносят за скобку множитель p , затем полученную правильную дробь раскладывают на сумму простейших дробей. После их умножения на вынесен-

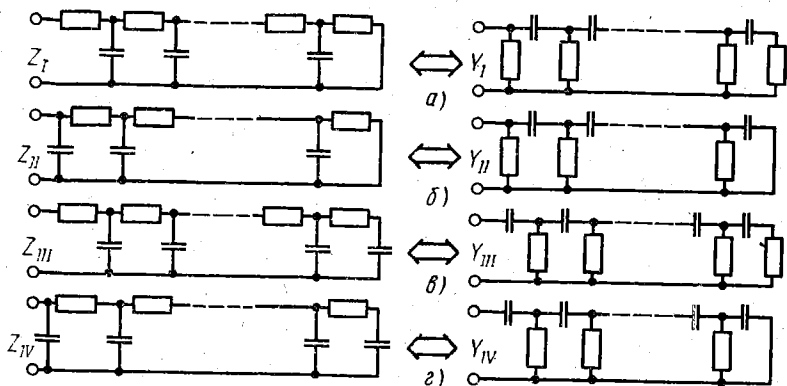


Рис. 10.8. Лестничные схемы реализации RC -двухполюсников

ный множитель p получают дроби вида $Y_k(p) = C_k p / (1 + A_k p)$, определяющие параметры C_k и $R_k = A_k / C_k$ k -х двухполюсников в правой схеме на рис. 10.7, в. Такие же операции производят с функциями, полученными после прямого и обратного деления при $m = n - 1$ и $b_0 \neq 0$.

Реализация функции сопротивления (10.1), а также обратной ей функции проводимости возможна для RC -двухполюсников и с помощью цепных дробей вида (10.10). При этом производится прямое или обратное деление числителя на знаменатель для всех составляющих сопротивления и проводимости цепной дроби, как описано выше.

Такая реализация приводит к RC -двухполюсникам лестничного вида, показанным на рис. 10.8. Схемы, изображенные на рис. 10.8, а—г, имеют прежние характеристики, показанные соответственно на рис. 10.6, а—г. Лестничные RC -двухполюсники эквивалентны соответствующим двухполюсникам со смешанным соединением элементов (см. рис. 10.7, а—г).

§ 10.3. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Как и при синтезе двухполюсников, важными частными случаями являются задачи синтеза реактивных и RC -четыреполюсников. Последние задачи относятся к синтезу активных четырехполюсников. Поэтому указанные задачи рассматриваются отдельно.

1. Задача аппроксимации. Условия физической реализуемости передаточных функций четырехполюсника (6.9) однозначно определяются их свойствами. Если знаменатель передаточной функции является полиномом Гурвица, то она физически реализуема. Если из цепи выделены фазовые контуры с нулями в правой полуплоскости, то оставшийся четырехполюсник является минимально-фазовым (см. § 6.1.4). Его передаточная функция имеет в числителе также полином Гурвица. Это является вторым условием физической реализуемости передаточных функций четырехполюсников минимально-фазового типа.

Вид частотных и фазовых характеристик четырехполюсника определяется соответственно модулем и аргументом (6.3) его передаточной функции. При синтезе четырехполюсника по рабочим параметрам задаются рабочей передаточной функцией (8.23) или ее модулем (8.24) и аргументом (8.27). Рассмотрение характеристики рабочего затухания (8.26) в децибелах упрощается при использовании квадрата рабочего ослабления (8.24), т. е. функции $H_p^2(p)$. Соответственно при синтезе четырехполюсников принято задавать не частотную характеристику $T(p)$, а характеристику квадратичного ослабления (4.3), называемую *амплитудно-квадратичной* или *квадратичной частотной характеристикой* (АКХ):

$$H^2(p) = 1/T^2(p). \quad (10.20)$$

Эта характеристика может описываться полиномом, как, например, в случае последовательного контура с коэффициентом передачи (4.8) и полиномиальной передаточной функцией $H = 1/K$. Четырехполюсники с полиномиальными характеристиками (10.20) также называются *полиномиальными*. В технике связи широко используются, например, полиномиальные фильтры, к числу которых относятся, в частности, фильтры типа ρ .

При синтезе четырехполюсников форма частотной характеристики может задаваться однозначно (в пределах ее физической реализуемости). Так же однозначно можно задавать необходимую форму фазовой характеристики. Однако *невозможно одновременно и независимо задавать однозначно обе указанные характеристики для минимально-фазовой цепи, поскольку они связаны друг с другом уравнением* (6.23).

При необходимости одновременного предъявления некоторых требований и к частотной и к фазовой характеристикам четырехполюсника, как, например, в амплитудно-фазовых корректорах, форма этих характеристик не задается. В этом случае задают границы их допустимых значений, подобно ограничению рабочего затухания в фильтрах, показанному на рис. 9.1, з. Вместо допустимых значений фазовой характеристики для фильтров часто задают границы коридора, за пределы которого не должна выходить частотная характеристика группового времени прохождения, как показано на рис. 10.9.

При предъявлении технических требований в указанной форме должна быть найдена аппроксимирующая передаточная функция четырехполюсника, удовлетворяющая этим требованиям и условиям физической реализуемости. Модуль и аргумент такой передаточной функции удовлетворяют уравнению (6.23).

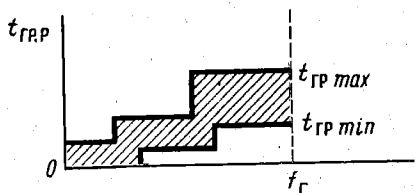


Рис. 10.9. Коридор допустимых значений ГВП четырехполюсника

Поиск передаточной функции удобно производить на ЭВМ. Например, в случае полиномиального фильтра подбирают коэффициенты a_k полинома Гурвица, при которых его модуль и аргумент удовлетворяют заданным требованиям. Проверка же соблюдения этих требований производится путем численного расчета на ЭВМ частотной и фазовой характеристик фильтра при каждом новом выбранном значении коэффициентов a_k . Существуют специальные алгоритмы поиска этих коэффициентов, обеспечивающие быстрое их схождение к необходимой величине. При структурном синтезе производится подбор не коэффициентов полинома Гурвица, а непосредственно параметров элементов заданной схемы четырехполюсника.

Если в аппроксимационной задаче найдена частотная характеристика (6.20), то для последующего решения задачи реализации следует определить передаточную функцию $H(p)$. Такое определение основано на представлении функции (6.20) в виде произведения сопряженных множителей:

$$H^2(p) = H(p)H(-p). \quad (10.21)$$

После определения на ЭВМ корней p_k этой функции выбирают из них корни в левой полуплоскости p . С их помощью находят числитель (10.3) и знаменатель (10.4) передаточной функции (10.20).

2. Оптимальные передаточные функции. При синтезе четырехполюсников часто задают требования общего характера, при соблюдении которых четырехполюсник и его передаточную функцию можно считать в определенном смысле оптимальными. При этом указанные требования являются критериями оптимальности. Например, при синтезе фильтров критерием оптимальности может являться требование обеспечения максимально возможной избирательности при заданном количестве элементов фильтра. Фильтры, оптимальные по этому критерию, имеют так называемые чебышевские частотные характеристики и называются чебышевскими фильтрами. Рассмотрим оптимальные по избирательности полиномиальные фильтры.

Пусть заданы полиномы $F_n(\Omega)$ степени n со старшим коэффициентом $a_n = 1$, которые имеют только вещественные корни, расположенные в интервале $[-1, 1]$. Такие полиномы пригодны для аппроксимации характеристик ФНЧ с нормированной граничной частотой $\Omega_r = 1$, где $\Omega = \omega/\omega_r = f/f_r$ (см. рис. 9.1, а). П. Л. Чебышев нашел полиномы $P_n(\Omega) \subset F_n(\Omega)$, которые наименее отклоняются от нуля в интервале $[-1, 1]$. Это отклонение одинаково для всех экстремумов полиномов $P_n(\Omega)$ и их значений на границах интервала $[-1, 1]$. На рис. 10.10, а показан произвольный полином $F_6(\Omega)$ и полином $P_6(\Omega) \subset F_6(\Omega)$. Чтобы такие полиномы можно было использовать для описания характеристики фильтра, их надо нормировать, разделив на величину максимального отклонения в интервале $[-1, 1]$. При этом нормиро-

ванные полиномы Чебышева имеют вид

$$\tilde{P}_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) = \frac{1}{2} [(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1})^n + (\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1})^n]. \quad (10.22)$$

Значения этих полиномов приведены в табл. П.23. Пример нормировки полиномов, графики которых изображены на рис. 10.10, а, приведен на рис. 10.10, б. Так как полином Чебышева имеет наименьшее из возможных максимальное отклонение 2^{n-1} , то при делении на эту величину нормированные полиномы (10.22) наиболее отклоняются от нуля за пределами интервала $[-1, 1]$ по сравнению с другими нормированными полиномами $\tilde{F}_n(\Omega)$. Это наглядно видно из рис. 10.10, б.

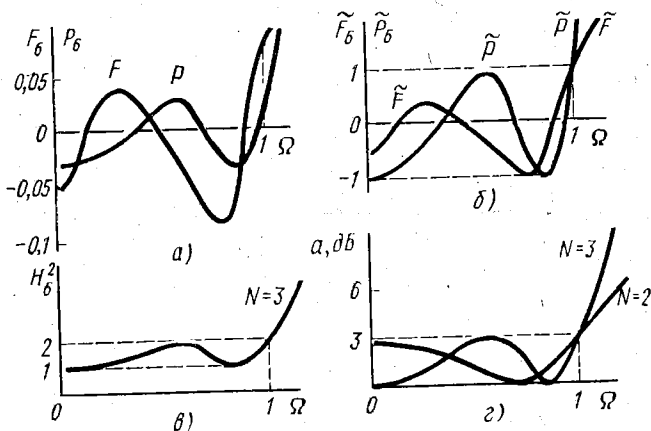


Рис. 10.10. Построение характеристики затухания чебышевского ФНЧ

При соответствующем изменении масштаба полиномов (10.22) и переносе начала отсчета получается следующая аппроксимация АКХ:

$$H_N^2(\Omega) = 0,5[3 + \tilde{P}_{2N}(\Omega)] = 1 + \tilde{P}_N^2(\Omega) = 1 + \varepsilon P_N^2(\Omega), \quad (10.23)$$

где ε — коэффициент пропорциональности, определяющий неравномерность АКХ в полосе пропускания, а переход от первого ко второму равенству сделан с учетом формулы $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$.

Нетрудно убедиться, что это уравнение при $\Omega \geq 0$ описывает характеристику ФНЧ с неравномерностью затухания в полосе пропускания $\Delta a = 3 \text{ дБ}$. Действительно, $H_{\min}^2 = H^2(0) = 1$ ($10 \lg H_{\min}^2 = 0$) и $H_{\max}^2 = H^2(1) = 2$ ($10 \lg H_{\max}^2 = 3 \text{ дБ}$).

В соответствии с рис. 10.10, б на рис. 10.10, в построена характеристика $H_0^2(\Omega)$ чебышевского ФНЧ, а на рис. 10.10, г — его характеристика затухания ($N = 3$). Здесь же для сравнения показана характеристика чебышевского ФНЧ второго порядка ($N = 2$).

При использовании характеристики (10.23) в случае реактивных ФНЧ величина N равна количеству реактивных элементов в фильтре, т. е. его порядку. Соответствующее аналитическое преобразование частоты дает при этом и другие фильтры. В частности, полученные таким образом ПФ имеют N резонансных контуров. Их избирательность, подсчитанная по уравнению (10.23), приведена в табл. П. 24. Ее сравнение с данными табл. П.3—П.18 подтверждает вывод о предельно возможной избирательности чебышевских фильтров.

Из сравнения характеристик на рис. 10.10, *г* видно, что при увеличении порядка N чебышевского фильтра затухание в полосе задерживания становится больше, т. е. избирательность фильтра возрастает. Избирательность чебышевских фильтров может быть повышена также за счет введения полюсов затухания, как в фильтрах типа m (см. рис. 9.8, *г*). Характеристики таких чебышевских фильтров описываются последним равенством (10.23), в котором $P_N(\Omega)$ является не полиномом, а дробью Чебышева. В полосе пропускания фильтра эта дробь по-прежнему обеспечивает свойство изокстремальности характеристики затухания, т. е. равенство всех максимумов и равенство всех минимумов затухания (рис. 10.11, *а*). Полюс же затухания в полосе задерживания определяется корнем знаменателя дроби Чебышева, равным частоте Ω_∞ . В схеме чебышевского фильтра такой полюс, как и в фильтре типа m (см. рис. 9.7, *в, г*), обеспечивается либо контуром L_2, C (рис. 10.12, *а*), либо контуром L, C_1 (рис. 10.12, *б*), настроенным на частоту $\omega_\infty = \Omega_\infty \omega_r$.

При повышении степени знаменателя дроби Чебышева возрастает и количество полюсов затухания. На рис. 10.11, *б* пока-

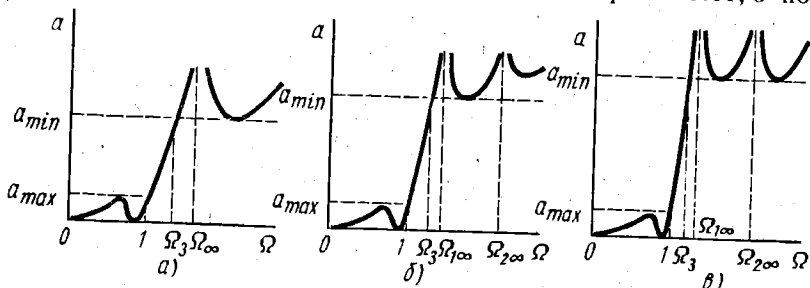


Рис. 10.11. Характеристики фильтров с полюсами затухания

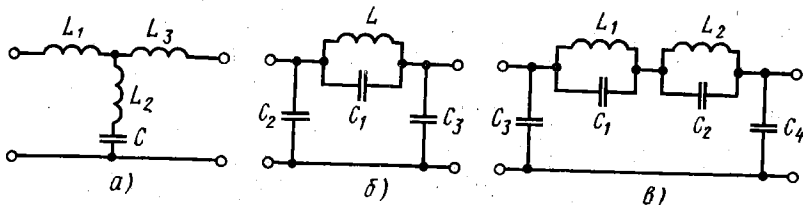


Рис. 10.12. Схемы фильтров с полюсами затухания

зана характеристика чебышевского фильтра с двумя полюсами затухания. Она может быть получена в фильтре, содержащем два резонансных контура L_1, C_1 и L_2, C_2 (рис. 10.12, в), настроенных соответственно на частоты полюсов $\omega_{1\infty}, \omega_{2\infty}$.

В чебышевских фильтрах с полюсами затухания избирательность получается еще выше, чем в полиномиальных чебышевских фильтрах. В фильтрах высокого порядка при определенных условиях это приводит к экономии в количестве элементов фильтра. *Предельное повышение избирательности в рассмотренном случае достигается особым расположением полюсов затухания, при котором характеристика затухания обладает свойством изокстремальности также в полосе задерживания.* Это свойство означает равенство всех минимумов затухания в полосе задерживания $[\Omega_c, \infty]$, как показано на рис. 10.11, в. Такие изокстремальные характеристики описываются по-прежнему последним равенством (10.23), в котором дробь Чебышева надо заменить дробью Золотарева. Корни знаменателя этой дроби имеют не произвольные заданные значения, как в дроби Чебышева, а вполне определенные для фильтра N -го порядка значения, обеспечивающие изокстремальность характеристики затухания в полосе задерживания. Фильтры с подобными характеристиками называются изокстремальными или золотаревскими фильтрами. Их схемы имеют такой же вид, как и схемы чебышевских фильтров (рис. 10.12, в), но требуют специальной настройки контуров L_1, C_1 и L_2, C_2 .

Повышение избирательности, достигаемое в чебышевских фильтрах, вступает в противоречие с требованием уменьшения искажений. В частности, чебышевские фильтры имеют относительно высокий уровень фазовых искажений. Минимизировать эти искажения можно, задавшись передаточной функцией с минимальным отклонением ее аргумента $\theta(\omega)$ от прямой линии. Однако избирательность фильтра с такой передаточной функцией получается невысокой.

Компромиссное решение достигается при аппроксимации АКХ (10.20) полиномами Баттерворта $B_{2n}(\Omega) = \Omega^{2n}$:

$$H_n^2(\Omega) = 1 + B_{2n}(\Omega) = 1 + \Omega^{2n}. \quad (10.24)$$

Баттервортовские характеристики называются также *максимально-гладкими* или *максимально-плоскими*. Их характерной особенностью является равенство нулю всех производных по Ω вплоть до $(2n - 1)$ -й производной в точке $\Omega = 0$. При этом в полосе пропускания характеристика (10.24) максимально «прижимается» к оси частот по сравнению с любыми другими полиномиальными характеристиками. В этом смысле ее можно считать оптимальной. При таком ее свойстве обеспечивается малый уровень частотных и фазовых искажений в баттервортовских фильтрах с максимально-плоской характеристикой (10.24). Для сравнения на рис. 10.13 показаны характеристики группового

времени прохождения чебышевского (а) и баттервортовского (б) фильтров. Однако избирательность последних относительно невелика (см. табл. П.25).

3. Графо-аналитические методы аппроксимации. Характеристики синтезируемых четырехполюсников могут задаваться графически. В этом случае их надо описать аналитически для решения последующей задачи реализации. Существуют различные методы аппроксимации заданных графических характеристик. Среди них отметим три метода — по Чебышеву, по Тейлору и по минимуму квадратичной (средней квадратичной) ошибки.

Обозначим через $F_n(\Omega) = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ множество значений заданной частотной характеристики в интервале $[-1, 1]$. Тогда наилучшее по Чебышеву приближение функции $f_n(\Omega)$ к заданной характеристике обеспечивается при соблюдении равенства

$$f_n(\Omega) - F_n(\Omega) = 2^{1-n} \bar{P}_n(\Omega). \quad (10.25)$$

Здесь $\bar{P}_n(\Omega)$ определяется соотношением (10.22), а в целом правая часть уравнения (10.25) представляет собой полином Чебышева, наименее отклоняющийся от нуля в интервале $[-1, 1]$. Это обстоятельство и определяет наилучшее приближение аппроксимирующей функции в смысле ее минимального отклонения от заданной характеристики в заданном интервале. Из уравнения (10.25) определяется $n + 1$ коэффициент аппроксимирующей функции $f_n(\Omega)$ по заданным значениям $F_n(\Omega)$ и $\bar{P}_n(\Omega)$.

При аппроксимации по Тейлору в интервале $[0, \omega_r]$ исходят из следующего уравнения:

$$f_n(\omega) - F_n(\omega) = B_n(\omega), \quad (10.26)$$

где $f_n(\omega)$ — аппроксимирующая функция степени n ; $F_n(\omega)$ — аппроксимируемая функция, для которой известны значения в точках $\omega = 0$ и $\omega = \omega_r$, а также $n - 1$ производная в точке $\omega = 0$; $B_n(\omega) = \omega^n$ — полином Баттерворта.

Из уравнения (10.26) определяется $n + 1$ коэффициент передаточной функции (10.20).

При аппроксимации по Тейлору могут использоваться полиномы B_n нечетной степени $n = 2m + 1$ вместо полиномов четной степени $n = 2m$. Необходимость в этом может возникнуть при аппроксимации не частотной характеристики, а самой передаточной функции $H(p)$. Существуют также варианты аппроксимации по Чебышеву с нечетными степенями полиномов.

При аппроксимации по минимуму квадратичной ошибки рассматривается функционал

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^n [f(\omega_k) - F_n(\omega_k)]^2 / \sigma_k^2,$$

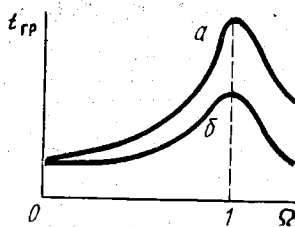


Рис. 10.13. Характеристика ГВП чебышевского (а) и баттервортовского (б) фильтров

где $f(\omega_k)$ — значения полиномиальной или дробно-рациональной аппроксимирующей функции на n частотах заданного диапазона $[\omega_1, \omega_n]$; σ_k^2 — весовой множитель, который обычно выбирают равным единице, если нет специфических соображений по его выбору.

Аппроксимирующая функция $f(\omega)$ должна содержать $m < n$ неизвестных коэффициентов, которые выбирают таким образом, чтобы функционал δ^2 стал минимальным. Этот выбор может осуществляться на ЭВМ с помощью специальной стандартной программы. Следует заметить, что при $m = n$ задача сводится к определению искомого n коэффициентов путем решения системы из n линейных уравнений, обеспечивающих значение $\delta^2 = 0$.

4. Реализация пассивных четырехполюсников с потерями. Задача реализации заданной передаточной функции четырехполюсника решается рядом различных методов. Один из них основан на использовании четырехполюсников постоянного характеристического сопротивления (см. рис. 9.50, а). Рассмотрим этот метод.

При заданной рабочей передаточной функции (8.23) ее можно представить в виде произведения простейших сомножителей:

$$H_p(p) = \prod_{k=1}^n H_{pk}(p). \quad (10.27)$$

Здесь каждый из сомножителей дроби определяется в соответствии с выражениями (10.3), (10.4). Наложим условие, чтобы каждый сомножитель $H_{pk}(p)$ функции (10.27) описывал передаточную функцию четырехполюсника постоянного характеристического сопротивления R_0 . Тогда согласно формуле (9.81)

$$H_{pk}(p) = 1 + Z_k(p)/R_0.$$

Отсюда определяется искомое сопротивление

$$Z_k(p) = R_0[H_{pk}(p) - 1]. \quad (10.28)$$

Согласно формулам (10.27) и (10.28) синтезированный четырехполюсник состоит из цепочечно соединенных элементарных четырехполюсников такого вида, как на рис. 9.50, а. В этих элементарных четырехполюсниках сопротивления Z_1 заменены различными сопротивлениями Z_k , а весь четырехполюсник нагружен с обеих сторон на сопротивления R_0 . Сами же двухполюсники с сопротивлениями (10.28) синтезируются известным образом (см. § 10.1.2).

Другой метод реализации может быть применен в рамках структурного синтеза, когда схема реализуемой цепи задана. Тогда полиномиальная или дробно-рациональная передаточная функция цепи $T(p)$ может быть определена в общем виде. Коэффициенты A_v ($v = 1, 2, \dots, n$) этой передаточной функции зависят от неизвестных параметров цепи L_i, C_j, R_k , количество которых равно количеству коэффициентов n функции $T(p)$. Эта функция по условию задачи должна равняться заданной аппроксимирующей

шей функции $F_n(p)$, имеющей то же количество n известных коэффициентов a_n . Приравняв коэффициенты A_n и a_n при одинаковых степенях p , получим систему из n уравнений относительно неизвестных параметров L_i, C_j, R_k . Решив эту систему, найдем искомые параметры синтезируемой цепи. Такой способ решения задачи синтеза называется *методом уравнивания коэффициентов*.

В этом методе полученная система уравнений является в общем случае нелинейной. Ее решают специальными методами математического программирования. Для решения задачи на ЭВМ имеется и стандартная программа, основанная на минимизации квадратичной ошибки. Существуют также способы решения системы нелинейных уравнений, основанные на методе случайного поиска искомых параметров.

5. Реализация реактивных четырехполюсников. Один из способов реализации заданной передаточной функции четырехполюсника заключается в определении с ее помощью входного сопротивления четырехполюсника. Тогда задача реализации четырехполюсника сводится к синтезу двухполюсника с заданным сопротивлением. Рассмотрим этот метод применительно к реактивным четырехполюсникам, нагруженным в общем случае на комплексные сопротивления Z_{01} и Z_{02} .

Введем понятие *ослабления эха* H_3 , которому соответствует затухание эха a_3 :

$$H_3 = e^{a_3} = \sqrt{\frac{P_{\max \max}}{P_{\max \max} - P_2}}, \quad a_3 = \ln H_3. \quad (10.29)$$

В это определение входят те же мощности, что и в соотношение (8.31). Ославление эха (10.29) определяет соотношение между мощностью $P_{\max \max}$ и частью этой активной мощности, которая не потребляется нагрузкой, а возвращается к источнику через четырехполюсник как бы в виде эха. Этим и обусловлено название параметров (10.29).

С учетом определения (8.31) первая формула (10.29) преобразуется следующим образом:

$$H_3 = \sqrt{\frac{P_{\max \max}/P_2}{P_{\max \max}/P_2 - 1}}$$

$$H_3^2 = H_0^2 / (H_0^2 - 1) = \underline{H_3} \underline{H_3}^* = H_3(p) H_3(-p). \quad (10.30)$$

Здесь квадрат модуля H_3^2 выражен через произведение комплексно сопряженных функций, первая из которых является передаточной функцией эха H_3 . При известной функции (10.30) передаточная функция эха $\underline{H_3}(p)$ определяется аналогично передаточной функции $H(p)$ в соотношении (10.21). Функцию же (10.30) можно найти по заданному рабочему затуханию или рабочему ослаблению в соответствии с формулами (8.33).

В свою очередь, передаточная функция эха $\underline{H_3}(\omega) = H_3(p)$ связана с входным сопротивлением четырехполюсника. Для уста-

новления этой связи следует учесть, что в реактивном четырех- полюснике активная мощность не потребляется. Поэтому актив- ные мощности на комплексном нагрузочном сопротивлении $\underline{Z}_{02} = R_{02} + jX_{02}$ и на входном сопротивлении четырехполюсника $\underline{Z}_{\text{вх1}} = R_{\text{вх1}} + jX_{\text{вх1}}$ одинаковы:

$$P_2 = P_{\text{вх}} = R_{\text{вх1}} I_1^2 = E^2 R_{\text{вх1}} / |\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{\text{вх1}}|^2,$$

где $\underline{Z}_{01} = R_{01} + jX_{01}$ — комплексное нагрузочное сопротивление на входе четырехполюсника.

Отсюда и из формулы (3.85), где $R_i = R_{01}$, по соотношениям (8.31), (10.30) находим

$$H_3^2 = \frac{|\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{\text{вх1}}|}{4R_{01}R_{\text{вх1}}} = \frac{(R_{01} + R_{\text{вх1}})^2 + (X_{01} + X_{\text{вх1}})^2}{4R_{01}R_{\text{вх1}}},$$

$$H_3^2 - 1 = \frac{(R_{01} - R_{\text{вх1}})^2 + (X_{01} + X_{\text{вх1}})^2}{4R_{01}R_{\text{вх1}}},$$

$$H_3^2 = \frac{(R_{01} + R_{\text{вх1}})^2 + (X_{01} + X_{\text{вх1}})^2}{(R_{01} - R_{\text{вх1}})^2 + (X_{01} + X_{\text{вх1}})^2},$$

$$H_3 H_3^* = \frac{(R_{01} + R_{\text{вх1}}) + j(X_{01} + X_{\text{вх1}})}{(R_{01} - R_{\text{вх1}}) - j(X_{01} + X_{\text{вх1}})} \frac{(R_{01} + R_{\text{вх1}}) - j(X_{01} + X_{\text{вх1}})}{(R_{01} - R_{\text{вх1}}) + j(X_{01} + X_{\text{вх1}})},$$

$$H_3 = \frac{(R_{01} + R_{\text{вх1}}) + j(X_{01} + X_{\text{вх1}})}{(R_{01} - R_{\text{вх1}}) - j(X_{01} + X_{\text{вх1}})} = \frac{(R_{01} + jX_{01}) + (R_{\text{вх1}} + jX_{\text{вх1}})}{(R_{01} - jX_{01}) - (R_{\text{вх1}} + jX_{\text{вх1}})}.$$

Отсюда получаем окончательно

$$\underline{H}_3 = \frac{Z_{01} + \underline{Z}_{\text{вх1}}}{Z_{01}^* - \underline{Z}_{\text{вх1}}}, \quad \underline{Z}_{\text{вх1}} = \frac{H_3 Z_{01}^* - Z_{01}}{1 + H_3} \quad (10.31)$$

Таким образом, входное сопротивление реактивного четырех- полюсника определено. Однако оно является комплексным, что неудобно для его реализации в виде реактивного двухполюсника. Поэтому предварительно определяют реактивное сопротивление этого двухполюсника в режимах холостого хода и короткого замыкания. Покажем методику такого определения на примере активных нагрузочных сопротивлений $\underline{Z}_{01} = R_{01}$ и $\underline{Z}_{02} = R_{02}$. При этом соотношения (10.31) представим в виде

$$H_3(p) = \frac{g_1(p) + h_1(p)}{g_2(p) + h_2(p)}, \quad \underline{Z}_{\text{вх1}}(p) = R_{01} \frac{H_3(p) - 1}{H_3(p) + 1}, \quad (10.32)$$

где $g_1(p)$, $g_2(p)$ — четные полиномы; $h_1(p)$, $h_2(p)$ — нечетные полиномы.

Первое равенство (8.36) и второе равенство (10.32) описыва- ют одинаковые сопротивления. Поэтому четные и нечетные части их числителя и знаменателя соответственно равны друг другу с точностью до некоторого нормирующего множителя N . Произ- вода такое приравнивание, находим матричные коэффициенты:

$$a_{11} = \frac{R_{01}}{NR_{02}}(g_1 - g_2), \quad a_{12} = \frac{R_{01}}{N}(h_1 - h_2),$$

$$a_{21} = \frac{1}{NR_{02}}(h_1 + h_2), \quad a_{22} = \frac{1}{N}(g_1 + g_2). \quad (10.33)$$

Отсюда в соответствии с формулами (8.38) определяются искомые сопротивления:

$$\underline{Z}_{1x} = R_{01} \frac{g_1 - g_2}{h_1 + h_2}, \quad \underline{Z}_{1k} = R_{01} \frac{h_1 - h_2}{g_1 + g_2}. \quad (10.34)$$

По одному из сопротивлений (10.34) определяется известным образом (см. § 10.1.4) соответствующая каноническая схема реактивного двухполюсника (см. рис. 10.4).

Из соотношений (10.33) и свойства a -параметров (8.18) определяется также нормирующий множитель M . При этом становятся известными коэффициенты (10.33) цепочечной матрицы. Следовательно, искомый реактивный четырехполюсник можно получить также в виде T - или Π -образной схемы с помощью формул (8.47) или (8.48).

В случае комплексных нагрузочных сопротивлений равенства (10.33) усложняются с учетом нечетных составляющих X_{01} , X_{02} сопротивлений \underline{Z}_{01} , \underline{Z}_{02} . Соответственно изменяются при этом и расчетные формулы (10.34).

6. Реализация ARC-четырёхполюсников. При синтезе ARC-цепей решение задачи реализации упрощается в некотором отношении по сравнению с решением той же задачи для пассивных четырехполюсников с потерями. *Вследствие свойств (3.162) ОУ отдельные каскады ARC-четырёхполюсников не влияют друг на друга при их регулярном соединении между собой. При этом расчет всей ARC-цепи может производиться по соответствующим матрицам.* Кроме того, цепочечная матрица легко представляется в виде произведения, а остальные матрицы — в виде суммы более простых матриц. Каждая из этих простых матриц реализуется с помощью элементарных ARC-четырёхполюсников, которые соединяются друг с другом соответствующим образом для получения заданной передаточной функции.

Особенно просто заданная передаточная функция реализуется в схеме цепочно (каскадно) соединенных ARC-четырёхполюсников. Такая реализация называется каскадно-развязанной. Она может осуществляться, в частности, путем каскадного соединения унифицированных блоков — биквадов (см. § 9.3.5).

Рассмотрим передаточную функцию

$$T(p) = \left(\sum_{k=0}^m a_k p^k \right) / \left(\sum_{k=0}^n b_k p^k \right). \quad (10.35)$$

Примем для определенности $n = m + r$, $m = 2q$ и $r = 2s + 1$. Тогда дробную передаточную функцию (10.35) можно предста-

вить в другом виде, разбив на сомножители ее числитель и знаменатель:

$$T(p) = \prod_{k=1}^q [(a_{2k}p^2 + a_{1k}p + a_{0k}) / (b_{2k}p^2 + b_{1k}p + b_{0k})] \times \prod_{k=1}^s [1 / (c_{2k}p^2 + c_{1k}p + c_{0k})] \times [1 / (d_1p + d_0)]. \quad (10.36)$$

В этом выражении первый сомножитель Π представляет собой произведение q биквадратных передаточных функций (9.64). Следовательно, их можно реализовать путем каскадного соединения q биквадов, например, такого вида, как на рис. 9.25.

Второй сомножитель Π в соотношении (10.36) является произведением s передаточных функций ФНЧ второго порядка. Их можно реализовать, например, путем каскадного соединения ARC-фильтров, схема которых показана на рис. 9.24, в.

Наконец, последний сомножитель в соотношении (10.36) является передаточной функцией ФНЧ первого порядка, например, такого вида, как на рис. 9.20, а.

Таким образом, при каскадно-развязанной реализации передаточной функции (10.35), в которой $n = 2(q + s) + 1$ и $m = 2q$, реализующий четырехполюсник содержит $q + s + 1$ ARC-блоков. Если считать, что биквады состоят из трех ОУ, как на рис. 9.25, то такой реализующий четырехполюсник будет содержать $3q + s + 1$ операционных усилителей.

Среди других возможных способов синтеза ARC-цепей с заданной передаточной функцией (10.35) отметим способ, основанный на использовании методов и средств аналоговой вычислительной техники (АВТ). В аналоговых вычислительных машинах (АВМ) применяются стандартные ARC-блоки, выполняющие, в частности, взвешенное суммирование сигналов. Такое суммирование можно производить, например, на ИОУ (см. § 3.5.2), как показано на рис. 10.14, а. В этом сумматоре согласно формуле (3.165) $u = -(R/R_1)u_1 - (R/R_2)u_2$, поскольку разные входные сигналы в данной схеме не взаимодействуют. В сумматоре одновременно со сложением сигналов может производиться их дифференцирование или интегрирование (см. § 9.6.2), как показано на рис. 10.14, б, в (ср. с рис. 9.48, а, б). Согласно формулам (9.75) в дифференцирующем и интегрирующем сумматорах

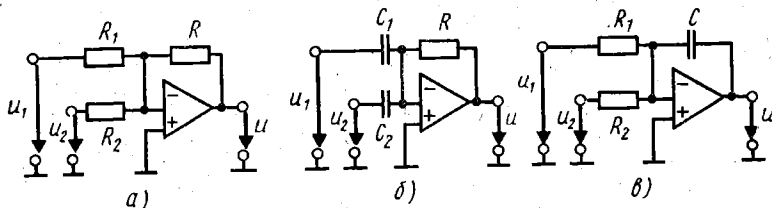


Рис. 10.14. Схемы сумматоров

выходные сигналы соответственно равны $u = -RC_1 \frac{du_1}{dt} - RC_2 \frac{du_2}{dt}$ и $u = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t u_1 dt - \frac{1}{R_2 C} \int_0^t u_2 dt$. Набором таких функциональных блоков можно моделировать различные преобразования сигналов.

Рассмотрим для примера синтез биквада средствами АВТ. Учитывая, что умножению на оператор p соответствует дифференцирование сигнала, при биквадратной передаточной функции (9.64) находим связь между входным и выходным сигналами:

$$b_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2 = a_2 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + a_1 \frac{du_1}{dt} + a_0 u_1.$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{a_0}{b_0} u_1 + \frac{a_1}{b_0} \frac{du_1}{dt} + \frac{a_2}{b_0} \frac{d^2 u_1}{dt^2} - \frac{b_1}{b_0} \frac{du_2}{dt} - \frac{b_2}{b_0} \frac{d^2 u_2}{dt^2}.$$

Изменив здесь знаки на обратные, получим функциональную схему биквада, представленную на рис. 10.15. В этой схеме использован дифференцирующий сумматор. Практически предпочитают преобразовывать исходное соотношение с целью применения интегрирующих сумматоров. В них различные весовые коэффициенты обеспечиваются набором резисторов, а не конденсаторов, как в дифференцирующем сумматоре (см. рис. 10.14, б, в).

Полученная функциональная схема биквада содержит пять ОУ. Возможны биквады и на трех ОУ (см. рис. 9.25). В общем случае ARC-четырёхполюсники, синтезированные любым из известных методов, могут оказаться довольно сложными. При любой сложности они могут выполняться по интегральной технологии в виде микроминиатюрных блоков. Это не означает, однако, что при синтезе ARC-четырёхполюсников, в частности, при выборе метода их синтеза не следует стремиться к реализации заданной передаточной функции в схеме с минимальным количеством элементов. Уступка этому требованию может явиться

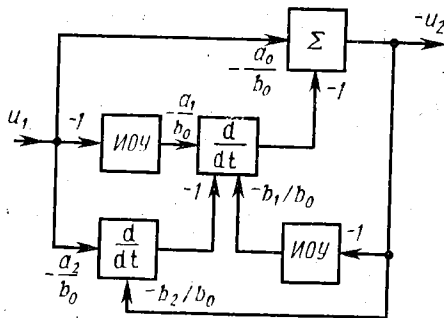


Рис. 10.15. Функциональная схема биквада

рациональной, например, с целью снижения чувствительности схемы к разбросу параметров ее элементов или соблюдения каких-либо других дополнительных требований.

Вопросы для самоконтроля

10.1. Почему функция (10.1) не может иметь коэффициент $a_0 = 0$ или $b_0 = 0$?

10.2. К каким физическим последствиям приведет обращение в нуль a_0 или b_0 в функции (10.1)?

10.3. Как влияет на вид реализующего двухполюсника четность или нечетность степеней m и n функции (10.1)?

10.4. Почему разложение в цепную дробь функции (10.1), приведенное в § 10.2.2, не может служить доказательством достаточности условий физической реализуемости этой функции?

10.5. Почему не всегда можно реализовать функцию (10.1) путем последовательного соединения двухполюсников, изображенных на рис. 10.2?

10.6. Каким двухполюсникам соответствуют слагаемые суммы (10.11), если она описывает не сопротивление, а проводимость реализующей схемы?

10.7. Как описывается проводимость двухполюсника цепной дробью вида (10.10)?

10.8. Какие разновидности цепных дробей существуют для описания сопротивлений и проводимостей двухполюсников с различными структурами?

10.9. Как можно без количественного анализа, а лишь по виду реактансной функции определить, какой тип характеристики (см. рис. 10.3) она описывает?

10.10. При какой функции (10.12), (10.13) реактивный двухполюсник имеет нуль или полюс сопротивления на нулевой частоте?

10.11. При какой функции (10.12), (10.13) реактивный двухполюсник имеет нуль или полюс сопротивления в бесконечности?

10.12. По каким физическим признакам можно установить существование нуля или полюса сопротивления реактивного двухполюсника на нулевой частоте и в бесконечности?

10.13. Какими параметрами реактансных функций (10.12), (10.13) определяется количество последовательных и параллельных резонансов в реактивном двухполюснике?

10.14. Как следует промаркировать элементы канонических схем на рис. 10.4, б—г в соответствии с обозначениями для реактансных функций (10.12) и (10.13) (по аналогии с рис. 10.4, а)?

10.15. В каких случаях появляется отдельная индуктивность или емкость в канонических схемах Фостера (см. рис. 10.5)?

10.16. Какие из канонических схем Кауэра (см. рис. 10.4) и Фостера (см. рис. 10.5) являются эквивалентными друг другу?

10.17. В каких реактивных двухполюсниках число элементов и количество резонансов отличаются более чем на единицу?

10.18. В каких случаях сопротивление (10.10) приводится к функции (10.1) со степенями $m = n$ и $m = n - 1$?

10.19. По какому внешнему признаку характеристики затухания фильтра можно судить о том, что он имеет максимальную избирательность среди других фильтров с тем же количеством элементов?

10.20. Как можно доказать, что трансцендентное выражение (10.22) описывает полиномиальную функцию при $n = 1$ и $n = 2$?

10.21. Как можно доказать, что иррациональное выражение (10.22) описывает полиномиальную функцию при $n = 2$ и $n = 3$?

10.22. Как можно доказать тождественность двух равенств (10.23)?

10.23. Почему входное сопротивление (10.32) реактивного четырехполюсника является комплексной величиной?

10.24. Чему равен нормирующий множитель N в формулах (10.33)?

10.25. Какое из сопротивлений (10.34) следует выбирать при определении схемы и параметров синтезируемого реактивного четырехполюсника?

Заключение

Говорят, что нет ничего практичнее хорошей теории. Теорию линейных электрических цепей можно считать хорошей теорией. Без нее невозможно было бы буквально сказочное развитие техники связи и радиоэлектронной промышленности, характерное в особенности для современной эпохи бурного социально-экономического и научно-технического прогресса. На глазах одного поколения инженеров уже несколько раз сменилась технологическая база связной аппаратуры и производства. В этом «повинна» и теория линейных электрических цепей, хотя не все это понимают. Например, развитая в ней теория зависимых источников напряжения и тока еще недавно воспринималась некоторыми инженерами как некая схоластика, да и вообще понятие источников тока считалось ненужной абстракцией. И те же инженеры восхищаются сейчас новой элементной базой, созданной на основе этой теории. Классический колебательный контур — и тот сдает свои позиции, уступая место предсказанным теорией микроминиатюрным «резонансным» системам, не содержащим резонансных элементов. Еще и сейчас иные инженеры воспринимают сигнальные графы как модное течение в методах расчета электрических цепей, без которого можно обойтись. Достаточно сказать, что не все вузовские программы по ТЛЭЦ предусматривают изучение этого метода. Однако многие сложнейшие устройства электросвязи не родились бы до сих пор, если бы не их синтез, осуществленный по канонам современной теории, включающей и правила расчета электрических цепей по их сигнальным графам.

Никакая теория не может быть хорошей, если она не развивается. Теория линейных электрических цепей в этом смысле тоже является хорошей, пополняясь новыми разделами, развиваясь и углубляясь даже в тех направлениях, которые можно считать классическими. Свидетельством тому являются упомянутые ее разделы, посвященные как элементной базе электрических цепей, так и методам их расчета.

Не все еще познано в теории линейных электрических цепей. Многие ее разделы — теория сигналов, методы синтеза и другие — нуждаются в дальнейшем развитии. Речевые сигналы, например, с которыми повседневно работает инженер-связист, изучаются уже добрых три века. Однако и они хранят много

тайн. Когда эти тайны будут раскрыты, не сможем ли мы передавать речевые сигналы в реальном масштабе времени по каналу связи с полосой рабочих частот, не превышающей 50—100 Гц?

В данном учебнике рассмотрены лишь основы теории линейных электрических цепей в рамках учебной программы. Здесь не затронуты, например, методы синтеза электрических цепей с помощью сигнальных графов и другие важные вопросы. Пытливый читатель не может удовлетвориться изучением одних основ. Он не преминет воспользоваться специальной литературой для освоения теории линейных электрических цепей во всей ее полноте и глубине. Такого пытливого читателя ждет еще много радостей на пути познания, а быть может, и радостей первооткрывателя.

Приложения

Таблица П.1

Кратные и дольные единицы

| Наименование | Значение | Обозначение | Наименование | Значение | Обозначение |
|--------------|-----------|-------------|--------------|------------|-------------|
| тера | 10^{12} | Т | пико | 10^{-12} | п |
| гига | 10^9 | Г | нано | 10^{-9} | н |
| мега | 10^6 | М | микро | 10^{-6} | мк |
| кило | 10^3 | К | милли | 10^{-3} | м |
| гекто | 10^2 | г | санти | 10^{-2} | с |
| дека | 10^1 | да | деци | 10^{-1} | д |

Таблица П.2

Диапазоны частот и волн, используемых в электросвязи

| № диапазона | Наименование диапазона частот | Границы диапазона | Наименование диапазона волн | Границы диапазона |
|-------------|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|
| 1-й | Крайне низкие (КНЧ) | 3—30 Гц | Декамегаметровые | 100—10 Мм |
| 2-й | Сверхнизкие (СНЧ) | 30—300 Гц | Мегаметровые | 10—1 Мм |
| 3-й | Инфранизкие (ИНЧ) | 0,3—3 кГц | Гектокилометровые | 1000—100 км |
| 4-й | Очень низкие (ОНЧ) | 3—30 кГц | Мириаметровые | 100—10 км |
| 5-й | Низкие (НЧ) | 30—300 кГц | Километровые | 10—1 км |
| 6-й | Средние (СЧ) | 0,3—3 МГц | Гектометровые | 1—0,1 км |
| 7-й | Высокие (ВЧ) | 3—30 МГц | Декаметровые | 100—10 м |
| 8-й | Очень высокие (ОВЧ) | 30—300 МГц | Метровые | 10—1 м |
| 9-й | Ультравысокие (УВЧ) | 0,3—3 ГГц | Дециметровые | 1—0,1 м |
| 10-й | Сверхвысокие (СВЧ) | 3—30 ГГц | Сантиметровые | 10—1 см |
| 11-й | Крайне высокие (КВЧ) | 30—300 ГГц | Миллиметровые | 10—1 мм |
| 12-й | Гипервысокие (ГВЧ) | 0,3—3 ТГц | Децимиллиметровые | 1—0,1 мм |

Примечания: 1. По международному регламенту радиосвязи номера диапазонов частот и волн являются их основным наименованием.

2. Используются также внерегламентные наименования волн: 1—4-й диапазоны и более длинные волны — сверхдлинные волны (СДВ), 5-й диапазон — длинные волны (ДВ), 6-й диапазон — средние волны (СВ), 7-й диапазон — короткие волны (КВ), 8—11-й диапазоны — ультракороткие волны (УКВ), 12-й диапазон и более короткие волны вплоть до 0,05 мм — субмиллиметровые волны.

3. Перечисленные в примечании 2 волны относятся к диапазону радиоволн.

Таблица П.3

Предельная избирательность связанных контуров с регулярной структурой

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|--------------------------------------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $K_{\text{п}}^{40\text{дБ}}$ Заб. | 100 | 7,07 | 3,01 | 2,16 | 1,71 | 1,51 | 1,37 | 1,29 | 1,23 | 1,19 | 1 |

Таблица П.4

Избирательность связанных контуров с критической связью

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|-------------------|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $K_{ПЗдБ}^{40дБ}$ | 100 | 10 | 4,64 | 3,16 | 2,50 | 2,16 | 1,94 | 1,78 | 1,66 | 1,58 | 1 |

Таблица П.5

Избирательность N -каскадного резонансного усилителя

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|-------------------|-----|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $K_{ПЗдБ}^{40дБ}$ | 100 | 15,5 | 8,9 | 6,90 | 6,00 | 5,50 | 5,10 | 4,90 | 4,70 | 4,60 | 3,65 |

Таблица П.6

Предельная избирательность N -каскадного полосового усилителя

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ∞ |
|-------------------|------|------|------|------|------|----------|
| $2N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | ∞ |
| $K_{ПЗдБ}^{40дБ}$ | 7,07 | 2,88 | 2,23 | 1,99 | 1,87 | 1,53 |

Таблица П.7

Избирательность N -каскадного полосового усилителя с критической связью между контурами

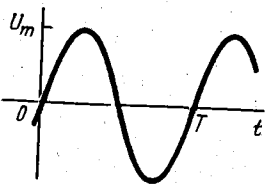
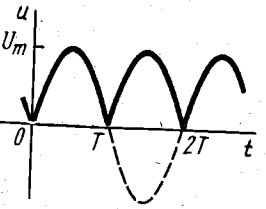
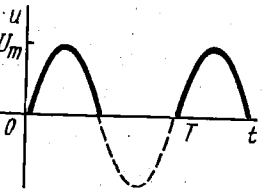
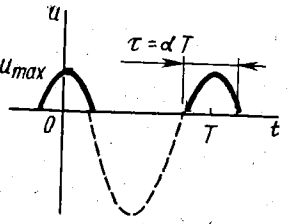
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ∞ |
|-------------------|----|------|------|------|------|----------|
| $2N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | ∞ |
| $K_{ПЗдБ}^{40дБ}$ | 10 | 3,94 | 2,98 | 2,62 | 2,44 | 1,91 |

Таблица П.8

Параметры импульсных сигналов ($\Delta F_c = C/\tau$, $\Delta F_{cs} = C_s/\tau_s$)

| Вид импульсов | $\tau_s _{\epsilon=0,9}$ | $C_s _{\epsilon=0,9}$ | $C _{S=0,1S_{max}}$ | $C _{S_{ог}=0,1S_{max}}$ |
|--------------------|--------------------------|-----------------------|---------------------|--------------------------|
| Экспоненциальные | 1,151/ β | 1,16 | 3,64 | 3,64 |
| Прямоугольные | 0,9 τ | 0,743 | 2,68 | 3,18 |
| Треугольные | 0,536 τ | 0,454 | 1,48 | 2,01 |
| Косинусональные | 0,596 τ | 0,445 | 1,30 | 1,66 |
| Косинус-квадратные | 0,467 τ | 0,442 | 1,65 | 1,70 |
| Колоколообразные | 1,644/ β | 0,431 | 1,46 | 1,46 |

Параметры периодических сигналов

| Форма сигнала | U | \bar{U} | K_{Φ} | K_a |
|---|---|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
|  | $\frac{1}{\sqrt{2}} U_m$ | $\frac{2}{\pi} U_m$ | $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ | $\sqrt{2}$ |
|  | | | | |
|  | $\frac{1}{2} U_m$ | $\frac{1}{\pi} U_m$ | $\frac{\pi}{2}$ | 2 |
|  <p> $\theta = \pi\alpha, \alpha_0 = 1 - \cos \theta,$ $\alpha_1 = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta),$ $\alpha_2 = \frac{1}{\pi} \left[\theta \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \frac{3}{4} \sin 2\theta \right]$ </p> | $\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_0} u_{\max}$ | $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} u_{\max}$ | $\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_1}$ | $\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_2}}$ |

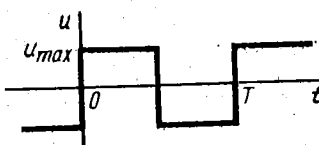
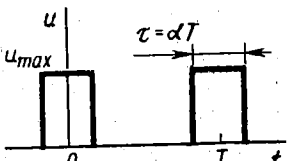
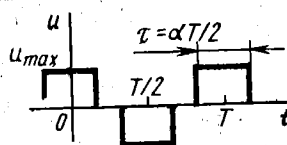
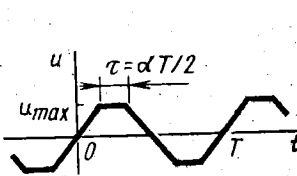
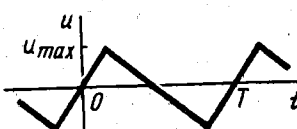
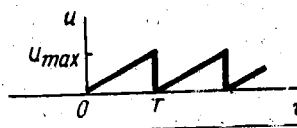
| Форма сигнала | U | \bar{U} | K_{Φ} | K_a |
|---|--|--|---|------------------------------|
|  | u_{max} | u_{max} | 1 | 1 |
|  | $\sqrt{\alpha} u_{max}$ | αu_{max} | $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ |
|  | $\sqrt{2\alpha} u_{max}$ | $2\alpha u_{max}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ |
|  | $\sqrt{\frac{1+2\alpha}{3}} \times \frac{1+\alpha}{2} u_{max}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{3}{1+2\alpha}}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{1+\alpha}$ | $\sqrt{\frac{3}{1+2\alpha}}$ |
|  | $\frac{1}{\sqrt{3}} u_{max}$ | $\frac{1}{2} u_{max}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
|  | $\sqrt{\frac{\alpha}{3}} u_{max}$ | $\frac{\alpha}{2} u_{max}$ | $\frac{2}{\sqrt{3\alpha}}$ | $\sqrt{\frac{3}{\alpha}}$ |

Таблица П. 10

Операторное изображение сигналов и его основные свойства

| | |
|--|---|
| $u(t) \div u(\bar{p}) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt$ | $u_d(t) = \frac{du(t)}{dt} \div u_d(\bar{p}) = p u(\bar{p}) - u(0)$ |
| $u_2(t) = \sum_{k=1}^N A_k u_k(t) \div$ $\div u_2(\bar{p}) = \sum_{k=1}^N A_k u_k(\bar{p})$ | $u_i(t) = \int_0^t u(t) dt \div u_i(\bar{p}) = \frac{1}{p} u(\bar{p})$ |
| $u_{\Pi}(t) = u_1(t) u_2(t) \div$ $\div u_{\Pi}(\bar{p}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} u_1(\bar{q}) u_2(\bar{p}-\bar{q}) d\bar{q}$ | $u_a(t) = u(at) \div u_a(\bar{p}) = \frac{1}{a} u(\bar{p}/a)$ |
| $u_{\tau}(t) = u(t-\tau) \div u_{\tau}(\bar{p}) = e^{-p\tau} u(\bar{p})$ | $u_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t} u(t) \div u_{\alpha}(\bar{p}) = u(\bar{p} + \alpha)$ |

Таблица П. 11

Операторные изображения типовых сигналов

| № п.п. | Сигнал | Операторное изображение |
|--------|--|--|
| 1 | $1 = I(t)$ | $1/p$ |
| 2 | $I(t-\tau)$ | $e^{-p\tau}/p$ |
| 3 | $t = \int_0^t I(t) dt$ | $1/p^2$ |
| 4 | $t^2 = 2 \int_0^t t dt$ | $2/p^3$ |
| 5 | $e^{\pm at}$ | $1/(p \mp a)$ |
| 6 | $1 - e^{-at}$ | $a/p(p+a)$ |
| 7 | $\beta e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$ | $(\beta - \alpha)/(p + \alpha)(p + \beta)$ |
| 8 | $t e^{-at}$ | $1/(p+a)^2$ |
| 9 | $\text{sh } at = \frac{1}{2} (e^{at} - e^{-at})$ | $a/(p^2 - a^2)$ |
| 10 | $\text{ch } at = \frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at})$ | $p/(p^2 - a^2)$ |
| 11 | $\sin \omega t = \frac{1}{j} \text{sh } j\omega t$ | $\omega/(p^2 + \omega^2)$ |

| № п.п. | Сигнал | Операторное изображение |
|--------|--|--|
| 12 | $\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t$ | $p/(p^2 + \omega^2)$ |
| 13 | $\sin (\omega t \pm \psi) = \cos \psi \sin \omega t \pm \sin \psi \cos \omega t$ | $(\omega \cos \psi \pm p \sin \psi)/(p^2 + \omega^2)$ |
| 14 | $\cos (\omega t \pm \psi) = \cos \psi \cos \omega t \mp \sin \psi \sin \omega t$ | $(p \cos \psi \mp \omega \sin \psi)/(p^2 + \omega^2)$ |
| 15 | $e^{-\alpha t} \sin \omega_c t$ | $\omega_c / [(p + \alpha)^2 + \omega_c^2]$ |
| 16 | $e^{-\alpha t} \cos \omega_c t$ | $(p + \alpha) / [(p + \alpha)^2 + \omega_c^2]$ |
| 17 | $e^{-\alpha t} \sin (\omega_c t \pm \psi_c)$ | $\{\omega_c \cos \psi_c \pm (p + \alpha) \sin \psi_c\} / \{[(p + \alpha)^2 + \omega_c^2]\}$ |
| 18 | $e^{-\alpha t} \cos (\omega_c t \pm \psi_c)$ | $\{(p + \alpha) \cos \psi_c \mp \omega \sin \psi_c\} / \{[(p + \alpha)^2 + \omega_c^2]\}$ |
| 19 | $\frac{1}{\cos \psi_c} e^{-\alpha t} \cos (\omega_c t \pm \psi_c)$ | $(p + \alpha \mp \omega_c \operatorname{tg} \psi_c) / \{(p + \alpha)^2 + \omega_c^2\}$ |
| 20 | $1 - \frac{1}{\cos \psi_c} e^{-\alpha t} \cos (\omega_c t \pm \psi_c)$ | $\frac{(\alpha \pm \omega_c \operatorname{tg} \psi_c) p + \omega_c^2 + \alpha^2}{p \{[(p + \alpha)^2 + \omega_c^2]\}}$ |

Таблица П. 12

Оригиналы операторных изображений (сигналы) и их основные свойства

| | |
|--|---|
| Обратное преобразование Римана — Меллина | $u(p) \div u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} u(p) \cdot e^{pt} dp$ |
| Формула разложения при простых корнях | $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div u(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{\frac{d}{dp} F_2(p_k)} e^{p_k t}$ |
| Формула разложения при кратных корнях | $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div u(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \times \times \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p) / (p - p_k)^{m_k}} \Big _{p=p_k}$ |
| Дифференцирование изображения | $u_{\text{дн}}(p) = \frac{du(p)}{dp} \div u_{\text{дн}}(t) = -tu(t)$ |

| | |
|----------------------------|--|
| Интегрирование изображений | $u_{\text{ин}}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} u(\rho) d\rho \div u_{\text{ин}}(t) = \frac{1}{t} u(t)$ |
| Произведение изображений | $u_{\text{ПН}}(\rho) = u_1(\rho) u_2(\rho) \div u_{\text{ПН}}(t) = \int_0^t u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau$ |
| Предельные соотношения | $u(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho u(\rho), \quad u(\infty) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho u(\rho)$ |

Таблица П.13
Типовые операторные изображения и их оригиналы (сигналы)*

| № п.п. | Операторное изображение | Сигнал |
|--------|--|---|
| 1 | $\frac{1}{(\rho + a)(\rho^2 + \omega^2)}$ | $\frac{1}{\mu^2} e^{-at} - \frac{1}{\mu\omega} \cos(\omega t + \psi),$ $\mu = \sqrt{\omega^2 + a^2}, \quad \psi = \text{arctg}(a/\omega)$ |
| 2 | $\frac{\rho}{(\rho + a)(\rho^2 + \omega^2)}$ | $-\frac{a}{\mu^2} e^{-at} + \frac{1}{\mu} \sin(\omega t + \psi),$ $\mu = \sqrt{\omega^2 + a^2}, \quad \psi = \text{arctg}(a/\omega)$ |
| 3 | $\frac{\rho + a}{(\rho + a)(\rho^2 + \omega^2)}$ | $\frac{a-a}{\mu^2} e^{-at} + \frac{\lambda}{\mu\omega} \sin(\omega t + \psi),$ $\lambda = \sqrt{\omega^2 + a^2}, \quad \mu = \sqrt{\omega^2 + a^2},$ $\psi = \text{arctg}(\omega/a) - \text{arctg}(\omega/a)$ |
| 4 | $\frac{\rho(\rho + a)}{(\rho + a)(\rho^2 + \omega^2)}$ | $a \frac{a-a}{\mu^2} e^{-at} + \frac{\lambda}{\mu} \cos(\omega t + \psi),$ $\lambda = \sqrt{\omega^2 + a^2}, \quad \mu = \sqrt{\omega^2 + a^2},$ $\psi = \text{arctg}(\omega/a) - \text{arctg}(\omega/a)$ |
| 5 | $\frac{1}{\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2}$ | $\frac{1}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t,$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ |
| 6 | $\frac{\rho}{\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2}$ | $\frac{\beta}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \psi_c = \text{arctg}(\alpha/\omega_c)$ |

* Простейшие операторные изображения и их оригиналы приведены в табл. П.11.

| № п.п. | Операторное изображение | Сигнал |
|--------|--|---|
| 7 | $\frac{p+a}{p^2+2ap+\beta^2}$ | $\frac{\mu}{\omega_c} e^{-at} \cos(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \mu = \sqrt{\beta^2 - 2a\alpha + a^2},$ $\psi_c = \text{arctg} [(a-a)/\omega_c]$ |
| 8 | $\frac{1}{p(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $\frac{1}{\beta^2} \left[1 - \frac{1}{\cos \psi_c} e^{-at} \cos(\omega_c t - \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \psi_c = \text{arctg} (a/\omega_c)$ |
| 9 | $\frac{p+a}{p(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $\frac{a}{\beta^2} \left[1 - \frac{1}{\cos \psi_c} e^{-at} \cos(\omega_c t - \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \psi_c = \text{arctg} (a/\omega_c - \beta^2/a\omega_c)$ |
| 10 | $\frac{1}{(p+\gamma)(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $\frac{1}{\mu^2} e^{-\gamma t} - \frac{1}{\mu \omega_c} e^{-at} \sin(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \mu = \sqrt{\beta^2 - 2a\gamma + \gamma^2},$ $\psi_c = \text{arctg} [\omega_c/(a-\gamma)]$ |
| 11 | $\frac{p}{(p+\gamma)(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $-\frac{\gamma}{\mu^2} e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\mu \omega_c} e^{-at} \sin(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \mu = \sqrt{\beta^2 - 2a\gamma + \gamma^2},$ $\psi_c = \text{arctg} [\omega_c/(a-\gamma)] - \text{arctg} (\omega_c/a)$ |
| 12 | $\frac{p+a}{(p+\gamma)(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $\frac{a-\gamma}{\mu^2} e^{-\gamma t} + \frac{\lambda}{\mu \omega_c} e^{-at} \sin(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \lambda = \sqrt{\beta^2 - 2a\alpha + a^2},$ $\mu = \sqrt{\beta^2 - 2a\gamma + \gamma^2},$ $\psi_c = \text{arctg} [\omega_c/(a-\gamma)] - \text{arctg} [\omega_c/(a-a)]$ |
| 13 | $\frac{p(p+a)}{(p+\gamma)(p^2+2ap+\beta^2)}$ | $\gamma \frac{\gamma-a}{\mu^2} e^{-\gamma t} - \frac{\beta\lambda}{\mu \omega_c} e^{-at} \sin(\omega_c t + \psi_c),$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - a^2}, \lambda = \sqrt{\beta^2 - 2a\alpha + a^2},$ $\mu = \sqrt{\beta^2 - 2a\gamma + \gamma^2},$ $\psi_c = \text{arctg} [\omega_c/(a-\gamma)] - \text{arctg} [\omega_c/(a-a)] -$ $-\text{arctg} (\omega_c/a)$ |

| № п.п. | Операторное изображение | Сигнал |
|--------|--|--|
| 14 | $\frac{1}{(\rho^2 + \omega^2)(\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2)}$ | $\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \psi) + \frac{1}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t - \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \mu = \sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2},$ $\psi = \operatorname{arctg} [2\alpha\omega / (\beta^2 - \omega^2)],$ $\psi_c = \operatorname{arctg} [-2\alpha\omega_c / (\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2)]$ |
| 15 | $\frac{\rho}{(\rho^2 + \omega^2)(\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2)}$ | $\frac{1}{\mu} \left[\cos(\omega t - \psi) + \frac{\beta}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t - \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \mu = \sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2},$ $\psi = \operatorname{arctg} [2\alpha\omega / (\beta^2 - \omega^2)],$ $\psi_c = \operatorname{arctg} [-2\alpha\omega_c / (\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2)] - \operatorname{arctg} (\alpha / \omega_c)$ |
| 16 | $\frac{\rho + a}{(\rho^2 + \omega^2)(\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2)}$ | $\frac{1}{\mu} \left[\frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t + \psi) + \frac{\nu}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 + a^2},$ $\mu = \sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}, \quad \nu = \sqrt{a^2 - 2\alpha a + \beta^2},$ $\psi = \operatorname{arctg} (\omega / a) - \operatorname{arctg} [2\alpha\omega / (\beta^2 - \omega^2)],$ $\psi_c = \operatorname{arctg} [\omega_c / (a - \alpha)] -$ $- \operatorname{arctg} [-2\alpha\omega_c / (\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2)]$ |
| 17 | $\frac{\rho(\rho + a)}{(\rho^2 + \omega^2)(\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta^2)}$ | $\frac{1}{\mu} \left[\lambda \cos(\omega t + \psi) + \frac{\beta\nu}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi_c) \right],$ $\omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 + a^2},$ $\mu = \sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}, \quad \nu = \sqrt{a^2 - 2\alpha a + \beta^2},$ $\psi = \operatorname{arctg} (\omega / a) - \operatorname{arctg} [2\alpha\omega / (\beta^2 - \omega^2)],$ $\psi_c = \operatorname{arctg} [\omega_c / (a - \alpha)] + \operatorname{arctg} (\alpha / \omega_c) -$ $- \operatorname{arctg} [-2\alpha\omega_c / (\omega^2 - \omega_c^2 + \alpha^2)]$ |

Таблица П.14

Погонные параметры длинных линий

| Тип линии | Двухпроводная | Коаксиальная |
|--------------|--|---|
| L_0 , Гн/м | $\approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d_{\text{л}} - r_{\text{л}}}{r_{\text{л}}}$ | $\approx \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_{\text{л}}}{r_{\text{л}}}$ |
| C_0 , Ф/м | $\approx \pi \epsilon / \ln \frac{d_{\text{л}} - r_{\text{л}}}{r_{\text{л}}}$ | $2\pi \epsilon / \ln \frac{R_{\text{л}}}{r_{\text{л}}}$ |
| R_0 , Ом/м | $8,33 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} / r_{\text{л}}$ ($r_{\text{л}}$ в мм) | $4,165 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} (1/R_{\text{л}} + 1/r_{\text{л}})$ ($R_{\text{л}}$, $r_{\text{л}}$ в мм) |
| G_0 , См/м | — | $\omega C_0 \operatorname{tg} \delta$ |

Примечание. Для вакуума $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\epsilon = \epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^9$ Ф/м.

Таблица П.15

Уравнения связи между основными параметрами четырехполюсников

| Вид матрицы | $F[(y)]$ | $F[(z)]$ | $F[(a)]$ |
|-------------|--|--|--|
| (y) | $\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{ z } \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & - a \\ 1 & -a_{11} \end{pmatrix}$ |
| (z) | $\frac{1}{ y } \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11} & - a \\ 1 & -a_{22} \end{pmatrix}$ |
| (a) | $\frac{1}{y_{21}} \begin{pmatrix} -y_{22} & 1 \\ - y & y_{11} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{z_{21}} \begin{pmatrix} z_{11} & - z \\ 1 & -z_{22} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ |
| (b) | $\frac{1}{y_{12}} \begin{pmatrix} -y_{11} & 1 \\ - y & y_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{z_{12}} \begin{pmatrix} z_{22} & - z \\ 1 & -z_{11} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{ a } \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ |

| Вид матрицы | $F[(y)]$ | $F[(z)]$ | $F[(a)]$ |
|-------------|--|--|--|
| (f) | $\frac{1}{y_{22}} \begin{pmatrix} y & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{z_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & z \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{21} & a \\ 1 & -a_{12} \end{pmatrix}$ |
| (h) | $\frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & y \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{z_{22}} \begin{pmatrix} z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{a_{22}} \begin{pmatrix} a_{12} & a \\ 1 & -a_{21} \end{pmatrix}$ |

| Вид матрицы | $F[(b)]$ | $F[(f)]$ | $F[(h)]$ |
|-------------|--|--|--|
| (y) | $\frac{1}{b_{12}} \begin{pmatrix} -b_{11} & 1 \\ - b & b_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{f_{22}} \begin{pmatrix} f & f_{12} \\ -f_{21} & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{h_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & h \end{pmatrix}$ |
| (z) | $\frac{1}{b_{21}} \begin{pmatrix} -b_{22} & 1 \\ - b & b_{11} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{f_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -f_{12} \\ f_{21} & f \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$ |
| (a) | $\frac{1}{ b } \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{f_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -f_{22} \\ f_{11} & - f \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{h_{21}} \begin{pmatrix} - h & h_{11} \\ -h_{22} & 1 \end{pmatrix}$ |
| (b) | $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{f_{12}} \begin{pmatrix} - f & f_{22} \\ -f_{11} & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{h_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -h_{11} \\ h_{22} & - h \end{pmatrix}$ |
| (f) | $\frac{1}{b_{22}} \begin{pmatrix} -b_{21} & 1 \\ b & b_{12} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{ h } \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$ |
| (h) | $\frac{1}{b_{11}} \begin{pmatrix} -b_{12} & 1 \\ b & b_{21} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{ f } \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ |

Таблица П. 16

Определители матриц четырехполюсников

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| $ y $ | $\frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{-y_{12}y_{21}}$ | $1/ z $ | $-a_{21}/a_{12}$ | $-b_{21}/b_{12}$ | f_{11}/f_{22} | h_{22}/h_{11} |
| $ z $ | $1/ y $ | $\frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{-z_{12}z_{21}}$ | $-a_{12}/a_{21}$ | $-b_{12}/b_{21}$ | f_{22}/f_{11} | h_{11}/h_{22} |
| $ a $ | $-y_{12}/y_{21}$ | $-z_{12}/z_{21}$ | $\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{-a_{12}a_{21}}$ | $1/ b $ | f_{12}/f_{21} | h_{12}/h_{21} |
| $ b $ | $-y_{21}/y_{12}$ | $-z_{21}/z_{12}$ | $1/ a $ | $\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{-b_{12}b_{21}}$ | f_{21}/f_{12} | h_{21}/h_{12} |
| $ f $ | y_{11}/y_{22} | z_{22}/z_{11} | $+a_{22}/a_{11}$ | $-b_{11}/b_{22}$ | $\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}{-f_{12}f_{21}}$ | $1/ h $ |
| $ h $ | y_{22}/y_{11} | z_{11}/z_{22} | $-a_{11}/a_{22}$ | $-b_{22}/b_{11}$ | $1/ f $ | $\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{-h_{12}h_{21}}$ |

Таблица П. 17

Соединения четырехполюсников

| Вид соединения | Действия с матрицами |
|------------------------------|----------------------|
| Параллельное | $(y) = (y') + (y'')$ |
| Последовательное | $(z) = (z') + (z'')$ |
| Цепочечное | $(a) = (a') (a'')$ |
| Параллельно-последовательное | $(f) = (f') + (f'')$ |
| Последовательно-параллельное | $(h) = (h') + (h'')$ |

Таблица П.18

Матрицы типовых четырехполюсников

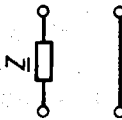
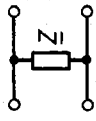
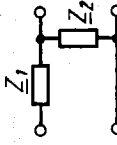
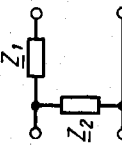
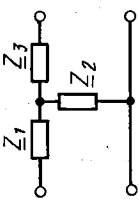
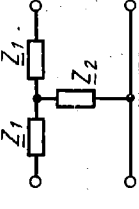
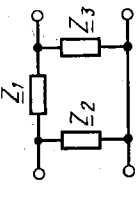
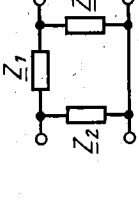
| Вид матрицы | Схема четырехполюсника | | | |
|--|---|---|--|--|
|  $\begin{pmatrix} Y & -Y \\ \bar{Y} & -\bar{Y} \end{pmatrix}$ |  |  |  | |
| (b) | — | — | $\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 & -\bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 & -\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_1 \end{pmatrix}$ |
| (z) | — | $\begin{pmatrix} Z & -Z \\ \bar{Z} & -\bar{Z} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_1 + Z_2) \end{pmatrix}$ |
| (a) | $\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{Y} & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 + Z_1 \bar{Y}_2 & Z_1 \\ \bar{Y}_2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ \bar{Y}_2 & 1 + Z_1 \bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ |
| (f) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \bar{Y} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \bar{Y}_2 & 1 \\ 1 & -Z_1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 1 + Z_1 \bar{Y}_2$ | $\begin{pmatrix} \bar{Y}_2 & 1 \\ 1 & -Z_1 \end{pmatrix}$ |
| (h) | $\begin{pmatrix} Z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\bar{Y} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & -\bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & -\bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ $\alpha = 1 + Z_1 \bar{Y}_2$ |

Схема четырехполюсника

| Вид мостика |  |  |  |  |
|-------------|---|--|--|---|
| (6) | $\bar{Y} \begin{pmatrix} 1 + \bar{Y}_2 \bar{Z}_3 & -1 \\ 1 & -(1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ $\bar{Y} = \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 / (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)$ | $\bar{Y} \begin{pmatrix} 1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2 & -1 \\ 1 & -(1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ $\bar{Y} = \bar{Y}_2^2 / (2\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)$ | $\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 & -\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_1 & -(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 & -\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_1 & -(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ |
| (2) | $\begin{pmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & -(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & -(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \end{pmatrix}$ | $\bar{Z} \begin{pmatrix} 1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_3 & -1 \\ 1 & -(1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ $\bar{Z} = \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 / (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)$ | $\bar{Z} \begin{pmatrix} 1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2 & -1 \\ 1 & -(1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}_2) \end{pmatrix}$ $\bar{Z} = \bar{Z}_2^2 / (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2)$ |
| (3) | $\bar{Y}_2 \begin{pmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 \\ 1 & \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)$ | $\bar{Y}_2 \begin{pmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 \\ 1 & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2)$ | $\bar{Z}_1 \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 & 1 \\ \bar{Y}_2 & \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_2 = \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)$ | $\bar{Z}_1 \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 & 1 \\ \bar{Y}_2 & \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_2 = \bar{Y}_2 (\bar{Y}_2 + 2\bar{Y}_1)$ |
| (1) | $\frac{1}{\bar{Z}_0} \begin{pmatrix} 1 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)$ | $\frac{1}{\bar{Z}_0} \begin{pmatrix} 1 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2)$ | $\frac{1}{\bar{Y}_0} \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & -1 \\ \bar{Y}_1 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_3$ $\bar{Y}^2 = \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)$ | $\frac{1}{\bar{Y}_0} \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & -1 \\ \bar{Y}_1 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ $\bar{Y}^2 = \bar{Y}_2 (\bar{Y}_2 + 2\bar{Y}_1)$ |
| (4) | $\frac{1}{\bar{Z}_0} \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)$ | $\frac{1}{\bar{Z}_0} \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ $\bar{Z}^2 = \bar{Z}_1 (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2)$ | $\frac{1}{\bar{Y}_0} \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_2 \\ \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ $\bar{Y}^2 = \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)$ | $\frac{1}{\bar{Y}_0} \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_2 \\ \bar{Y}_1 & -\bar{Y}_2 \end{pmatrix}$ $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ $\bar{Y}^2 = \bar{Y}_2 (\bar{Y}_2 + 2\bar{Y}_1)$ |

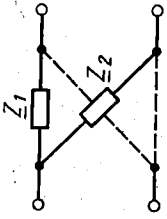
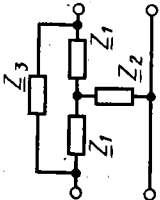
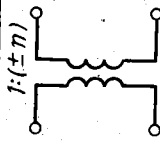
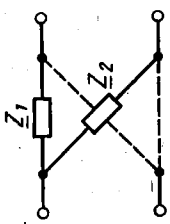
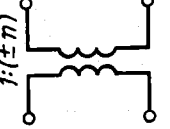
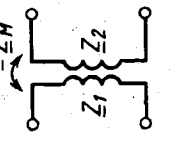
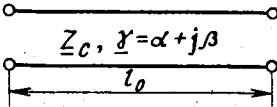
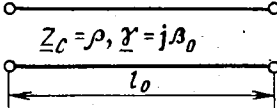
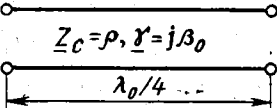
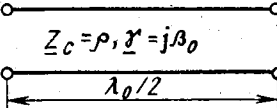
| Вход матрица | | Схема четырехполюсника | | |
|--------------|---|--|---|---|
| (a) |  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_2 - Y_1 \\ Y_1 - Y_2 & -(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix}$ |  $\frac{1}{Z_3} \begin{pmatrix} Z_a^2 & -Z_b^2 \\ Z_b^2 & -Z_a^2 \end{pmatrix} \quad (*)$ |  | $\frac{1}{Z^2} \begin{pmatrix} Z_2 & \mp Z_M \\ \pm Z_M & -Z_1 \end{pmatrix}$ $Z^3 = Z_1 Z_2 - Z_M^2$ |
| (b) | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_2 - Z_1 & -(Z_1 + Z_2) \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{Z_0} \begin{pmatrix} Z_a^2 & -Z_b^2 \\ Z_b^2 & -Z_a^2 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 2Z_1 + Z_3 \quad (*)$ | — | $\begin{pmatrix} Z_1 \pm Z_M & \\ \mp Z_M & -Z_2 \end{pmatrix}$ |
| (a) | $\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$ $Z = Z_2 - Z_1$ | $\frac{1}{Z_0^2} \begin{pmatrix} Z_a^2 & Z_b^2 \\ Z_b^2 & Z_a^2 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 2Z_1 + Z_3 \quad (*)$ | $\begin{pmatrix} \pm 1/n & 0 \\ 0 & \pm n \end{pmatrix}$ | $\pm \frac{1}{Z_M} \begin{pmatrix} Z_1 & Z^2 \\ 1 & Z_2 \end{pmatrix}$ $Z^2 = Z_1 Z_2 - Z_M^2$ |

Схема четырехполосника

| Вход цепи |  |  |  |
|-----------|--|--|---|
| (f) | $\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & -2Z_1 Z_2 \end{pmatrix}$ $Z = Z_1 + Z_2$ | $\begin{pmatrix} 0 & \pm n \\ \pm n & 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \pm Z_M \\ \pm Z_M & -Z_2 \end{pmatrix}$ $Z^2 = Z_1 Z_2 - Z_M^2$ |
| (h) | $\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 2Z_1 Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & -2 \end{pmatrix}$ $Z = Z_1 + Z_2$ | $\frac{1}{Z_0^2} \begin{pmatrix} Z_0^2 & Z_b^2 \\ Z_b^2 & -Z_0^2 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 2Z_1 + Z_3 (*)$ | $\frac{1}{Z_2} \begin{pmatrix} Z^2 & \pm Z_M \\ \pm Z_M & -1 \end{pmatrix}$ $Z^2 = Z_1 Z_2 - Z_M^2$ |

(*) $Z_0^2 = Z_1 (Z_1 + Z_2) + Z_2 (2Z_1 + Z_3)$, $Z_b^2 = Z_1^2 + Z_2 (2Z_1 + Z_3)$, $Z^2 = Z_1 Z_2 (Z_1 + 2Z_2)$

Цепочечные матрицы волновых четырехполюсников

| Вид четырехполюсника | (а) |
|--|--|
|  <p style="text-align: center;">$Z_c, \underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ l_0</p> | $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l_0 & \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} l_0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l_0 & \operatorname{ch} \underline{\gamma} l_0 \end{pmatrix}$ |
|  <p style="text-align: center;">$Z_c = \rho, \underline{\gamma} = j\beta_0$ l_0</p> | $\begin{pmatrix} \cos \beta_0 l_0 & j\rho \sin \beta_0 l_0 \\ j \frac{1}{\rho} \sin \beta_0 l_0 & \cos \beta_0 l_0 \end{pmatrix}$ |
|  <p style="text-align: center;">$Z_c = \rho, \underline{\gamma} = j\beta_0$ $\lambda_0/4$</p> | $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \nu & j\rho \\ j \frac{1}{\rho} & -\frac{\pi}{4} \nu \end{pmatrix}$ |
|  <p style="text-align: center;">$Z_c = \rho, \underline{\gamma} = j\beta_0$ $\lambda_0/2$</p> | $- \begin{pmatrix} 1 & j \frac{\pi}{2} \rho \nu \\ j \frac{\pi}{2\rho} \nu & 1 \end{pmatrix}$ |

Матрицы четырехполосников с операционными усилителями

| Тип четырехполосника | Схема четырехполосника | Эквивалентная схема | (a) | a | Другие существующие матрицы | Основные параметры |
|---|------------------------|---------------------|---|--------------------------|--|--|
| ИОУ | Рис. 3.43, а | Рис. 3.43, б | $\begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 1/z & 0 \end{pmatrix}$ | 0 | $(z) = \begin{pmatrix} z/\mu & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, (f) = \begin{pmatrix} \mu/z & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu = -Z_2/Z_1,$ $z = -Z_3$ |
| ИНУН | Рис. 3.44, а | Рис. 2.12, а | $\begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 0 | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu = 1 + R_2/R_1$ |
| ИНУТ | Рис. 3.44, б | Рис. 2.12, б | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/z_0 & 0 \end{pmatrix}$ | 0 | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_0 & 0 \end{pmatrix}$ | $z_0 = -R$ |
| ИТУН | Рис. 3.44, в | Рис. 2.12, в | $\begin{pmatrix} 0 & 1/y_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 0 | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_0 & 0 \end{pmatrix}$ | $y_0 = 1/R$ |
| ИТУТ | Рис. 3.44, г | Рис. 2.12, г | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ | 0 | $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\alpha = -(1 + R_1/R_2)$ |
| КПС (КПСН при $R_1 = R_2,$ КПСТ при $R_3 = R_4$) | Рис. 3.46, в | Рис. 2.13, а | $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_3 \end{pmatrix}$ | $\frac{\mu_1}{\alpha_3}$ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (h) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu_1 = -R_3/R_4$ $\alpha_3 = -R_1/R_2$ |
| | | Рис. 2.13, б | $\begin{pmatrix} 1/\mu_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ | $\frac{\alpha_1}{\mu_2}$ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix}, (h) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\alpha_1 = -R_2/R_1,$ $\mu_2 = -R_4/R_3$ |

Продолжение табл. П.20

| Тип четырех-полосника | Схема четырех-полосника | Эквивалентная схема | (a) | a | Другие существующие матрицы | Основные параметры |
|-----------------------|--|---------------------|---|--------------------|--|--|
| КЛСТ | Рис. 3.46, б | Рис. 2.13, а | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu_1 = \mu = 1$ $\alpha_2 = \alpha = R_1 R_2 / R_3 R_4$ |
| | | Рис. 2.13, б | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ | α | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\alpha_1 = \alpha = R_2 R_4 / R_1 R_3$, $\mu_3 = \mu = 1$ |
| ЛКС (АИПС) | Рис. 3.46, а при $R_3 = R_1$, $R_4 = R_2$ | Рис. 2.13, а | $\begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ | 1 | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 1/n & 0 \end{pmatrix}$ | $n = -R_3 / R_1$, $\alpha_1 = \mu_2 = n$, $\mu_3 = \alpha_2 = 1/n$ |
| | | Рис. 2.13, б | $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | μ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\mu & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu_2 = \mu = -R_1 / R_3$, $\alpha_2 = 1$ |
| КОСН | Рис. 3.45, а | Рис. 2.13, а | $\begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\mu}$ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\alpha_1 = 1$ |
| | | Рис. 2.13, б | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu_3 = \mu = -R_3 / R_1$ |
| КОСТ | Рис. 3.45, б | Рис. 2.13, а | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ | α | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\mu_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha = -R_1 / R_2$ |
| | | Рис. 2.13, б | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ | α | $(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$ | $\alpha_1 = \alpha = -R_2 / R_1$, $\mu_3 = 1$ |

| Тип четырех- полюсника | Схема четырех- полюсника | Эквивалентная схема | (a) | a | Другие существующие матрицы | Основные параметры |
|------------------------|---------------------------------|---------------------|---|--------------------|---|----------------------------------|
| ИПС | Рис. 3.49, б | Рис. 2.14, а | $\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ 1/z_2 & 0 \end{pmatrix}$ | $-\frac{z_1}{z_2}$ | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1/z_2 \\ 1/z_1 & 0 \end{pmatrix}$, | $z_1 = R,$ $z_2 = RR_1/R_2$ |
| | | | | | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix}$ | |
| ГПС (ПГ) | Рис. 3.49, б при $R_1=R_2=R$ | Рис. 2.14, б | $\begin{pmatrix} 0 & 1/y_2 \\ y_1 & 0 \end{pmatrix}$ | $-\frac{y_1}{y_2}$ | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}$, | $y_1 = R_2/R_1R,$ $y_2 = 1/R$ |
| | | | | | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1/y_2 \\ 1/y_1 & 0 \end{pmatrix}$ | |
| ГОС (ОГ) | Рис. 3.48, б | Рис. 2.14, в* | $\begin{pmatrix} 0 & z_0 \\ -1/z_0 & 0 \end{pmatrix}$ | 1 | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1/z_0 \\ 1/z_0 & 0 \end{pmatrix}$, | $z_0 = R$ |
| | | | | | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & z_0 \\ -z_0 & 0 \end{pmatrix}$ | |
| | | Рис. 2.14, г** | $\begin{pmatrix} 0 & 1/y_0 \\ y_0 & 0 \end{pmatrix}$ | -1 | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & y_0 \\ y_0 & 0 \end{pmatrix}$, | $y_0 = 1/R$ |
| | | | | | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1/y_0 \\ 1/y_0 & 0 \end{pmatrix}$ | |
| | | Рис. 2.14, г** | $\begin{pmatrix} 0 & 1/y_0 \\ -y_0 & 0 \end{pmatrix}$ | 1 | $(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1/z_0 \\ 1/z_0 & 0 \end{pmatrix}$, | $z_0 = R$ |
| | | | | | $(z) = \begin{pmatrix} 0 & z_0 \\ -z_0 & 0 \end{pmatrix}$ | |

* В схеме рис. 2.14, в изменена полярность Э. Д. С. выходного источника.

** В схеме рис. 2.14, г изменено направление задающего тока в входного источника.

Параметры канонических схем четырехполюсников

| Вид схемы | Параметры | |
|--------------|---|--|
| Рис. 8.40, а | $\mu = (z_{12} + z_{21})/z_{11} = (1 - a)/a_{11}$ | $\begin{aligned} Z_1 &= z_{11} + z_{12} = \\ &= (a_{11} - a)/a_{21}, \\ Z_2 &= -z_{12} = a /a_{21}, \\ Z_3 &= z_{12} - z_{22} = \frac{a_{22} - a }{a_{21}} + \\ &+ a \frac{ a - 1}{a_{11}a_{21}} \end{aligned}$ |
| Рис. 8.40, б | $z_0 = z_{12} + z_{21} = (1 - a)/a_{21}$ | |
| Рис. 8.40, в | $y_0 = \frac{1}{z_{11}} \frac{z_{12} + z_{21}}{z_{12} - z_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \frac{1 - a }{a_{22} - a }$ | |
| Рис. 8.40, г | $a = \frac{z_{12} + z_{21}}{z_{12} - z_{22}} = \frac{1 - a }{a_{22} - a }$ | |
| Рис. 8.41, а | $y_0 = y_{12} + y_{21} = (1 - a)/a_{12}$ | $\begin{aligned} Y_1 &= -y_{12} = a /a_{12}, \\ Y_2 &= y_{11} + y_{12} = \\ &= (a_{22} - a)/a_{12}, \\ Y_3 &= y_{12} - y_{22} = \\ &= (a_{11} - a)/a_{12} \end{aligned}$ |
| Рис. 8.41, б | $a = (y_{12} + y_{21})/y_{11} = (1 - a)/a_{22}$ | |
| Рис. 8.41, в | $\mu = \frac{y_{12} + y_{21}}{y_{12} - y_{22}} = \frac{1 - a }{a_{11} - a }$ | |
| Рис. 8.41, г | $z_0 = \frac{1}{y_{11}} \frac{y_{12} + y_{21}}{y_{12} - y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{1 - a }{a_{11} - a }$ | |
| Рис. 8.42, а | $\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2} (z_{12} + z_{21}) = \frac{1 - a }{2a_{21}}, \quad Z_1 = z_{11} + \frac{1}{2} (z_{12} - z_{21}) = \\ &= \frac{2a_{11} - a - 1}{2a_{21}}, \\ Z_2 &= \frac{1}{2} (z_{21} - z_{12}) = \frac{1 + a }{2a_{21}}, \quad Z_3 = \frac{1}{2} (z_{12} - z_{21}) - z_{22} = \\ &= \frac{2a_{22} - a - 1}{2a_{21}} \end{aligned}$ | |
| Рис. 8.42, б | $\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} (y_{12} + y_{21}) = \frac{1 - a }{2a_{12}}, \quad Y_1 = \frac{1}{2} (y_{21} - y_{12}) = \frac{1 + a }{2a_{12}}, \\ Y_2 &= y_{11} + \frac{1}{2} (y_{12} - y_{21}) = \frac{2a_{22} - a - 1}{2a_{12}}, \\ Y_3 &= \frac{1}{2} (y_{12} - y_{21}) - y_{22} = \frac{2a_{11} - a - 1}{2a_{12}} \end{aligned}$ | |

Примечание. Формулы действительны также для обратных четырехполюсников при $|a| = 1$, $z_{11} = -z_{12}$, $y_{11} = -y_{12}$.

Рабочие параметры реактивных фильтров

| | | |
|---|----------------------|--|
| Полоса проз- рачности ($0 < a_{11} a_{22} < 1$) | $a_{11} \neq a_{22}$ | $H_{\underline{p}} = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\frac{r_{c1}}{r_{c2}}} + \sqrt{\frac{r_{c2}}{r_{c1}}} \right) \cos b_c + j \left(\sqrt{r_{c1} r_{c2}} + \frac{1}{\sqrt{r_{c1} r_{c2}}} \right) \sin b_c \right]$ |
| | $a_{11} = a_{22}$ | $H_{\underline{p}} = \cos b_c + j \frac{1}{2} \left(r_c + \frac{1}{r_c} \right) \sin b_c,$ $a_p = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(r_c - \frac{1}{r_c} \right)^2 \sin^2 b_c, \quad \text{tg } b_p = \frac{1}{2} \left(r_c + \frac{1}{r_c} \right) \text{tg } b_c \right]$ |
| Полоса непро- зрачности ($a_{11} a_{22} > 1$) | $a_{11} \neq a_{22}$ | $H_{\underline{p}} = \pm \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\frac{x_{c1}}{x_{c2}}} + \sqrt{\frac{x_{c2}}{x_{c1}}} \right) \text{ch } a_c + j \left(\sqrt{x_{c1} x_{c2}} - \frac{1}{\sqrt{x_{c1} x_{c2}}} \right) \text{sh } a_c \right],$ $H_{\underline{p}} = \pm \left[\text{ch } a_c + j \frac{1}{2} \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) \text{sh } a_c \right],$ $a_p = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(x_c + \frac{1}{x_c} \right)^2 \text{sh}^2 a_c \right], \quad \text{tg } b_p = \frac{1}{2} \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) \text{th } a_c$ |
| | $a_{11} = a_{22}$ | $H_{\underline{p}} = \pm \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{x_{c1} x_{c2}} - \frac{1}{\sqrt{x_{c1} x_{c2}}} \right) \text{ch } a_c - j \left(\sqrt{\frac{x_{c1}}{x_{c2}}} + \sqrt{\frac{x_{c2}}{x_{c1}}} \right) \text{sh } a_c \right]$ $H_{\underline{p}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) \text{ch } a_c - j \text{sh } a_c \right],$ $a_p = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{4} \left(x_c + \frac{1}{x_c} \right)^2 \text{ch}^2 a_c - 1 \right], \quad \text{tg } b_p = -\frac{2}{x_c - 1/x_c} \text{th } a_c$ |

| | |
|---------------------------|---|
| $\tilde{P}_1(\Omega)$ | Ω |
| $\tilde{P}_2(\Omega)$ | $2\Omega^2 - 1$ |
| $\tilde{P}_3(\Omega)$ | $4\Omega^3 - 3\Omega$ |
| $\tilde{P}_4(\Omega)$ | $8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$ |
| $\tilde{P}_5(\Omega)$ | $16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$ |
| $\tilde{P}_6(\Omega)$ | $32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$ |
| $\tilde{P}_7(\Omega)$ | $64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$ |
| $\tilde{P}_8(\Omega)$ | $128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$ |
| $\tilde{P}_9(\Omega)$ | $256\Omega^9 - 576\Omega^7 + 432\Omega^5 - 120\Omega^3 + 9\Omega$ |
| $\tilde{P}_{10}(\Omega)$ | $512\Omega^{10} - 1280\Omega^8 + 1120\Omega^6 - 400\Omega^4 + 50\Omega^2 - 1$ |
| $\tilde{P}_{11}(\Omega)$ | $1024\Omega^{11} - 2816\Omega^9 + 2816\Omega^7 - 1232\Omega^5 + 220\Omega^3 - 11\Omega$ |
| $\tilde{P}_{12}(\Omega)$ | $2048\Omega^{12} - 6144\Omega^{10} + 6912\Omega^8 - 3584\Omega^6 + 840\Omega^4 - 72\Omega^2 + 1$ |
| $\tilde{P}_{13}(\Omega)$ | $4096\Omega^{13} - 13312\Omega^{11} + 16640\Omega^9 - 9984\Omega^7 + 2912\Omega^5 - 364\Omega^3 + 13\Omega$ |
| $\tilde{P}_{14}(\Omega)$ | $8192\Omega^{14} - 28672\Omega^{12} + 39424\Omega^{10} - 2688\Omega^8 + 9408\Omega^6 - 1568\Omega^4 + 98\Omega^2 - 1$ |
| $\tilde{P}_{15}(\Omega)$ | $16384\Omega^{15} - 61440\Omega^{13} + 92160\Omega^{11} - 22016\Omega^9 + 28800\Omega^7 - 6048\Omega^5 + 560\Omega^3 - 15\Omega$ |
| $\tilde{P}_{16}(\Omega)$ | $32768\Omega^{16} - 131072\Omega^{14} + 212992\Omega^{12} - 180224\Omega^{10} + 84480\Omega^8 - 21504\Omega^6 + 2688\Omega^4 - 128\Omega^2 + 1$ |
| $\tilde{P}_{n+1}(\Omega)$ | $2\Omega\tilde{P}_n(\Omega) - \tilde{P}_{n-1}(\Omega)$ |

Таблица П.24

Избирательность чебышевских фильтров

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $K_{\Pi} \begin{smallmatrix} 40\text{дБ} \\ 3\text{дБ} \end{smallmatrix}$ | 100 | 7,07 | 3,01 | 2,01 | 1,59 | 1,40 | 1,21 | 1,15 | 1,10 | 1,08 | 1 |

Таблица П.25

Избирательность фильтров с максимально-плоской характеристикой

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|---|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $K_{\Pi} \begin{smallmatrix} 40\text{дБ} \\ 3\text{дБ} \end{smallmatrix}$ | 100 | 10 | 4,64 | 3,16 | 2,50 | 2,16 | 1,94 | 1,78 | 1,66 | 1,58 | 1 |

Литература

Основная

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники, ч. I. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978.
2. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1984.
4. Зевеке Г. В. и др. Основы теории цепей. — М.: Энергия, 1975.
5. Теоретические основы электротехники, т. I. Основы теории линейных цепей/Под ред. П. А. Ионкина. — М.: Высшая школа, 1976.
6. Теория линейных электрических цепей/Под ред. И. Г. Кляцкина. — М.: Высшая школа, 1973.
7. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. — М.: Высшая школа, 1971.
8. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высшая школа, 1981.
9. Сборник задач по теории электрических цепей/Под ред. П. Н. Матханова и Л. В. Данилова. — М.: Высшая школа, 1980.
10. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1982.

Дополнительная.

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1983.
2. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1983.
3. Босый Н. Д. Электрические фильтры. — Киев: Гостехиздат, УССР, 1959.
4. Гарновский Н. Н. Теоретические основы электропроводной связи, ч. I. — М.: Связьиздат, 1956.
5. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. — М.: Изд. АН СССР, 1951.
6. Синтез активных RC-цепей/Под ред. А. А. Ланца. — М.: Связь, 1975.
7. Лосев А. К. Теория и расчет электромеханических фильтров. — М.: Связь, 1965.
8. Лосев А. К. Введение в специальность «Радиотехника». — М.: Высшая школа, 1980.
9. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1976.
10. Попов П. А. Расчет частотных электрических фильтров. — М.—Л.: Энергия, 1966.
11. Харкевич А. А. Спектры и анализ. — М.: Физматгиз, 1962.

Предметный указатель

- Автотрансформатор 117, 122
Ампер 8
Ампервитки 34
Амперметр 92
Амплитуда 12, 83
Анализ цепей 80, 267
Аппроксимация 453
- База сигнала 224
Балансировка линии 335
Балансный контур 450
Бел 168
Биения 264
Биквад 429
Бисекция 377
- Ватт 11, 30
Ваттметр 164
Ватт-секунда 11
Вебер 32
Вектор 81, 82
Вершина графа 62, 383
Ветвь графа 63, 383
— дерева 65
— цепи 49
Взаимондукция 33, 34
Видеоимпульс 245
Волна 15, 16, 317, 320, 322
Волновое расстояние 317
Вольт 9
Вольт-ампер 11, 95
— — реактивный 30
Вольтметр 92, 352
Временной множитель 83
Входная функция 271, 292
Входное воздействие 22, 267, 281, 286
Вычет функции 229
- Гармоники сигнала 22, 215
Гармонические колебания 13, 82
— — синфазные 85
— — сопряженные по фазе 83
Генри 32
Герц 13
Гиратор 46
Годограф 404
Граф 62, 66
— сигнальный 383
— топологический 69
Графы дуальные 67
Групповая скорость 333
Групповое время прохождения 382
- Двухполюсник 28
Девиация частоты 258
Делитель напряжения 97, 100, 101, 106
— тока 98, 100, 101, 106
Дельта-импульс (функция) 285
Дерево графа 65
Децибел 168
Джоуль 9, 11
Диаграмма векторная 82
— круговая 340
Дисперсия волн 333, 334
Дифференциатор 443
Длина волны 311
Длительность переходного процесса 293, 299
— сигнала 219, 224, 244
- Единица мнимая 81
Единичный скачок 221
Емкость 30
- Закон Ампера 8
— Кирхгофа 60, 69, 83
— — второй 56, 58, 61, 74
— — первый 53, 60, 69, 72
— коммутации 294
— непрерывности зарядов 295
— — потокоцеплений 295
— Ома 28, 84, 118, 291
— — для магнитной цепи 35
— сохранения зарядов 55
— энергии 59, 60
— суперпозиции 23
— электромагнитной индукции 32
Заряд 7, 30, 157, 158
Зарядка 31, 33, 299
Затухание волны 319
— колебаний 303
— цепи 96, 168, 175, 339, 370, 371, 379, 382
Звезда 47, 50
Звено фильтра 415
- Избирательность (селективность) 167—170
Инверсия графа 390—393
— сопротивлений 46—47
— токов и напряжений 44, 45, 127
— элементов 46
Инвертор 46
Индекс модуляции 259, 262
Индуктивность 32, 34, 133

Интегратор 443
Информация 11, 18
Искажения 19, 20, 24, 273—278, 400
Исток 384
Источник 18, 39—41

Каноническая схема 364
Каскад 187
Катушка индуктивности 32, 33
Колебания 13, 279
— синфазные 85
Коммутация цепи 293
Комплексная плоскость 81, 341
Конвертор 44, 130, 131
Конденсатор 114
Контур графа 64, 75, 383
— интегрирования 229, 290
— цепи 51, 134
Корень дерева 65
— полинома 225
— характеристического уравнения 280
Короткое замыкание 41—43
Корректор 445
Коэффициент передачи 19, 89, 173, 370, 379
— трансформации 35, 44, 118
Коэффициенты сигналов 96, 252
— цепей 170, 175
Кулон 8

Лампа усилительная 396
Лес графа 65
Линия 16, 439
— длинная 311, 441
— задержки 440
Логарифмические меры 168

Магнитная индукция 32
Магнитный поток 32, 34
Многоугольник 47, 50
Модуляция 14, 21, 254—263
Мост 50, 99, 365, 385, 393
Мощность 39—42, 90—96, 123, 126

Нагрузка 41, 174, 184
Накопитель энергии 30—32
Напряжение 9, 10, 82, 92, 160, 287
— ветви 49
— задающее 40, 160
— узловое 49
Непер 168
Низкочастотный прототип 413
Нули функции 270

Обход 384
Ом 28
Оператор 81, 85, 224, 280, 287
Определитель 142, 146
Ослабление 168, 370, 371, 379
Отклик цепи 267, 281, 286
Отражение волны 317, 325

Падение напряжения 9
Параметры цепей 19, 25, 361—362, 371
Передаточная функция 90, 268, 271, 292, 370, 379, 407
Передача графа 384
— ребер 383
— цепи 90, 268
Период 13, 14
Петля графа 64, 383
Подграф 65
Полином характеристический 280
Полоса затухания 409, 411
— прозрачности 410
— пропускания 24, 176, 408
Полузвено фильтра 415, 417
Полюсы функции 228, 270
Помеха 19, 21, 167
Порядок цепи 280
Потенциал 8
Потокоцепление 32, 34
Потребитель энергии 22
Преобразование графов 67, 388
— сигналов 19, 20, 21
— цепей 148—151, 153—156
— частоты 20, 21, 413
Преобразователь мощности 42—44, 129
— электромеханический 432, 437, 439
Проводимость 90, 114, 144, 282
— диссипативная 28
— комплексная 87, 122
— операторная 291
— реактивная 36, 86
Путь графа 64, 383, 384
Пучность волны 321—323

Равенство Парсевала 253
Радян 12
— в секунду 13
Радиопульс 257
Развязка индуктивных связей 121
Разрядка 31, 33, 299, 304, 306
Расстройка 110, 111, 175
Реакция цепи 22—23, 267, 268, 286
Реализация цепи 454
Ребро графа 62, 383
Режим цепи 41, 42
Резистор 29
Резонанс 109, 123, 124, 189, 197—203, 427
Резонатор 350, 432, 436, 437

Связь между контурами 195, 200, 203
— обратная 128, 398, 399, 401, 428
Сдвиг фаз 89
Селекция сигнала 167
Сечение графа 71
Сжатие графа 64, 388
Сигнал 11, 12, 15, 233, 247
— периодический 216, 249
— сопряженный по фазе 232

- Сименс 28
 Синтез цепей 80, 453
 Синус интегральный 275
 Смещение сигнала 228, 234
 — спектра 237
 Согласование 124—127, 186
 Соединение ветвей 49, 50
 — двухполюсников 89
 — четырехполюсников 187
 — элементов 47, 49, 55, 58
 Сопротивление 90, 114, 118, 119, 122, 140, 147, 175, 195, 282, 378
 — диссипативное 28
 — комплексное 87
 — операторное 291
 — реактивное 36, 86
 Спектр 16, 23, 213
 Спектральная плотность 214, 218
 — составляющая 16, 17, 21, 22
 — функция 218
 — характеристика 268
 Стабильность 400
 Сток 384
 Сумматор 127
 Суперпозиция 22
 Схема 27, 114
- Теорема бисекции** 378
 — взаимности 152
 — дифференцирования 236
 — запаздывания 234
 — интегрирования 236
 — Котельникова 247
 — Куратовского 66
 — масштабов 234
 — модуляции 257
 — обратности 152
 — об эквивалентном источнике напряжения и тока 151
 — отсчетов 247
 — перемножения сигналов 237
 — погрешности 382
 — Рэлея 233
 — свертки сигналов 237
 — — спектров 237
 — сложения 234
 — смещения сигнала 234
 — — спектра 238
 — Телледжена 61
 Тесла 32
 Ток 8, 10, 160, 287
 — ветви 49
 — задающий 41, 144, 160
 — контурный 51
 Транзистор 397
 Трансформатор 37, 39, 45, 117, 120, 422
 Трансформация напряжений и токов 36, 37, 118
 — параметров элементов 38
 — сопротивлений 39, 118
- Треугольник сопротивлений и проводимостей 88, 115—116
 — цепи 51
- Угол потерь** 96
 — фазовый 12
 Удлинитель 450
 Узел волны 321—323
 — графа 63, 383
 — цепи 48, 49, 55, 156
 Умножитель частоты 22, 193
 Усилитель 18, 42, 186, 210, 398
 — операционный 43, 127, 128
 Устойчивость четырехполюсников 401
- Фаза** 12, 13
 — линии передачи 160
 — цепи 88, 90, 158, 268, 370, 379
 Фазовая скорость 317
 Фазовый множитель 83
 — контур 272
 Фактор связи 197
 Фарад 30
 Фильтр 167, 209, 406—408
 Фильтрация 167, 188
 — оптимальная 407
 Фон 169
 Форма сигнала 12
- Характеристики цепей** 90, 113, 172, 268, 281, 286, 404, 468
 Холостой ход 42
 Хорда дерева (ветвь связи) 65
- Цепи дуальные** 68
 Цепь 18, 22, 23, 50, 158
 — обратимая 152, 363
 — минимально-фазовая 272
- Частота** 13, 14, 17, 109, 172, 224, 225, 288, 303, 427
 Четвертьволновый изолятор 351
 Чувствительность цепи 400
- Ширина полосы пропускания** 176
 — спектра 18
 Шлейф 348, 352, 355
 Шум 286
 Шунт 98
- Эквивалентность** 39, 87, 113, 148, 149, 183, 362
 — потенциальная 153
 Электродвижущая сила (э. д. с., или задающее напряжение) 32, 40, 140, 160
 Электромагнитная индукция 25, 32
 Элемент 27—33, 39, 131
 Элементы дуальные 47
 — инверсные 46
 Энергия 8, 9, 11, 18, 28, 30, 31, 33, 37

Оглавление

| | | |
|----------------|--|------------|
| | Предисловие | 3 |
| | Введение | 4 |
| Глава 1 | Основные понятия теории электрических цепей | 7 |
| | § 1.1. Основные электрические величины | 7 |
| | § 1.2. Основные сведения о сигналах | 11 |
| | § 1.3. Основные сведения о спектрах сигналов | 16 |
| | § 1.4. Основные сведения об электрических цепях | 18 |
| | Вопросы для самоконтроля | 25 |
| Глава 2 | Основы общей теории электрических цепей | 27 |
| | § 2.1. Идеальные пассивные элементы | 27 |
| | § 2.2. Идеальные активные элементы | 39 |
| | § 2.3. Соединения элементов | 47 |
| | § 2.4. Основные законы токопрохождения | 53 |
| | § 2.5. Графы электрических цепей | 62 |
| | § 2.6. Топологические свойства цепей | 68 |
| | Вопросы для самоконтроля | 78 |
| Глава 3 | Основные методы расчета электрических цепей | 80 |
| | § 3.1. Расчет гармонических колебаний | 80 |
| | § 3.2. Расчет простейших цепей | 97 |
| | § 3.3. Реальные пассивные элементы | 113 |
| | § 3.4. Реальные активные элементы | 122 |
| | § 3.5. Цепи с операционными усилителями | 127 |
| | § 3.6. Прямые методы расчета цепей | 133 |
| | § 3.7. Косвенные методы расчета цепей | 148 |
| | § 3.8. Расчет постоянных напряжений и токов | 150 |
| | § 3.9. Расчет трехфазных цепей | 158 |
| | Вопросы для самоконтроля | 165 |
| Глава 4 | Резонансные цепи | 167 |
| | § 4.1. Меры оценки уровня сигналов и помех | 167 |
| | § 4.2. Последовательный контур | 171 |
| | § 4.3. Параллельный контур | 179 |
| | § 4.4. Сложные параллельные контуры | 189 |
| | § 4.5. Связанные контуры | 194 |
| | Вопросы для самоконтроля | 211 |
| Глава 5 | Сигналы и их спектры | 213 |
| | § 5.1. Виды спектров и их основные свойства | 213 |
| | § 5.2. Обратные преобразования спектра | 227 |
| | § 5.3. Преобразования сигналов и их спектров | 234 |
| | § 5.4. Методы определения спектров | 239 |
| | § 5.5. Периодические сигналы и их спектры | 249 |
| | § 5.6. Модулированные сигналы и их спектры | 254 |
| | Вопросы для самоконтроля | 266 |

| | | |
|----------|--|-----|
| Глава 6 | Анализ процессов в электрических цепях | 267 |
| | § 6.1. Спектральные методы анализа цепей | 267 |
| | § 6.2. Временные методы анализа цепей | 278 |
| | § 6.3. Операторные методы анализа цепей | 287 |
| | § 6.4. Анализ переходных процессов | 293 |
| | Вопросы для самоконтроля | 309 |
| Глава 7 | Цепи с распределенными параметрами | 311 |
| | § 7.1. Основные уравнения длинных линий | 312 |
| | § 7.2. Волновые процессы | 315 |
| | § 7.3. Волновые параметры линии | 329 |
| | § 7.4. Расчет длинных линий | 336 |
| | § 7.5. Волновые двухполюсники и четырехполюсники | 347 |
| | Вопросы для самоконтроля | 357 |
| Глава 8 | Четырехполюсники | 360 |
| | § 8.1. Основы общей теории четырехполюсников | 360 |
| | § 8.2. Расчет четырехполюсников по основным параметрам | 372 |
| | § 8.3. Расчет четырехполюсников по характеристическим параметрам | 378 |
| | § 8.4. Расчет четырехполюсников методом сигнальных графов | 383 |
| | § 8.5. Необратимые четырехполюсники | 393 |
| | Вопросы для самоконтроля | 404 |
| Глава 9 | Цепи для обработки сигналов | 406 |
| | § 9.1. Селективные цепи | 406 |
| | § 9.2. Реактивные фильтры | 409 |
| | § 9.3. Электрические фильтры | 415 |
| | § 9.4. Электромеханические фильтры | 432 |
| | § 9.5. Линии задержки | 440 |
| | § 9.6. Дифференцирующие и интегрирующие цепи | 442 |
| | § 9.7. Корректирующие цепи | 445 |
| | Вопросы для самоконтроля | 452 |
| Глава 10 | Синтез цепей | 453 |
| | § 10.1. Задачи синтеза | 453 |
| | § 10.2. Синтез двухполюсников | 454 |
| | § 10.3. Синтез четырехполюсников | 467 |
| | Вопросы для самоконтроля | 480 |
| | Заключение | 481 |
| | Приложения | 483 |
| | Литература | 506 |
| | Предметный указатель | 507 |

Учебное издание

Алексей Константинович Лосев

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Заведующая редакцией Л. А. Романова
Редактор Т. И. Артемова
Младший редактор И. А. Исаева
Художественный редактор Т. М. Скворцова
Художник В. В. Гарбузов
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Р. К. Коснинова

ИБ № 4863

Изд. № ЭР-377. Сдано в набор 22.05.86. Подп. в печать 16.02.87. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бум. офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 32 усл. печ. л. + форзац 0,25 усл. печ. л. 64,5 усл. кр.-отт. 31,68 уч.-изд. л. + форзац 0,42 уч.-изд. л. Тираж 20 000 экз. Зак. № 1333. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.